2. PRAVDEPODOBNOSŤ

Matematický základ štatistických metód je teória pravdepodobnosti, ktorá skúma zákonitosti v takých javoch a procesoch, kde sa vyskytujú prvky náhodnosti. Táto kapitola obsahuje tie pojmy teórie pravdepodobnosti, ktoré využijeme pri popise štatistických metód. Vhodný matematický aparát na axiomatické vybudovanie teórie náhodných javov je teória množín.

2.1 Náhodný pokus a náhodný jav (udalosť)

Okrem javov, ktoré sú určené deterministicky (fyzikálne a matematické zákony, vzťahy medzi ekonomickými veličinami) sa často stretávame s javmi, ktoré sa nedajú opísať týmto spôsobom. Na výsledok činnosti, pri zachovaní rovnakých podmienok, môžu vplývať aj druhotné faktory, ktorých vplyv nevieme predvídať, preto dopredu nie je známy ani výsledok tejto činnosti. Preto takúto činnosť - fyzický experiment voláme **náhodný pokus** (hod kockou alebo viacerými kockami, losovanie prvku z nejakej množiny, rozdanie kariet, rôzne náhodné hry, narodenie dieťaťa istého pohlavia). Spoločnou vlastnosťou náhodných pokusov je ich opakovateľnosť.

Náhodný jav (udalosť) je výsledok náhodného pokusu, ktorý pod vplyvom náhody niekedy nastane, inokedy nie. Náhodné javy sa označujú *A, B,* ... .

Príklady :

- Pri hode kockou padne 5 bodov.
- Narodí sa dievča.
- Vyrobí sa zlý výrobok.
- V rade stojí najviac 5 ľudí.
- Zo všetkých obyvateľov mesta sa vylosuje dôchodca.

Je dôležité poznať množinu všetkých možných výsledkov náhodného pokusu. V ďalšom ku každému takémuto výsledku priradíme číslo, ktorým vyjadríme šancu, že daný pokus skončí s týmto výsledkom.

2.2 Vzťahy medzi náhodnými javmi a operácie s nimi

Osobitne dôležité postavenie majú elementárne náhodné javy (označujeme ich E_1, E_2, ...), ktoré zodpovedajú rôznym základným výsledkom náhodného pokusu. Pre každý pokus je dôležité poznať všetky elementárne náhodné javy, z nich vytvoriť množinu všetkých možných výsledkov pokusu

$$\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}.$$

Presnejšie: Nech množina $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$ je neprázdna, aspoň dvojprvková. Jej prvky sú **elementárne javy**, **náhodný jav** je ľubovoľná podmnožina množiny Ω.

Základné vzťahy medzi javmi a operácie s nimi

a) Množina Ω predstavuje jav, ktorý nastane vždy po vykonaní pokusu, volá sa **istý jav** a označuje sa I. t.j. $I = \Omega$ (Obr. 2.1 *a*) .

b) Prázdna podmnožina množiny Ω reprezentuje **nemožný jav**. Je to jav, ktorý po vykonaní pokusu nikdy nenastane, označuje sa ϕ (Obr. 2.1 *b*).

c) **Jav *A* je časťou javu *B***, ak s nastaním javu A nastane vždy aj jav B, čo označujeme $A \subset B$ (Obr. 2.1 *c*). Pre reláciu $\subset$ platia vzťahy:

   $A \subset A$; $A \subset I$; $\phi \subset A$; $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

d) **Javy *A, B* sa rovnajú (sú rovnocenné)**, ak platí $A \subset B$ a súčasne $B \subset A$, čo označujeme $A = B$ (Obr. 2.1 *d*).

e) **Jav $\bar{A}$ je opačný jav k javu *A***, ak jav $\bar{A}$ nastane práve vtedy, keď nenastane jav A (Obr. 2.1 *e*).

f) **Jav *C***, pri ktorom súčasne nastane jav A aj B nazývame **prienik (súčin) javov *A, B*** a označujeme $C = A \cap B$ (Obr. 2.1 f).

g) **Jav *C*,** pri ktorom nastane aspoň jeden z javov A alebo B, **nazývame zjednotenie (súčet) javov *A, B*** a označujeme $C = A \cup B$ (Obr. 2.1*g*).

h) **Jav *C* je rozdiel javov *A* a *B*** (v tomto poradí) a nastane práve vtedy, keď nastane jav A a zároveň nenastane B, čo označujeme $C = A - B$ (Obr. 2.1 *h*).

i) **Javy *A, B* sú disjunktné (nezlučiteľné),** ak ich súčasné nastanie nie je možné, t.j. $A \cap B = \phi$ (Obr. 2.1 *i*).

j) Skupina javov $A_1, A_2, ..., A_n$ tvorí **úplný systém javov**, ak $A_i \cap A_j = \phi$, pre $i \neq j$, $i, j = 1,2,...,n$ a ak platí $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

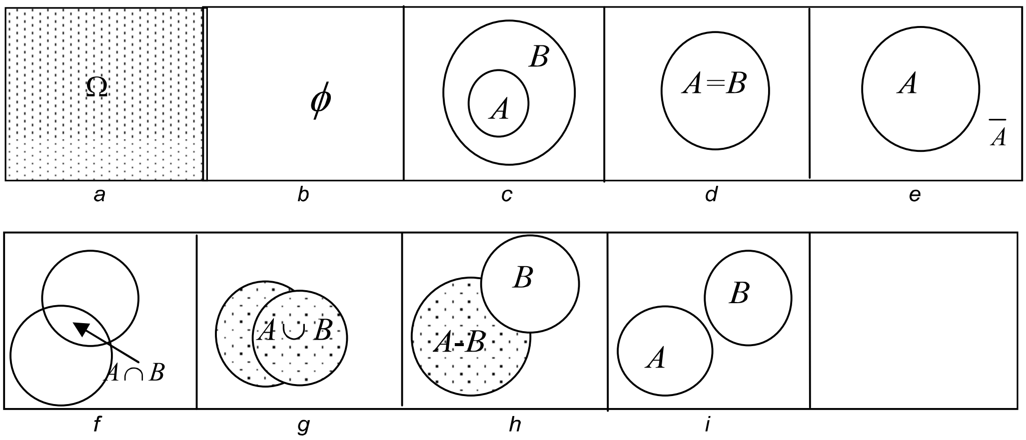
k) Jav *A* je **zložený jav**, ak sa dá vyjadriť ako zjednotenie aspoň dvoch javov, rôznych od nemožného javu a samotného javu *A*.

l) **Elementárny jav** $E \neq \phi$ má vlastnosti:

- Neexistuje taký jav $B \neq \phi$, pre ktorý by platilo $B \subset E$.
- Rôzne elementárne javy sú vždy disjunktné.
- Každý zložený jav sa dá vyjadriť ako zjednotenie elementárnych javov.
- Ku každému zloženému javu *B* existuje elementárny jav *E* tak, že $E \subset B$.

Poznámka 2.1

Vidíme, že s javmi pracujeme ako s množinami, môžeme ich znázorňovať Vennovými diagramami ako na Obr. 2.1



Obr. 2.1 Znázornenie náhodných javov pomocou Vennových diagramov

Príklad 2.1

Hádžeme hracou kockou. Nech jav A je padnutie párneho počtu bodov, jav B padnutie 2 alebo 4 alebo 6 bodov, jav C padnutie 2 bodov, jav D padnutie najviac 3 bodov, jav F padnutie viac ako 6 bodov. Potom vzťahy medzi javmi môžeme vyjadriť takto:

- $C \subset D$, $A = B$
- $\overline{D}$ - jav, že padnú aspoň 4 body
- F - nemožný jav
- $A \cap D = C$
- $B - C$ - jav, že padnú 4 body alebo padne 6 bodov
- $\overline{(A \cup D)}$ - jav, že padne 5 bodov.

2.3 Pravdepodobnosť a jej vlastnosti

Zatiaľ sme sa zaoberali len vzťahmi medzi náhodnými javmi. Náhodné javy majú aj inú objektívnu vlastnosť. Pri mnohonásobnom opakovaní náhodného pokusu môžeme pozorovať isté pravidelnosti, zákonitosti. Napríklad, niektoré javy nastávajú častejšie ako iné. Skúmaním zákonitostí pri pôsobení náhody sa zaoberá teória **pravdepodobnosti**. Každý náhodný jav môžeme kvantitatívne (číselne) ohodnotiť, priradiť mu číslo, ktoré bude vyjadrovať mieru možnosti, že tento jav nastane. Toto číslo sa nazýva **pravdepodobnosť javu *A***, označujeme ho *P(A)* a v ďalšom tento pojem zavedieme presnejšie.

Z historického hľadiska išiel vývoj od **štatistickej pravdepodobnosti** (založenej na mnohonásobnom opakovaní pokusov), cez **klasickú pravdepodobnosť** (založenej na kombinatorike), cez **geometrickú pravdepodobnosť** až po **axiomatickú pravdepodobnosť.** Dnešná podoba axiomatickej pravdepodobnosti pochádza od A.N. Kolmogorova (1934) .

Klasická definícia pravdepodobnosti

Je vybudovaná na tom, že množina elementárnych javov $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ je konečná. Ku každému elementárnemu výsledku priradíme číslo $P(E_i)$, vyjadrujúce šancu – pravdepodobnosť, že tento výsledok nastane.

Pravdepodobnosťou na množine Ω nazývame každú nezápornú funkciu P, pre ktorú platí $P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n) = 1$.

Navyše, nech všetky elementárne javy sú rovnako možné, t.j. $P(E_i) = \frac{1}{n}$, pre všetky elementárne javy. Nech jav $A \subset \Omega$ je tvorený m elementárnymi javmi z množiny Ω. Potom **pravdepodobnosť javu *A* je číslo $P(A)$, definované podielom**

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad \left(\frac{\textit{priaznivé prípady pre nastúpenie javu } A}{\textit{všetky možné prípady}} \right).$$

Poznámka 2.2

Číslo $100 \,.\, P(A)$ je pravdepodobnosť javu A vyjadrená v percentách. Tento spôsob vyjadrovania pravdepodobnosti je najčastejší v bežných praktických úlohách.

Príklad 2.2

V trojdetnej rodine, kde narodenie chlapca i dievčaťa bolo rovnako pravdepodobné, určite pravdepodobnosť nasledujúcich javov:

- A - deti sa narodili v poradí $CHDCH$ alebo $CHCHD$
- B - v rodine majú aspoň 2 dievčatá
- C - v rodine majú všetky deti rovnakého pohlavia
- D - nemajú žiadne dievča
- E - majú aspoň jedného chlapca
- F - majú najviac jedného chlapca.

Všetky možnosti ako sa mohli 3 deti narodiť tvoria množinu elementárnych javov $\Omega = \{CHCHCH, CHCHD, CHDCH, DCHCH, CHDD, DDCH, DCHD, DDD\}$, ktorá má 8 prvkov. Pravdepodobnosť každého elementárneho javu z Ω je určená napríklad takto: Zo 100 manželských párov sa polovici narodí *CH* a polovici *D*. Z tých, čo už majú *CH* ako prvé dieťa, sa polovici narodí *D* a polovici *CH*. A nakoniec, z tých , čo majú už *CHD* sa zas polovici narodí *CH*. Preto podiel rodín, ktoré majú deti v poradí *CHDCH* je $\frac{1}{2} z \left(\frac{1}{2} z \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Toto číslo dostaneme pre každý elementárny jav z Ω, t.j. všetky elementárne javy sú rovnako možné. Určíme, ktoré elementárne javy tvoria javy *A*-*F* a ich pravdepodobnosti:

$$A = \{CHDCH, CHCHD\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8} = 0{,}25,$$

$$B = \{DDCH, DCHD, CHDD, DDD\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = 0{,}5,$$

$$C = \{DDD, CHCHCH\} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = 0{,}125,$$

$$D = \{CHCHCH\} \Rightarrow P(D) = \frac{1}{8} = 0{,}125,$$

$$E = \{CHDD, DCHD, DDCH, CHCHD, CHDCH, DCHCH, CHCHCH\}$$
$$\Rightarrow P(E) = \frac{7}{8},$$

$$F = \{DDD, DDCH, DCHD, CHDD\} \Rightarrow P(F) = \frac{4}{8} = 0{,}5.$$

Príklad 2. 3

Pri riešení predchádzajúceho príkladu môžeme rozmýšľať aj takto: vytvárame usporiadané trojice prvkov *XXX*, kde na každom mieste môže byť *CH* alebo *D* (s rovnakou šancou), všetkých možností je $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (variácie s opakovaním), pre jav *A* sú vyhovujúce len dve možnosti *CHDCH, CHCHD.* Preto $P(A) = \frac{2}{8} = 0{,}25$, atď.

Štatistická pravdepodobnosť a relatívna početnosť

Vychádzame z veľkého počtu nezávislých pokusov (t.j. výsledok jedného pokusu neovplyvní výsledok nasledujúceho pokusu), vykonaných v rovnakých podmienkach a sledujeme, koľkokrát nastal jav *A*. Ak v jednej sérii *n* pokusov nastal daný jav práve *m*-krát, tak číslo

$$f = \frac{m}{n}, \quad 0 \le m \le n \tag{2.1}$$

nazývame **relatívna početnosť javu *A***.

Ak postupne zvyšujeme počet pokusov v jednotlivých sériách, dostaneme postupnosť relatívnych početností $f_1, f_2, f_3, \ldots$ a pri veľkom počte pokusov zistíme, že sa tieto relatívne početnosti od seba málo odlišujú, vykazujú istú stabilitu. Prídeme k záveru, že existuje konštanta, okolo ktorej relatívne početnosti kolíšu. Preto **pravdepodobnosť javu *A*, ozn. *P(A)* je číslo**

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}, \tag{2.2}$$

kde $\frac{m}{n}$ je relatívna početnosť javu *A*.

Najznámejšie odôvodnenie tejto vlastnosti pochádza od J. Bernoulliho ako jeden tvar **zákona veľkých čísiel.** Hovorí, že pravdepodobnosť toho, že sa relatívna početnosť javu *A* líši od pravdepodobnosti javu *A* o ľubovoľne malé $\varepsilon > 0$, je rovná 1, ak je počet pokusov nekonečne veľký, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad \text{kde } P(A) = p. \tag{2.3}$$

To nás oprávňuje pre veľké *n* nahradiť pravdepodobnosť relatívnou početnosťou, t.j.

$$P(A) \doteq \frac{m}{n}. \tag{2.4}$$

Príklad 2.4

Pri opakovanom hode kockou zisťujeme, či kocka nie je falošná. Sledujeme, aká je pravdepodobnosť, že padne napr. jednotka. Výsledky z 5 sérií pokusov sú v Tab. 2.1.

Tab. 2.1 Výsledky pokusov pri hode kockou

Počet hodov	Počet padnutí jednotky	Relatívna početnosť
50	5	0,1
100	13	0,13
500	88	0,176
1000	159	0,159
5000	822	0,1644

Pri hode kockou je $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, ale len jeden elementárny jav je priaznivý výsledok. Preto $P(A) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$, čo približne zodpovedá relatívnym početnostiam pri 1000 a 5000 pokusoch.

Príklad 2.5

Aby sme mohli príklad s 3 deťmi v rodine vyriešiť štatistickým prístupom, potrebovali by sme zozbierať údaje napr. z 10000 trojdetných rodín a zistiť, v koľkých rodinách sa narodili deti v poradí *CHDCH* alebo v poradí *CHCHD*, označme tento počet m. Pravdepodobnosť javu A odhadneme pomocou relatívnej početnosti $P(A) = \frac{m}{10000}$.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Nech Ω je množina (interval, rovinný útvar, priestorové teleso) a $G \subset \Omega$, pričom vieme vypočítať dĺžku (obsah, objem) množín G, Ω. Zistime, aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod množiny Ω padne aj do G ? **Pravdepodobnosť** tohto javu definujeme prirodzeným spôsobom ako **podiel mier útvarov**

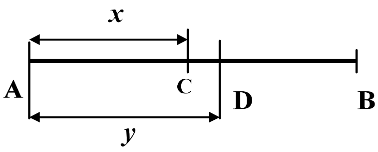
$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}, \qquad (2.5)$$

kde $\mu(G) \geq 0$, $\mu(\Omega) > 0$ sú miery (dĺžka, obsah, objem) útvarov.

Použitie tejto definície je vhodné, ak množiny Ω, G majú nekonečne veľa prvkov, ale pravdepodobnosť zvolenia každého bodu v Ω je rovnaká.

Príklad 2.6

Na úsečke AB s dĺžkou 1 sú náhodne zvolené 2 body C,D. Aká je pravdepodobnosť toho, že bod C leží bližšie k bodu D ako k bodu A?

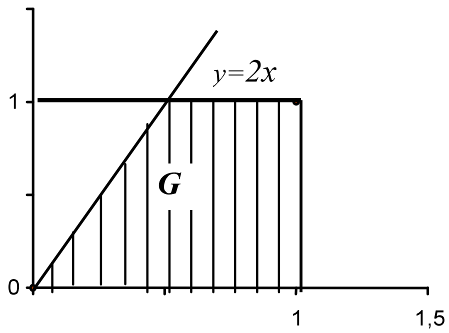


Obr. 2.2 Geometrické znázornenie príkladu

Označíme v súlade s Obr. 2.2 $|AC| = x$, $|AD| = y$. Vždy musí platiť $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Ak tieto všetky možné voľby x a y znázorníme ako body $[x, y]$v rovine, tak štvorec $\langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$ na Obr. 2.3 predstavuje množinu Ω všetkých možných volieb bodov C,D na úsečke. Obsah tohto štvorca je $\mu(\Omega) = 1$. Bod C leží bližšie k bodu D ako k bodu A, ak platí $|y - x| < x$. Oborom pravdivosti tejto nerovnice bude časť Ω a predstavuje množinu G priaznivých výsledkov úlohy. Vyriešime túto nerovnicu a jej riešenie znázornime graficky v rovine:

1. $(y - x \ge 0) \wedge (y - x < x) \quad \Rightarrow (y \ge x) \wedge (y < 2x)$

alebo 2. $(y - x < 0) \wedge (-y + x < x) \Rightarrow (y < x) \wedge (y > 0)$



Obr. 2. 3 Grafické riešenie príkladu

Obsah vyšrafovanej oblasti je $\mu(G)=\frac{3}{4}$. Preto pravdepodobnosť toho, že bod C leží bližšie k bodu D ako k bodu A je $P(A)=\frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}=\frac{3}{4}=0{,}75$.

Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Klasický a geometrický prístup v predchádzajúcich článkoch dávajú návod ako vypočítať pravdepodobnosť javu aj bez uskutočnenia náhodného pokusu, štatistický prístup umožňuje vypočítať pravdepodobnosť javu až po vykonaní veľkého počtu pokusov. Teoretickým zovšeobecnením týchto definícií je axiomatická definícia, ktorá však nedáva priamo návod na výpočet pravdepodobnosti javu.

Nech Ω je ľubovoľná, aspoň dvojprvková množina a S je neprázdna množina, obsahujúca podmnožiny množiny Ω. Nech S spĺňa tieto podmienky:

$S1$: ak $A \in S$, potom aj jej doplnok v Ω je prvkom S, t.j. $\overline{A} \in S$,

$S2$: ak $A_n \in S$, tak aj $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) \in S$, pre $\forall n \in N$.

Každú funkciu *P*, ktorá je definovaná na množine S, s hodnotami v množine reálnych čísel, t.j. $P: S \to \mathrm{R}$ a ktorá má vlastnosti :

A1: každému javu $A \in S$ je priradené nezáporné číslo $P(A)$,

A2: $P(\Omega) = 1$,

A3: ak $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ sú disjunktné množiny z S, pre každú rôznu dvojicu množín, potom

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots \qquad (2.6)$$

voláme **pravdepodobnosť**. Prvky množiny S voláme **náhodné javy,** číslo $P(A)$ voláme **pravdepodobnosť javu *A*** a usporiadanú trojicu (Ω, S, P) voláme **pravdepodobnostný priestor**.

Priamo z tejto definície vyplýva, že ak náhodný jav je zložený z niekoľkých elementárnych javov, potom pravdepodobnosť jeho nastatia je súčet pravdepodobností jednotlivých elementárnych javov, lebo elementárne javy sú disjunktné a možno použiť axiómu *A3*. Napríklad, ak $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, potom

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3).$$

Príklad 2.7

Aká je pravdepodobnosť, že na kocke padne číslo väčšie alebo rovné štyrom? Tento jav A pozostáva z troch elementárnych javov (padne štvorka, padne päťka, padne šestka), ktoré sú samozrejme disjunktné a pravdepodobnosť nastatia každej z nich je $1/6$. Preto $P(A) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$.

Pre ľubovoľné $A \in S, B \in S$ platia tvrdenia:

a) $P(\phi) = 0$ (2.7)

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (2.8)

c) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (2.9)

d) $0 \leq P(A) \leq 1$ (2.10)

Dôkaz Pri nasledujúcich dôkazoch stačí daný jav zapísať ako zjednotenie disjunktných javov a použiť axiómu *A3*.

- $I \cup \phi = I,\ I \cap \phi = \phi$. Podľa $A3$: $P(I) = P(I \cup \phi) = P(I) + P(\phi)$.
  Podľa $A2$: $1 = 1 + P(\phi)$. Preto $0 = P(\phi)$.
- $A \cup \overline{A} = I$ a $A \cap \overline{A} = \phi$. $P(A \cup \overline{A}) = P(I)$, $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Ak $A \subset B$ potom $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ a $A \cap (\overline{A} \cap B) = \phi$. Podľa $A3$:
  $P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$, kde $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$. Preto $P(A) \leq P(B)$.
- $\phi \subset A \subset I$, podľa c) platí $P(\phi) \leq P(A) \leq P(I)$, t.j. $0 \leq P(A) \leq 1$.

Ďalšie vlastnosti pravdepodobnosti:

e) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ (2.11)

Dôkaz Jav $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ a $(A-B)\cap(A\cap B)=\phi$. Podľa *A3* platí $P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$. Potom $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

f) **Veta o pravdepodobnosti zjednotenia javov** Ak javy A,B nie sú disjunktné, nedá sa aplikovať axióma *A3* z axiomatickej definície. V tomto prípade platí

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \tag{2.12}$$

Dôkaz $A\cup B=A\cup(B-A)$ a $A\cap(B-A)=\phi$. Podľa *A3* a výsledku (2.11)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

g) Zovšeobecnením tejto vlastnosti dostaneme:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}P(A_i\cap A_j)+\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\dots$$

$$\dots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)\,. \tag{2.13}$$

Poznámka 2.3

Pravdepodobnosť, že nastane aspoň jeden z javov A,B,C je

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+$$
$$+P(A\cap B\cap C).$$

h) **Podmienená pravdepodobnosť** Pravdepodobnosť nastatia náhodného javu je ovplyvnená aj tým, či nastal iný náhodný jav. Napríklad pravdepodobnosť, že športovec je basketbalista je iná v prípade, že má výšku 210 cm a iná v prípade, keď má výšku 160 cm. Alebo pravdepodobnosť, že sa učiteľ školy stane jej riaditeľom je iná v prípade, že je muž a iná, ak je to žena. Hovoríme o **podmienenej pravdepodobnosti javu *A* za podmienky, že nastal jav *B***, čo označujeme $P(A/B)$. Je definovaná vzťahom

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ \text{kde}\ P(B)>0. \tag{2.14}$$

Poznámka 2.4

Ak Ω obsahuje len konečný počet prvkov, dá sa táto vlastnosť dokázať, ak nie, treba ju brať ako definíciu (axiómu $A4$).

Na jednoduchom príklade objasníme pôvod tejto definície.

V telocvični je 50 športovcov, 30 z nich má nad 200 cm a z nich je 20 basketbalistov. Náhodne sme vybrali športovca, ktorý mal nad 200 cm. Aká je pravdepodobnosť, že je to basketbalista?

Označíme jav B – športovec je basketbalista, jav V – je vysoký nad 200 cm. Zaujíma nás pravdepodobnosť $P(B/V)$. Všetkých vysokých nad 200 cm je 30, priaznivé výsledky predstavujú tí z tejto skupiny, ktorí sú basketbalisti, tých je 20. Preto $P(B/V)=\frac{20}{30}$. Upravíme toto číslo do tvaru $P(B/V)=\frac{20/50}{30/50}$. Číslo v čitateli je $P(B\cap V)$, v menovateli $P(V)$. Odtiaľ

$$P(B/V)=\frac{P(B\cap V)}{P(V)}. \tag{2.15}$$

i) **Veta o pravdepodobnosti prieniku (súčinu) javov** Pravdepodobnosť, že javy A,B nastanú súčasne je

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B) \tag{2.16}$$

alebo
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\ . \tag{2.17}$$

Je to jednoduchý dôsledok predchádzajúcej definície podmienenej pravdepodobnosti.

j) Jej zovšeobecnením je táto vlastnosť:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1\cap A_2)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}) \tag{2.18}$$

k) **Nezávislosť javov** Ak jav A nezávisí od toho, či nastane jav B, hovoríme, že javy A, B sú **nezávislé** a platí

$$P(A/B) = P(A), \text{ kde } P(A) > 0 \text{ a } P(B) > 0. \tag{2.19}$$

Pomocou podmienenej pravdepodobnosti sa dá dokázať, že javy A, B sú **nezávislé** práve vtedy, keď $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Ak sú javy nezávislé, podstatne sa zjednoduší výpočet pravdepodobnosti prieniku javov:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \tag{2.20}$$

Príklad 2.8

V trojdetných (Príklad 2.2) rodinách máme zistiť pravdepodobnosť javu A, že sa deti narodia v poradí *CHDCH* alebo *CHCHD*, pričom sme predpokladali, že pravdepodobnosť narodenia chlapca aj dievčaťa sú rovnaké, bez ohľadu na pohlavie predchádzajúcich súrodencov. $P(CH) = 0{,}5$ je pravdepodobnosť narodenia chlapca, $P(A) = 0{,}5$ je pravdepodobnosť narodenia dievčaťa.

Jav A sa dá vyjadriť ako zjednotenie dvoch disjunktných javov $A_1 \cup A_2$, kde A_1 je jav, že sa deti narodia v poradí *CHDCH* a A_2 je jav, že sa narodia v poradí *CHCHD.* Preto

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Jav A_1 je prienik (súčin) troch nezávislých javov, preto

$P(A_1) = P(CH) \cdot P(D) \cdot P(CH) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$,

$P(A_2) = P(CH) \cdot P(CH) \cdot P(A) = 0{,}125$.

Nakoniec $P(A) = 0{,}125 + 0{,}125 = 0{,}25$.

l) **Veta o úplnej pravdepodobnosti** Nech javy $H_1, H_2, ..., H_n$ tvoria úplný systém javov. Potom platí

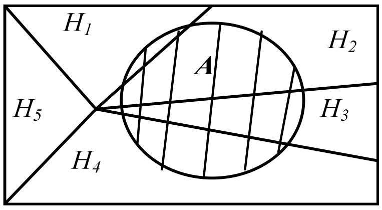
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i). \tag{2.21}$$

Dôkaz Jav A je zjednotenie disjunktných javov (Obr. 2.4)

$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n)$, preto

$$P(A) = P(A \cap H_1) + \ldots + P(A \cap H_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$



Obr. 2.4 Veta o úplnej pravdepodobnosti

m) **Bayesova veta** Nech javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tvoria úplný systém javov. Potom platí

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(A)}. \tag{2.22}$$

Dôkaz Vyplýva z definície podmienenej pravdepodobnosti.

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(A)}.$$

Príklad 2.9

Pravdepodobnosť, že vodičom auta je muž, je 0,65. Pravdepodobnosť, že vodič - muž spôsobí dopravnú nehodu je 0,033 a pravdepodobnosť, že vodič - žena spôsobí dopravnú nehodu je 0,030. Na ceste sa stala dopravná nehoda. Aká je pravdepodobnosť, že nehodu spôsobila žena?

Označme jav N - stane sa dopravná nehoda a pomenujme pravdepodobnosti z príkladu:

$P(M)=0{,}65$ je pravdepodobnosť, že vodič je muž,

$P(Z)=0{,}35$ je pravdepodobnosť, že vodič je žena,

$P(N/Z)=0{,}03$ je pravdepodobnosť, že nehodu spôsobí žena,

$P(N/M)=0{,}033$ je pravdepodobnosť, že nehodu spôsobí muž.

Zaujíma nás pravdepodobnosť, že spôsobenú nehodu urobila žena, čo je

$$P(Z/N)=\frac{P(Z)\cdot P(N/Z)}{P(N)}=\frac{0{,}35\cdot 0{,}03}{0{,}35\cdot 0{,}03+0{,}65\cdot 0{,}033}=0{,}3286\,,$$

kde pravdepodobnosť nehody $P(N)$ určíme pomocou vety o úplnej pravdepodobnosti.

n) **Bernoulliho schéma** Ak ten istý pokus, pri nezmenených podmienkach, opakujeme viackrát a výsledok jednotlivého pokusu je nezávislý od výsledkov predchádzajúcich pokusov, hovoríme o **opakovaných nezávislých pokusoch**. Príkladom je losovanie prvkov z nejakej množiny, kde prvky po pokuse vrátime späť.

Ak v každom pokuse nastane jav A s pravdepodobnosťou p, potom pravdepodobnosť toho, že v sérii n nezávislých pokusov nastane tento jav práve k-krát je

$$P_{k,n}=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k},\quad \text{kde } 0\le k\le n \quad \text{a} \quad q=1-p\,, \tag{2.23}$$

a kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ je počet možností ako rozmiestniť v usporiadanej n-tici k prvkov.

Príklad 2.10

Zmeňme v rodine z Príkladu 2.2 pravdepodobnosti narodenia chlapca a dievčaťa (len pre lepšiu názornosť, podstatu riešenia to nezmení) takto: $P(CH)=0{,}51$ a $P(D)=0{,}49$. Predpokladali sme, že pohlavie druhého a tretieho dieťaťa v rodine

nezávisí od pohlavia skôr narodených súrodencov. Vypočítajte pravdepodobnosť javu W, že medzi 3 súrodencami je práve jedno dievča.
Symbolicky zapíšeme jav $W = (DCHCH) \cup (CHDCH) \cup (CHCHD)$, čo sú navzájom disjunktné javy a narodenie CH a D sú nezávislé.
Preto $P(W) = 0{,}49 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}51 + 0{,}51 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51 + 0{,}51 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49 = 3.(0{,}49)^1 \cdot (0{,}51)^2$.

Alebo $P_{2,3} = \binom{3}{2} \cdot (0{,}49)^1 \cdot (0{,}51)^2$.

o) Ak v tejto sérii pokusov výsledok každého pokusu závisí od výsledkov predchádzajúcich pokusov, hovoríme o **opakovaných závislých pokusoch.** Príkladom sú výbery prvkov z nejakej množiny, kde prvky po pokuse nevrátime späť.

p) Nech je daných N prvkov, z ktorých K prvkov má danú vlastnosť $(0 < K < N)$. Zo všetkých N prvkov vyberieme n prvkov $(0 < n < N)$. Potom pravdepodobnosť toho, že v tomto výbere má danú vlastnosť práve k prvkov je

$$P(A) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ kde } 0 < K < N,\ 0 < n < N,\ 0 \le k \le \min\{K, n\}. \qquad (2.24)$$

Dôkaz Počet všetkých možností ako vybrať n prvkov z N prvkov je $\binom{N}{n}$, čo sú kombinácie bez opakovania. Priaznivé výsledky tvoria tie výbery, ktoré obsahujú k prvkov s danou vlastnosťou, zvyšných n-k prvkov nemá danú vlastnosť. Z K prvkov (nositeľov vlastnosti) sa k prvkov dá vybrať $\binom{K}{k}$ spôsobmi, zvyšných *n-k* prvkov sa z *N–K* prvkov (nemajú danú vlastnosť) dá vybrať $\binom{N-K}{n-k}$ spôsobmi. Preto $P(A)=\dfrac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Príklady na precvičenie

2.11 Čo padne častejšie ako súčet na dvoch kockách , číslo 9 alebo 10? Ako je to na troch kockách?

2.12 V jednom úrade pracuje 7 žien a 3 muži. Je nutné znížiť stav zamestnancov o troch. Určite pravdepodobnosť toho, že pri náhodnom výbere budú prepustení 2 muži.

2.13 Na 6 lístkoch sú napísané písmená a zostavené slovo KARATE. Malé dieťa zostavilo z nich slovo RAKETA. Vie toto dieťa čítať?

2.14 V autobuse sa rozprávajú študenti o tom, ako bolo dnes na skúškach.
„Koľkí dnes boli?“
„ Dnes ôsmi na matike a štyria na fyzike .“
„ Koľkí urobili?“
„ Piati z matiky a traja z fyziky.“
„ A čo Eva?“
„ Eva urobila“.
Rozhodnite, na akej skúške bola Eva .

2.15 V antikvariáte sa cena knihy znižuje, ak má vytrhnutú aspoň jednu stranu, alebo sú jej strany popísané. Kníh, ktoré majú vytrhnuté strany je 20%, kníh, ktoré sú popísané poznámkami je 30% a kníh bez chyby je 70%. Určite, aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná kniha je popísaná, ale má všetky strany!

2.16 Čo je pravdepodobnejšie, vyhrať v hre s rovnocenným partnerom 3 partie zo 4 alebo 5 z 8 (remíza sa nepripúšťa)?

2.17 Dve lode musia vyložiť náklad v tom istom prístavisku. Príchody oboch lodí sú nezávislé a rovnako možné v priebehu celého dňa. Určite pravdepodobnosť toho, že niektorá z lodí bude musieť čakať na uvoľnenie prístaviska, ak jednu z lodí vykladajú 1 hodinu, druhú 2 hodiny.

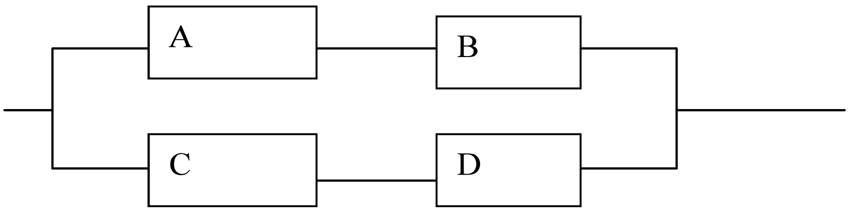
2.18 Test sa skladá z 15 otázok, za každou je ponúknutých 6 možných odpovedí, z ktorých je len jedna správna. Aby študent urobil skúšku, je potrebné zaškrtnúť aspoň 10 správnych odpovedí. Aká je pravdepodobnosť, že študent skúšku urobí, ak

a) odpovede zaškrtáva úplne náhodne,

b) v každej otázke vie vždy vylúčiť 3 zlé odpovede, ale zo zvyšných troch si musí tipovať,

c) je tak pripravený na skúšku, že na 5 otázok pozná správnu odpoveď, ale na zvyšných 10 otázok si musí odpovede tipovať.

2.19 Pre sériovo - paralelnú sústavu na obrázku sú dané pravdepodobnosti bezporuchovej činnosti pre jednotlivé komponenty A, B, C, D postupne $p_1 = 0{,}85$, $p_2 = 0{,}91$, $p_3 = 0{,}89$, $p_4 = 0{,}95$. Určite pravdepodobnosť bezporuchovej činnosti celej sústavy.



2.20 Pravdepodobnosť, že súčasná hospodárska depresia bude pokračovať aj na budúci rok, sa na základe odhadov ekonómov rovná 0,1. K miernemu oživeniu dôjde s pravdepodobnosťou 0,2, k výraznému oživeniu s 0,5 a k prudkému hospodárskemu rastu s pravdepodobnosťou 0,2. Pravdepodobnosť, že zisk firmy presiahne 5 miliónov korún je podľa podnikových manažérov v prvom prípade 0,05, v druhom 0,2, v treťom 0,7, vo štvrtom 0,95. Môže mať firma pri týchto podmienkach zisk väčší ako 5 miliónov ?

2.21 Nech jav A nastane v jednom pokuse s pravdepodobnosťou p. Minimálne koľko nezávislých pokusov treba uskutočniť, aby tento jav v nich nastal aspoň raz s pravdepodobnosťou P? Odvoďte vzťah!

2.22 Autobus prichádza na zastávku každé 4 minúty a električka (ktorej zastávka je vedľa autobusovej) každých 6 minút. Aká je pravdepodobnosť, že sa cestujúci dočká autobusu pred električkou.

2.23 V lotérii je n lósov, z ktorých m vyhráva. Niekto si kúpil k lósov. Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá?