6 TESTOVANIE ŠTATISTICKÝCH HYPOTÉZ

6.1 Všeobecné princípy testovania štatistických hypotéz

Vo vedeckom výskume sa problémy často formulujú v tvare hypotéz, ktorých platnosť treba zamietnuť alebo nezamietnuť. Štatistická hypotéza je tvrdenie, ktoré sa týka rozdelenia pravdepodobnosti pozorovaného znaku, prípadne jeho parametrov. Overovanie správnosti týchto tvrdení sa nazýva testovanie štatistických hypotéz. Pri testovaní kladieme oproti sebe dve navzájom si odporujúce hypotézy. Hypotézu, ktorej platnosť overujeme, nazývame testovanou alebo nulovou hypotézou. Budeme ju označovať symbolom H_0. Oproti testovanej hypotéze kladieme tzv. alternatívnu hypotézu, ktorú budeme označovať H_1.

Príklad 6.1 Majme dva štatistické súbory. Nech pozorovaný znak X má na prvom súbore normálne rozdelenie $N(\mu_0, \sigma^2)$ a na druhom súbore rozdelenie $N(\mu_1, \sigma^2)$, pričom $\mu_0 \neq \mu_1$. Parametre týchto dvoch súborov sú známe. Predpokladajme, že máme namerané hodnoty znaku X, hodnoty $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Uvedené hodnoty predstavujú realizáciu náhodného výberu z jedného z týchto dvoch základných súborov, pričom nevieme z ktorého. Preto budeme testovať hypotézu, že náhodný výber pochádza z prvého súboru oproti alternatívnej hypotéze, že výber pochádza z druhého súboru. Testovaný problém budeme zapisovať takto:

$$H_0 :\ \mu = \mu_0 \qquad \text{oproti} \qquad H_1 :\ \mu = \mu_1 .$$

V predchádzajúcom príklade sme testovali tzv. jednoduchú hypotézu H_0 (testovaný parameter μ v prípade platnosti hypotézy H_0 mohol nadobúdať len jednu hodnotu, a to hodnotu μ_0) oproti jednoduchej alternatívnej hypotéze H_1. Štatistické hypotézy môžu byť aj zložené. Uvedieme príklad.

Príklad 6.2 Testujeme hypotézu, že náhodný výber pochádza z rozdelenia $N(\mu_0, \sigma^2)$, kde μ_0 a σ^2 sú známe parametre. Oproti tejto hypotéze kladieme hypotézu, že výber pochádza z normálneho rozdelenia s inou strednou hodnotou, pričom rozptyl je opäť σ^2. Testovaný problém môžeme zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$H_0:\ \mu = \mu_0 \qquad \text{oproti} \qquad H_1:\ \mu \neq \mu_0 .$$

V príklade 6.2 išlo o test jednoduchej nulovej hypotézy oproti zloženej alternatívnej hypotéze. Uvedená zložená alternatívna hypotéza je tzv. dvojstranná. Zložená hypotéza môže byť aj jednostranná, a to ľavostranná resp. pravostranná:

$$H_1: \mu < \mu_0 \quad \text{resp.} \quad H_1: \mu > \mu_0 .$$

Voľba alternatívnej hypotézy závisí od konkrétnej situácie.

Na testovanie hypotézy H_0 oproti hypotéze H_1 použijeme vhodné testovacie kritérium (tzv. testovaciu štatistiku) $g = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Množinu hodnôt, ktoré môže testovacia štatistika nadobúdať, rozdelíme na dve disjunktné oblasti, na tzv. *kritický obor* a *doplnkový obor*. Kritický obor je oblasťou zamietnutia testovanej hypotézy. Budeme ho označovať symbolom W_α. Doplnkový obor je oblasťou nezamietania testovanej hypotézy. O správnosti testovanej hypotézy rozhodujeme na základe realizácie náhodného výberu, t.j. na základe nameraných hodnôt $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Z týchto hodnôt vypočítame hodnotu testovacej štatistiky g. Ak hodnota testovacej štatistiky $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ padne do kritickej oblasti W_α, zamietame testovanú hypotézu H_0 a za správnu prijímame alternatívnu hypotézu H_1. Ak hodnota testovacej štatistiky g padne do doplnkovej oblasti, tak nulovú hypotézu H_0 nemôžeme zamietnuť.

Pri každom testovacom postupe sa môžeme dopustiť dvoch druhov chýb. Môže sa stať, že hypotéza H_0 je správna, ale vplyvom náhody hodnota testovacej štatistiky padne do W_α. (Situácia je analogická s jablkom, ktoré sa zakotúľalo ďaleko od stromu a omylom je považované za jablko zo susedného stromu.) Podľa vopred stanoveného testovacieho postupu zamietneme hypotézu H_0, čím sa dopustíme tzv. *chyby 1. druhu*. Pravdepodobnosť chyby prvého druhu nazývame aj *hladinou významnosti testu* a označujeme písmenom α. Teda

$$\alpha = P(g \in W_\alpha / H_0) .$$

α je teda pravdepodobnosť nesprávneho zamietnutia testovanej hypotézy. Zjednodušene to môžeme interpretovať tak, že v $100 \cdot \alpha$ % prípadov zamietame hypotézu H_0, hoci je správna.

Vplyvom náhody sa môže stať, že aj keď je správna hypotéza H_1, hodnota $g \notin W_\alpha$. Na základe vopred stanoveného testovacieho postupu nezamietame hypotézu H_0, čím sa dopustíme tzv. *chyby 2. druhu*. Jej pravdepodobnosť označujeme β. Teda

$$\beta = P(g \notin W_\alpha / H_1).$$

1 - $\beta = P(g \in W_\alpha / H_1)$ je tzv. *sila testu*. Je to pravdepodobnosť, s akou test odhalí nesprávnu hypotézu.

Kritický obor musíme určiť tak, aby pravdepodobnosti oboch chýb boli čo najmenšie. Dá sa však ukázať, že zmenšením α narastie β a naopak. Preto vo väčšine testovacích postupov volíme takýto kompromis: zvolíme pravdepodobnosť chyby 1. druhu $\alpha \in (0, 1)$ a v triede testov, ktoré majú pravdepodobnosť chyby 1. druhu menšiu alebo rovnú α, hľadáme test s najmenšou pravdepodobnosťou chyby 2. druhu (teda pri danom α minimalizujeme β).

Testovací postup môžeme zhrnúť do nasledujúcich krokov:

a) Sformulujeme testovaný problém, čiže zvolíme nulovú a alternatívnu hypotézu.

b) Zvolíme hladinu významnosti α. Zvyčajne sa α volí rovné 0,05, prípadne 0,01.

c) Z nameraných údajov vypočítame hodnotu testovacieho kritéria. Aké testovacie kritérium treba použiť pre daný testovaný problém uvedieme v nasledujúcich kapitolách.

d) Určíme kritický obor W_α vyhľadaním príslušných kritických hodnôt v štatistických tabuľkách (kapitola č.12). Tvarmi kritických oborov pre jednotlivé testované problémy sa budeme zaoberať podrobne v nasledujúcich kapitolách.

e) Vyhodnotíme test nasledujúcim spôsobom:
Ak $g \in W_\alpha$, tak zamietame nulovú hypotézu H_0 na hladine významnosti α.
Ak $g \notin W_\alpha$, tak nulovú hypotézu H_0 nemôžeme zamietnuť.

Poznámka. Nezamietnutie nulovej hypotézy neznamená, že hypotéza H_0 je správna. Potrebovali by sme ešte mať zaručené, že aj β je dosť malé číslo. Prakticky sa však vo väčšine prípadov postupuje tak, že v prípade nezamietnutia hypotézy H_0 sa táto hypotéza považuje za správnu.

Testovacie metódy môžeme rozdeliť na *parametrické* a *neparametrické*. Použitie parametrických testov je viazané na určité predpoklady o rozdelení resp. o parametroch základných súborov (napríklad predpoklad o normálnom rozdelení, predpoklad o rovnakej variabilite). Ak nie sú splnené požadované predpoklady pre použitie parametrického testu, môžeme použiť niektorý z neparametrických testov. Použitie neparametrického testu nevyžaduje výpočet parametrov štatistického súboru ani znalosť funkcie rozdelenia základného súboru.

V ďalšom texte sa budeme zaoberať postupne testami hypotézy o normálnom rozdelení základného súboru a najpoužívanejšími parametrickými a neparametrickými testami.

6.2 Testy hypotézy o normálnom rozdelení základného súboru

Parametrické testy, ktorými sa budeme zaoberať v nasledujúcich kapitolách, je možné použiť len vtedy, ak je splnený predpoklad o normálnom rozdelení základného súboru. Tento predpoklad možno otestovať. Uvedieme najpoužívanejšie testy hypotézy o normálnom rozdelení základného súboru, ktorými sú test podľa Shapira-Wilka, D´Agostinov test a χ^2 - test dobrej zhody.

6.2.1 Test podľa Shapira-Wilka

Budeme testovať hypotézu H_0, že náhodný výber pochádza z normálneho rozdelenia. Test podľa Shapira-Wilka použijeme, ak pre rozsah n náhodného výberu platí $n \in \langle 7, 30 \rangle$. Nech $x_1, x_2, \cdots, x_n$ je realizácia náhodného výberu. Hodnoty $x_1, x_2, \cdots, x_n$ usporiadame podľa veľkosti. Dostaneme neklesajúcu postupnosť:

$$x_1^* \le x_2^* \le \cdots \le x_n^* .$$

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku W:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^{(n)} \left(x_{n-i+1}^* - x_i^* \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2},$$

kde $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $m = \frac{n}{2}$, ak n je párne, $m = \frac{n-1}{2}$, ak n je nepárne a koeficienty $a_i^{(n)}$ sú tabelované v tabuľke č. 12.19.

Ak $W \le W(n, \alpha)$, tak zamietame na hladine významnosti α testovanú hypotézu H_0 o normálnom rozdelení základného súboru. $W(n, \alpha)$ sú kritické hodnoty tohto testu. Sú tabelované pre dané n a $\alpha = 0{,}05$ resp. $\alpha = 0{,}01$ v tabuľke č. 12.18. Shapirov-Wilkov test bol Roystonom ([19]) rozšírený aj pre veľké rozsahy výberových súborov.

Príklad 6.3 Merala sa výška 14 desaťročných chlapcov. Boli namerané tieto hodnoty v cm: 136, 130, 151, 127, 133, 136, 139, 139, 141, 147, 139, 142, 140, 138. Aby sme mohli vyhodnotiť tieto údaje pomocou parametrických testovacích metód, treba najskôr testovať, či sa jedná o náhodný výber z normálneho rozdelenia.

Riešenie. Keďže $n \in \langle 7, 30 \rangle$, budeme testovať Shapirovým-Wilkovým testom. Namerané hodnoty usporiadame podľa veľkosti:
$x_1^* = 127$, $x_2^* = 130$, $x_3^* = 133$, $x_4^* = 136$, $x_5^* = 136$, $x_6^* = 138$, $x_7^* = 139$, $x_8^* = 139$, $x_9^* = 139$, $x_{10}^* = 140$, $x_{11}^* = 141$, $x_{12}^* = 142$, $x_{13}^* = 147$, $x_{14}^* = 151$.
$n = 14$, $m = 7$. Počítajme súčet:

$$\sum_{i=1}^{7} a_i^{(14)} \, (x_{14-i+1}^* - x_i^*) = 0{,}525 \cdot (151\text{-}127) + 0{,}332 \cdot (147\text{-}130) + 0{,}246 \cdot (142\text{-}133) +$$

$$+(141\text{-}136) + 0{,}124 \cdot (140\text{-}136) + 0{,}073 \cdot (139 - 138) + 0{,}024 \cdot (139 - 139) = 21{,}93$$

Koeficienty $a_i^{(14)}$ sme vyhľadali v tabuľke č. 12.19. Ďalej vypočítame

$$\bar{x} \doteq 138{,}4 \text{ a } \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 497{,}44.$$

Na záver vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$W = \frac{480{,}78}{497{,}44} \doteq 0{,}97.$$

V tabuľke č. 12.18 nájdeme ku zvolenej hladine významnosti $\alpha =$ $= 0{,}05$ a pre $n = 14$ kritickú hodnotu $W(n, 0{,}05) = 0{,}874$. Pretože hodnota testovacieho kritéria W je väčšia ako 0,874, testovanú hypotézu o normálnom rozdelení hodnôt pozorovaného znaku nemôžeme na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ zamietnuť. Rozdelenie hodnôt pozorovaného znaku budeme považovať za normálne.

Príklad 6.4 Skupina 7 detí trénovala beh na 50 m. V pretekoch deti dosiahli tieto výsledky v sekundách: 11,00; 9,73; 11,31; 13,89; 12,10; 10,31; 11,86. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujte, či namerané hodnoty môžeme považovať za realizáciu náhodného výberu z normálneho rozdelenia.

Riešenie. Testovať budeme opäť Shapirovým-Wilkovým testom (pre veľmi malý rozsah výberového súboru). Namerané hodnoty zoradíme podľa veľkosti:

$x_1^* = 9{,}73$; $x_2^* = 10{,}31$; $x_3^* = 11{,}00$; $x_4^* = 11{,}31$; $x_5^* = 11{,}86$; $x_6^* = 12{,}10$; $x_7^* = 13{,}89$.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^{(7)} (x_{7-i+1}^* - x_i^*) =$$

$$= 0{,}623 \cdot (13{,}89 - 9{,}73) + 0{,}303 \cdot (12{,}1 - 10{,}31) + 0{,}14 \cdot (11{,}86 - 11{,}00) \doteq 3{,}26$$

Koeficienty $a_i^{(7)}$ sme vyhľadali v tabuľke č. 12.19. Ďalej vypočítame

$$\bar{x} \doteq 11{,}46 \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 11{,}024.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria W:

$$W = \frac{10{,}60}{11{,}024} \doteq 0{,}96.$$

Ku zvolenej hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ a pre $n = 7$ nájdeme v tabuľke č. 12.18 kritickú hodnotu $W(7;\, 0{,}05) = 0{,}803$. Keďže hodnota testovacieho kritéria W je väčšia ako kritická hodnota 0,803, testovanú hypotézu o normálnom rozdelení hodnôt pozorovaného znaku nemôžeme na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ zamietnuť. Rozdelenie budeme považovať za normálne.

6.2.2 D´Agostinov test

Nech $x_1, x_2, .., x_n$ je realizácia náhodného výberu, pričom $30 \le n \le 100$. Hodnoty $x_1, x_2, .., x_n$ usporiadame do neklesajúcej postupnosti $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$. Testovacím kritériom hypotézy o normálnom rozdelení základného súboru je štatistika

$$D = \frac{\sqrt{n}\left(A - 0{,}2820948\right)}{0{,}029986}, \text{ kde}$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n+1}{2} - i\right)\left(x_{(n-i+1)} - x_{(i)}\right)}{\sqrt{n^3 \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}}.$$

m má rovnaký význam ako v Shapirovom-Wilkovom teste. Kritickým oborom je množina

$$W_\alpha = (0;\ D(n, \tfrac{\alpha}{2}))\ \cup (\,D(n, 1 - \tfrac{\alpha}{2});\infty\,),$$

kde $D(n, \frac{\alpha}{2})$ a $D(n, 1 - \frac{\alpha}{2})$ sú kritické hodnoty D´Agostinovho testu. Sú uvedené v tabuľke č. 12.14. Ak $D \in W_\alpha$, zamietame na hladine významnosti α testovanú hypotézu H_0 o normálnom rozdelení základného súboru.

6.2.3 χ^2 - test dobrej zhody

Nech ($X_1, X_2, ..., X_n$) je náhodný výber veľkého rozsahu (n > 100) zo spojitého rozdelenia s neznámou distribučnou funkciou F a nech $(x_1, x_2, ..., x_n)$ je jeho realizácia. Budeme testovať nulovú hypotézu

$H_0: F = F_0$ oproti alternatívnej hypotéze $H_1: F \neq F_0$,

kde F_0 je distribučná funkcia normálneho rozdelenia.

Postupujeme nasledujúcim spôsobom. Hodnoty $x_1, x_2, .., x_n$ roztriedime do r disjunktných intervalov $(-\infty, a_1), \langle a_1, a_2), ..., \langle a_{r-1}, \infty)$ a zistíme ich početnosti $f_1, f_2, ..., f_r$. Predpokladajme, že hypotéza H_0 platí. Potom $p_i = P(X \in \langle a_{i-1}, a_i)) = F_0(a_i) - F_0(a_{i-1})$ je očakávaná pravdepodobnosť, že nameraná hodnota znaku X padne do i – teho intervalu. Z n nameraných hodnôt znaku X by teda do i – teho intervalu malo teoreticky padnúť np_i hodnôt, $i = 1,2,...,r$. Predpokladajme, že $np_i \geq 5$, $i = 1,2,...,r$. Porovnáme empirické a očakávané početnosti.

Hypotézu H_0 zamietame, ak sú rozdiely $f_i - np_i$, $i = 1,2,...,r$, veľké. Vhodným testovacím kritériom je štatistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Štatistika χ^2 má za platnosti nulovej hypotézy H_0 rozdelenie $\chi^2(r - 1)$ pri $n \to \infty$ za predpokladu, že všetky parametre distribučnej funkcie F_0 sú známe. S každým odhadovaným parametrom distribučnej funkcie F_0 odčítame jeden stupeň voľnosti. Keďže pri testovaní hypotézy o normálnom rozdelení základného súboru odhadujeme parametre μ a σ^2, štatistika χ^2 bude mať rozdelenie $\chi^2(r - 3)$. Navyše, ak pre niektoré i nie je splnený predpoklad $np_i \geq 5$, odpočítame jeden stupeň voľnosti. Kritickým oborom je množina $W_\alpha = (\chi^2_\alpha(r-3), \infty)$. Testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak $\chi^2 \in W_\alpha$.

Na záver odvodíme výpočtový tvar testovacieho kritéria χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_i - n \cdot p_i)^2}{p_i \cdot n} = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i^2 - 2f_i \cdot n \cdot p_i + n^2 \cdot p_i^2}{n \cdot p_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i^2}{n \cdot p_i} + n\sum_{i=1}^{r} p_i -$$

$$-2\sum_{i=1}^{r} f_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i^2}{n \cdot p_i} + n - 2n = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i^2}{n \cdot p_i} - n\,.$$

Pri výpočte je výhodné použiť upravený tvar testovacieho kritéria χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i^2}{np_i} - n.$$

Príklad 6.5 Pre potreby konfekčného priemyslu sa zisťovala výška desaťročných dievčat. Výsledky výskumu sú uvedené v tabuľke 6.1. Treba overiť, či výška desaťročných dievčat má normálne rozdelenie.

Tabuľka 6.1.

Výška v cm	Počet dievčat
do 90	10
$\langle 90,100)$	35
$\langle 100,110)$	64
$\langle 110,120)$	254
$\langle 120,130)$	99
$\langle 130,140)$	63
$\langle 140,150)$	13
150 a viac	2

Riešenie. Z nameraných hodnôt vypočítame ich aritmetický priemer $\bar{x}$ a smerodajnú odchýlku s: $\bar{x} = 117$; $s = 1{,}96$; $n = 540$. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ budeme testovať hypotézu

$$H_0: F = F_0 \quad \text{oproti hypotéze} \quad H_1: F \neq F_0,$$

kde F_0 je distribučná funkcia normálneho rozdelenia N (117; 3,84). Budeme počítať pravdepodobnosti $p_1 = F_0(a_1)$, $p_i = P(X \in \langle a_{i-1}, a_i) / H_0) =$ $= F_0(a_i)$ - $F_0(a_{i-1})$, i = 1,2,...,7, p_8= 1 - $F_0(a_7)$. Hodnoty distribučnej funkcie F_0 budeme počítať pomocou hodnôt distribučnej funkcie Φ normálneho normovaného rozdelenia, ktoré nájdeme v tabuľke č. 12.1. $F_0(a_i) = \Phi\left(\dfrac{a_i - 117}{1{,}96}\right)$, i = 1,2,...,7. Vypočítame očakávané početnosti np_i intervalov a podiely $\dfrac{f_i^2}{np_i}$, i = 1,2,...,8. Výsledky zapíšeme do nasledujúcej tabuľky.

Tabuľka 6.2.

Interval	f_i	p_i	np_i	$\frac{f_i^2}{np_i}$
do 90	10	0,0119	6,4727	15,4495
$\langle$90,100)	35	0,0656	35,4293	34,5759
$\langle$100,110)	64	0,2016	108,8526	37,6289
$\langle$110,120)	254	0,3199	172,7222	373,5246
$\langle$120,130)	99	0,2624	141,7201	69,1574
$\langle$130,140)	63	0,1113	60,0971	66,0431
$\langle$140,150)	13	0,0243	13,10416	12,8599
150 a viac	2	0,0029	1,5643	2,5571
Σ	540	-	-	611,7963

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i^2}{np_i} - n = 611{,}7963 - 540 = 71{,}7963.$$

Vzhľadom na to, že sme odhadovali dva neznáme parametre a očakávaná početnosť intervalu je menšia ako 5 v jednom prípade, počet stupňov voľnosti je 8 - 3 - 1 = 4. V tabuľkách kritických hodnôt

χ^2 - testu (tabuľka č. 12.4) nájdeme kritickú hodnotu $\chi^2_{0,05}(4) = 9{,}49$, na základe ktorej určíme kritický obor:

$$W_\alpha = \left(\chi^2_\alpha(r-3-1);\ \infty\right) = \left(\chi^2_{0,05}(4);\ \infty\right) = (9{,}49;\ \infty).$$

Keďže hodnota testovacieho kritéria χ^2 je prvkom kritického oboru W_α, zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ testovanú hypotézu H_0. Rozdelenie výšky desaťročných dievčat nemôžeme považovať za normálne.

Poznámka. χ^2 - test môžeme použiť aj na testovanie hypotézy $H_0 : F = F_0$ oproti hypotéze $H_1 : F \neq F_0$, kde F_0 je distribučná funkcia ľubovoľného spojitého rozdelenia. Príklady tohto použitia χ^2 - testu uvedieme v 8. kapitole.

6.3 Parametrické testy

Parametrické testy môžeme rozdeliť na jednovýberové, dvojvýberové a viacvýberové. V tejto kapitole sa budeme zaoberať jednovýberovými a dvojvýberovými parametrickými testmi. Viacvýberové parametrické testy na overenie rovnosti stredných hodnôt k $(k \geq 3)$ základných súborov sú obsahom 7. kapitoly.

6.3.1 Jednovýberové parametrické testy

V tejto časti budeme predpokladať, že znak X pozorujeme na prvkoch jedného výberového súboru. Nech pozorovaný znak X má normálne rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$. Budeme testovať hypotézy o parametroch μ a σ^2 tohto rozdelenia. Uvedieme najpoužívanejšie *jednovýberové parametrické testy.*

6.3.1.1 Testy hypotéz o strednej hodnote μ za predpokladu, že σ^2 je známy parameter

Nech namerané hodnoty $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sú realizáciou náhodného výberu zo základného súboru, na ktorom sú hodnoty pozorovaného znaku X normálne rozdelené, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Strednú hodnotu μ nepoznáme, poznáme hodnotu σ^2. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

1. $H_0: \mu = \mu_0$ oproti $H_1: \mu \neq \mu_0$.

Z nameraných údajov vypočítame ich aritmetický priemer $\bar{x}$. Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$g = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\,.$$

Štatistika g má za platnosti testovanej hypotézy H_0 normálne normované rozdelenie. Keby testovaná hypotéza H_0 bola správna, aritmetický priemer $\bar{x}$ a μ_0 by sa nemali veľmi odlišovať. Hodnota štatistiky g by mala byť „blízko nuly“. Hypotézu H_0 budeme musieť zamietnuť, ak hodnota štatistiky g bude „ďaleko od nuly“. Hypotézu H_0 zamietneme na hladine významnosti α, ak

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\right| \cdot \sqrt{n} > u_\alpha\,.$$

Hodnoty u_α sú kritické hodnoty normálneho normovaného rozdelenia, t.j. rozdelenia $N(0, 1)$. Sú uvedené v tabuľke č. 12.2. Kritickým oborom je teda množina

$$W_\alpha = (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, \infty).$$

Budeme opäť testovať hypotézu $H_0: \mu = \mu_0$ o strednej hodnote μ normálneho rozdelenia, pričom budeme predpokladať, že nemôže platiť $\mu \leq \mu_0$. Testovaný problém bude mať v tomto prípade nasledujúci tvar:

2. $H_0: \mu = \mu_0$ oproti $H_1: \mu > \mu_0$.

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} > u_{2\alpha}.$$

Kritický obor je množina $W_\alpha = (u_{2\alpha}, \infty)$.

Ak vieme vylúčiť možnosť $\mu \geq \mu_0$, tak testovaný problém bude mať tvar:

3. $H_0: \mu = \mu_0$ oproti $H_1: \mu < \mu_0$.

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} < -u_{2\alpha}, \quad \text{t.j. } W_\alpha = (-\infty, -u_{2\alpha}).$$

Použitie uvedeného testu budeme ilustrovať na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 6.6 Priemerná výška desaťročných chlapcov je 135,3 cm. U 14 chlapcov, ktorí navštevujú športovú školu, boli namerané tieto hodnoty výšky v cm: 136, 130, 151, 127, 133, 136, 139, 139, 141, 147, 139, 142, 140, 138. Overte hypotézu, že výška chlapcov športovej školy sa štatisticky významne odlišuje od výšky 135,3 cm za predpokladu, že rozptyl výšky desaťročných chlapcov je $\sigma^2 = 38{,}26$.

Riešenie. Pozorovaným znakom X je výška chlapcov športovej školy. Budeme predpokladať, že znak X má normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2. Rozptyl σ^2 poznáme. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ budeme testovať hypotézu o parametri μ. Sformulujeme testovaný problém:

$$H_0: \mu = 135{,}3 \qquad \text{oproti} \qquad H_1: \mu \neq 135{,}3.$$

Z nameraných hodnôt vypočítame ich aritmetický priemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{14} x_i = 138{,}4 \text{ cm}.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$g = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{138{,}4 - 135{,}3}{6{,}18} \cdot \sqrt{14} = 1{,}877.$$

V tabuľke č. 12.2 nájdeme k zvolenej hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ príslušnú kritickú hodnotu $u_{0,05} = 1{,}9599$. Kritickým oborom je množina

$$W_\alpha = (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, \infty) = (-\infty, -u_{0,05}) \cup (u_{0,05}, \infty) =$$

$$= (-\infty; -1{,}9599) \cup (1{,}9599; \infty).$$

Keďže $g \notin W_\alpha$, testovanú hypotézu H_0 nemôžeme na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ zamietnuť. To znamená, že výška chlapcov športovej školy sa štatisticky významne neodlišuje od hodnoty 135,3 cm.

Príklad 6.7 Podľa údajov na obale čokolády by mala byť jej čistá váha 125 gramov. Výrobca dostal niekoľko sťažností od zákazníkov, ktorí tvrdili, že váha čokolády je nižšia ako váha udávaná výrobcom. Pracovník oddelenia kontroly preto náhodne vybral 50 výrobkov a zistil, že ich priemerná váha je 122 gramov. Je známe, že smerodajná odchýlka $\sigma = 8{,}6$ gramov. Overte na hladine významnosti $\alpha = 0{,}01$, či sú sťažnosti zákazníkov opodstatnené.

Riešenie. Pozorovaným znakom X je váha čokolády. Budeme testovať hypotézu o priemernej váhe μ čokolády za predpokladu, že pozorovaný znak X má normálne rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$, pričom $\sigma^2 =$ $= 73{,}96$. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

$$H_0: \mu = 125 \quad \text{oproti} \quad H_1: \mu < 125.$$

Všimnime si, že v tomto prípade je potrebné voliť ľavostrannú alternatívnu hypotézu, ktorá vyjadruje, že priemerná váha μ čokolády je menšia ako stanovená hodnota, t.j. sťažnosti zákazníkov sú opodstatnené.

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$g = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{122 - 125}{8{,}6} \cdot \sqrt{50} = -2{,}467.$$

Kritickým oborom je množina

$$W_\alpha = (-\infty, -u_{2\alpha}) = (-\infty, -u_{0,02}) = (-\infty, -2{,}326).$$

Kritickú hodnotu $u_{0,02}$ sme vyhľadali v tabuľke č. 12.2. Keďže $g \in W_\alpha$, na hladine významnosti $\alpha = 0{,}01$ zamietame testovanú hypotézu H_0 v prospech alternatívnej hypotézy H_1. To znamená, že sťažnosti zákazníkov sú opodstatnené.

Príklad 6.8 Spoločnosť, ktorá doručuje zásielky vo veľkom meste, tvrdí, že doručí zásielku na miesto určenia v priemere za 28 minút. Chceme overiť ich tvrdenie. Preto sme náhodne vybrali 100 zásielok, u ktorých sme zaznamenali čas dodania. Priemerný čas dodania u týchto zásielok bol $\bar{x}$ = 31,5 minúty. Je známe, že smerodajná odchýlka času doručenia zásielky je σ = 5 minút.

Riešenie. Pozorovaným znakom X je čas doručenia zásielky. Budeme predpokladať, že pozorovaný znak X má normálne rozdelenie, $X \sim N(\mu, 25)$. Budeme testovať hypotézu o priemernom čase μ doručenia zásielky oproti pravostrannej alternatívnej hypotéze na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

$$H_0: \mu = 28 \quad \text{oproti} \quad H_1: \mu > 28.$$

Rozsah náhodného výberu je n = 100 a aritmetický priemer je $\bar{x}$ = 31,5. Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$g = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{31{,}5 - 28}{5} \cdot 10 = 7.$$

Kritický obor je množina $W_\alpha = (u_{2\alpha}, \infty) = (u_{0,1}, \infty) = (1{,}645, \infty)$. Kritickú hodnotu $u_{0,1} = 1{,}645$ sme vyhľadali v tabuľke č. 12.2. Keďže hodnota testovacieho kritéria g je prvkom kritického oboru W_α, na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ zamietame testovanú hypotézu H_0 v prospech alternatívnej hypotézy H_1. To znamená, že čas doručenia zásielky na miesto určenia je v priemere väčší ako 28 minút.

6.3.1.2 Testy hypotéz o disperzii σ^2

Nech namerané hodnoty $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sú realizáciou náhodného výberu zo základného súboru, na ktorom sú hodnoty pozorovaného znaku X normálne rozdelené, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Strednú hodnotu μ ani rozptyl σ^2 nepoznáme. Budeme testovať hypotézu o parametri σ^2. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

1. $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ oproti $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

Štatistika χ^2 má za platnosti testovanej hypotézy H_0 χ^2-rozdelenie s n - 1 stupňami voľnosti. Testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad \text{alebo} \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),$$

kde $\chi^2_\alpha(n-1)$ je kritická hodnota χ^2- rozdelenia s n - 1 stupňami voľnosti. Jej hodnotu nájdeme v tabuľke č. 12.4. Čiže kritickým oborom je množina

$$W_\alpha = (0,\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty).$$

2. $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ oproti $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

Testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_\alpha(n-1).$$

Kritickým oborom je teda množina $W_\alpha = (\chi^2_\alpha(n-1), \infty)$.

3. $H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ oproti $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

Testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n-1).$$

Kritickým oborom je teda množina $W_\alpha = (0,\ \chi^2_{1-\alpha}(n-1))$.

Príklad 6.9 Presnosť nastavenia automatického obrábacieho stroja vyrábajúceho určité výrobky je charakterizovaná rozptylom dĺžky súčiastok. Ak je táto hodnota väčšia ako 400 μm^2, automat treba znovu nastaviť. Výberová disperzia dĺžky 15 náhodne vybratých súčiastok z produkcie automatu je $s^2 = 680\,\mu$m^2. Treba posúdiť, či treba urobiť nové nastavenie stroja.

Riešenie. Pozorovaným znakom X je dĺžka súčiastok. Budeme predpokladať, že pozorovaný znak X má normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}01$ budeme testovať hypotézu o parametri σ^2. Sformulujeme nulovú a alternatívnu hypotézu. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

$$H_0:\ \sigma^2 = 400 \qquad \text{oproti} \qquad H_1: \sigma^2 > 400.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1)\cdot 680}{400} = 23{,}8.$$

Pre zvolenú hladinu významnosti $\alpha = 0{,}01$ nájdeme v tabuľke č. 12.4 príslušnú kritickú hodnotu $\chi^2_{0,01}(14) = 29{,}1$. Kritickým oborom je množina

$$W_\alpha = (\,\chi^2_\alpha(n-1)\,;\,\infty) = (\,\chi^2_{0,01}(14);\,\infty) = (29{,}1;\,\infty).$$

Keďže $\chi^2 \notin W_\alpha$, testovanú hypotézu H_0 nemôžeme zamietnuť. To znamená, že presnosť nastavenia stroja je vyhovujúca. Pozorované rozdiely nie sú štatisticky významné.

Príklad 6.10 Pri meraní koeficienta tepelnej vodivosti tehlovej steny boli namerané tieto hodnoty: 0,62; 0,64; 0,57; 0,61; 0,59; 0,57; 0,62; 0,59. Na základe nameraných výsledkov overte, či rozptyl tepelnej vodivosti tehlovej steny sa rovná predpísanej hodnote $\sigma^2 = 0{,}003$.

Riešenie. Pozorovaným znakom X je tepelná vodivosť. Budeme predpokladať, že pozorovaný znak X má normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ budeme testovať hypotézu o parametri σ^2. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

$$H_0: \sigma^2 = 0{,}003 \qquad \text{oproti} \qquad H_1: \sigma^2 \neq 0{,}003.$$

Z nameraných hodnôt vypočítame hodnotu výberového rozptylu:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0{,}00064.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(8-1)\cdot 0{,}00064}{0{,}003} = 1{,}49.$$

Pre zvolenú hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ nájdeme v tabuľke č. 12.4 príslušné kritické hodnoty $\chi^2_{0,975}(7) = 1{,}69$; $\chi^2_{0,025}(7) = 16{,}0$. Kritickým oborom je množina

$$W_\alpha = (0;\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1);\ \infty) = (0;\ \chi^2_{0,975}(7)) \cup (\chi^2_{0,025}(7);\ \infty) =$$
$$= (0;\ 1{,}69) \cup (16{,}0;\ \infty).$$

Keďže hodnota testovacieho kritéria χ^2 je prvkom kritického oboru W_α, testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ v prospech alternatívnej hypotézy H_1. To znamená, že rozptyl σ^2 tepelnej vodivosti tehlovej steny sa nerovná predpísanej hodnote 0,003.

6.3.1.3 Testy hypotéz o strednej hodnote μ za predpokladu, že σ^2 je neznámy parameter (*t*- test)

Nech namerané hodnoty $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sú realizáciou náhodného výberu zo základného súboru, na ktorom sú hodnoty pozorovaného znaku X normálne rozdelené, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Strednú hodnotu μ ani hodnotu σ^2 nepoznáme. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ oproti $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Z nameraných údajov vypočítame ich aritmetický priemer $\bar{x}$. Keďže nepoznáme disperziu σ^2, vypočítame hodnotu výberovej disperzie:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 .$$

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \cdot \sqrt{n} .$$

Štatistika *t* má za platnosti testovanej hypotézy H_0 Studentovo *t*-rozdelenie s n - 1 stupňami voľnosti. Hypotézu H_0 zamietneme na hladine významnosti α, ak

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\right| \cdot \sqrt{n} > t_\alpha(n-1),$$

kde $t_\alpha(n-1)$ sú kritické hodnoty Studentovho *t*- rozdelenia. (tabuľka č. 12.3). Kritickým oborom je teda množina

$$W_\alpha = (-\infty, -t_\alpha(n-1)) \cup (t_\alpha(n-1), \infty).$$

2. $H_0 : \mu = \mu_0$ oproti $H_1 : \mu > \mu_0$

Kritický obor je množina W_α = $(t_{2\alpha}(n-1), \infty)$. Ak hodnota testovacieho kritéria $t \in W_\alpha$, na hladine významnosti α zamietame testovanú hypotézu v prospech alternatívnej hypotézy.

3. $H_0: \mu = \mu_0$ oproti $H_1: \mu < \mu_0$.

Kritickým oborom je množina W_α = (- ∞, - $t_{2\alpha}(n-1)$).

Poznámka. Uvedený test sa nazýva aj *jednovýberový t- test*. V časti 6.3.2.1 uvedieme *t*- test pre porovnávanie stredných hodnôt dvoch základných súborov, tzv. *dvojvýberový t- test*. *t*- testy patria k najpoužívanejším parametrickým testom.

Príklad 6.11 Pri kontrole baliaceho automatu, ktorý plní cukrom balíčky o hmotnosti 1 kg, boli pri presnom prevážení 5 balíčkov zistené tieto odchýlky od predpísanej hodnoty v gramoch: -3, 2, -2, 0, -1. Treba zistiť, či automat nemá systematickú odchýlku od požadovanej hodnoty.

Riešenie. Pozorovaným znakom *X* je odchýlka hmotnosti balíčkov od predpísanej hodnoty. Zistené odchýlky budeme považovať za realizáciu náhodného výberu zo základného súboru, na ktorom má pozorovaný znak *X* normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2, ktoré nepoznáme. Budeme testovať hypotézu $H_0: \mu = 0$ oproti hypotéze $H_1: \mu \neq 0$. Nulovú hypotézu budeme testovať *t*– testom na hladine významnosti α = 0,05.

Vypočítame

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = -0{,}8; \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 3{,}7; \quad s = \sqrt{3{,}7} = 1{,}92.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{-0{,}8}{1{,}92} \cdot \sqrt{5} = -0{,}93.$$

V tabuľke č. 12.3 vyhľadáme príslušnú kritickú hodnotu $t_{0,05}(4)$ = 2,78 a určíme kritický obor:

$$W_\alpha = (-\infty; -t_{0,05}(4)) \cup (t_{0,05}(4); \infty) = (-\infty; -2{,}78) \cup (2{,}78; \infty).$$

Keďže pre hodnotu testovacieho kritéria platí $t \notin W_\alpha$, testovanú hypotézu nemôžeme zamietnuť. To znamená, že baliaci automat nemá systematickú chybu. Pozorované rozdiely nie sú štatisticky signifikantné.

V nasledujúcom príklade budeme ilustrovať použitie t- testu pri vyhodnocovaní výsledkov ekologického výskumu.

Príklad 6.12 ([8]) Úrad pre ochranu životného prostredia vydal nariadenie, ktorým určil priemyselným podnikom maximálne prípustné koncentrácie emisií rôznych látok. Horná hranica obsahu vinylchloridu vo vzduchu bola stanovená na 50 mg v kubickom km vo vzdialenosti do dvoch kilometrov od podniku, ktorý túto látku emituje. Pracovníci úradu vykonali kontrolu dodržiavania tohto nariadenia. Vo vzdialenosti dvoch kilometrov od podniku náhodne uskutočnili 100 meraní v rôznych dňoch a rôznych časoch. Priemerná koncentrácia vinylchloridu zistená pri týchto meraniach bola 54 mg a smerodajná odchýlka obsahu emitovaných látok bola 20 mg. Treba zistiť, či podnik dodržiava nariadenie úradu.

Riešenie. Pozorovaným znakom X je obsah emitovaných látok. Budeme predpokladať, že znak X má normálne rozdelenie $N(\mu,\sigma^2)$ a testovať hypotézu o priemernom obsahu μ emitovaných látok. V nulovej hypotéze budeme predpokladať, že priemerný obsah emitovaných látok je 50 mg. Je to maximálne prípustná hranica a preto, ak priemerný obsah emisií je vyšší, podnik porušuje nariadenie. Vyjadríme to v jednostrannej alternatívnej hypotéze, ktorá bude tvrdiť, že priemerný obsah emitovanej látky je väčší ako 50 mg. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

$$H_0:\ \mu = 50 \qquad \text{oproti} \qquad H_1:\ \mu > 50.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\cdot\sqrt{n} = \frac{54-50}{20}\cdot\sqrt{100} = 2.$$

Zvolíme hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a v tabuľke č. 12.3 vyhľadáme kritickú hodnotu $t_{0,1}(99)$ = 1,66. Určíme kritický obor:

$$W_\alpha = (t_{2\alpha}(n-1);\ \infty) = (t_{0,1}(99);\ \infty) = (1{,}66;\ \infty).$$

Keďže $t \in W_\alpha$, testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ v prospech alternatívnej hypotézy H_1. Štatisticky bolo preukázané, že podnik prekračuje maximálne prípustnú hranicu obsahu vinylchloridu vo vzduchu, a tým porušuje predpísané nariadenie.

6.3.2 Dvojvýberové parametrické testy

Často sa stretávame s tým, že daný štatistický znak pozorujeme na prvkoch viacerých výberových súborov a potrebujeme overiť, či sa rozdelenie hodnôt pozorovaného znaku na týchto súboroch zhoduje. Tieto súbory obvykle vznikajú triedením pôvodného rozsiahlejšieho nadsúboru podľa ďalšieho - väčšinou kvalitatívneho znaku - faktora. Ak sa preukážu rozdiely medzi súbormi v úrovni hodnôt znaku X na prvkoch týchto súborov, je tým preukázaná i závislosť znaku X na faktore, ktorý bol použitý ako triediace hľadisko.

Parametre dvoch základných súborov s normálnym rozdelením porovnávame pomocou *dvojvýberových parametrických testov.* Rovnosť ich stredných hodnôt testujeme pomocou *z*- testu alebo pomocou tzv. dvojvýberových *t*- testov a rovnosť ich disperzií testujeme pomocou Fisherovho *F*-testu.

6.3.2.1 Testovanie rovnosti stredných hodnôt dvoch normálnych rozdelení, ak sú ich disperzie známe parametre

Nech namerané hodnoty $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1}$ sú realizáciou náhodného výberu zo základného súboru, na ktorom má pozorovaný znak X normálne rozdelenie $N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Nech postupnosť hodnôt $x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2}$ je realizáciou druhého náhodného výberu zo základného súboru, na ktorom má pozorovaný znak X normálne rozdelenie $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Navyše budeme predpokladať, že tieto dva náhodné výbery sú navzájom nezávislé. Budeme testovať hypotézu o rovnosti stredných hodnôt μ_1, μ_2. Najskôr sa budeme zaoberať prípadom, keď rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 sú známe parametre. Budeme testovať nulovú hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ oproti alternatívnym hypotézam $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ resp. $H_1 : \mu_1 < \mu_2$.

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

kde $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ sú výberové priemery a n_1, n_2 sú rozsahy výberových súborov. Štatistika z má za platnosti nulovej hypotézy H_0 normálne normované rozdelenie. Oblasti zamietnutia nulovej hypotézy H_0 pre jednotlivé alternatívne hypotézy budú teda určené kritickými hodnotami u_α normálneho normovaného rozdelenia.

1. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

   Kritický obor je množina W_α = (- ∞, - u_α) ∪ (u_α, ∞).

2. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 > \mu_2$

   Kritický obor je množina W_α = ($u_{2\alpha}$, ∞).

3. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 < \mu_2$

   Kritický obor je v tomto prípade množina W_α = (- ∞, - $u_{2\alpha}$).

Príklad 6.13 Aby sme zistili, aký vplyv má vonkajšia teplota na systematickú chybu uhlomerného prístroja, uskutočnili sme merania horizontálneho uhla zvoleného objektu ráno pri teplote 10°C a napoludnie pri teplote 26° C. Výsledky meraní uhla (v uhlových sekundách) sú takéto:
ráno: 38,2; 36,4; 37,7; 36,1; 37,9; 37,8,
na obed: 39,5; 38,7; 37,8; 38,6; 39,2; 39,1; 38,9; 39,2.

Možno tvrdiť, že teplota prostredia má vplyv na systematickú odchýlku meracieho zariadenia? Je pritom známe, že rozptyl chyby meracieho prístroja je 0,47.

Riešenie. Pozorovaným znakom X je nameraná veľkosť horizontálneho uhla zvoleného objektu. Budeme predpokladať, že má normálne rozdelenie. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ budeme testovať hypotézu H_0: $\mu_1 = \mu_2$ oproti alternatívnej hypotéze H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$, kde

μ_1 označuje priemernú nameranú veľkosť horizontálneho uhla zvoleného objektu pri meraní ráno a μ_2 označuje priemernú nameranú veľkosť horizontálneho uhla zvoleného objektu pri meraní napoludnie. Keďže $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0,47$, ako testovacie kritérium použijeme štatistiku z.

Najskôr vypočítame aritmetické priemery $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$. Dostávame $\bar{x}_1 = 37,35$, $\bar{x}_2 = 38,875$. Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{37,35 - 38,875}{\sqrt{\frac{0,47}{6} + \frac{0,47}{6}}} = -4,118.$$

Ku zvolenej hladine významnosti $\alpha = 0,05$ vyhľadáme v tabuľkách príslušnú kritickú hodnotu $u_{0,05} = 1,96$. Kritický obor je množina W_α = (- ∞, - 1,96) ∪ (1,96, ∞). Keďže hodnota testovacieho kritéria je z kritického oboru, zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ testovanú hypotézu H_0 v prospech alternatívnej hypotézy. Testom bolo štatisticky potvrdené, že teplota zariadenia má vplyv na systematickú chybu meracieho zariadenia.

6.3.2.2 Testovanie rovnosti stredných hodnôt dvoch normálnych rozdelení, ak sú ich disperzie neznáme a rovnaké (dvojvýberový *t*- test pri rovnakých disperziách)

Nech namerané hodnoty $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1}$ sú realizáciou náhodného výberu zo základného súboru, na ktorom má pozorovaný znak X normálne rozdelenie $N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Nech postupnosť hodnôt $x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2}$ je realizáciou druhého náhodného výberu zo základného súboru, na ktorom má pozorovaný znak X normálne rozdelenie $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Navyše budeme predpokladať, že tieto dva náhodné výbery sú navzájom nezávislé. Budeme testovať hypotézu o rovnosti stredných hodnôt μ_1, μ_2. Budeme sa zaoberať prípadom, keď rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 sú neznáme, ale je opodstatnený predpoklad o ich rovnosti. Tento predpoklad je možné otestovať F- testom, ktorý uvedieme v časti 7.3.2.4. Nech teda $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pričom hodnotu parametra σ^2 nepoznáme.

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S},$$

ktorá má za platnosti testovanej hypotézy H_0 Studentovo t- rozdelenie s $n_1 + n_2 - 2$ stupňami voľnosti. Jeho hodnotu vypočítame nasledujúcim spôsobom. Najskôr vypočítame aritmetické priemery $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ a výberové disperzie s_1^2, s_2^2:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}\ ; \quad s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2\ ;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}\ ; \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2\ .$$

Ďalej vypočítame spoločný rozptyl

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot s_1^2 + (n_2 - 1)\cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}; \qquad s = s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

a hodnotu testovacieho kritéria t.

1. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

Kritický obor má pre daný testovaný problém nasledujúci tvar:

$$W_\alpha = (-\infty, -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)) \cup (t_\alpha(n_1 + n_2 - 2), \infty).$$

Testovanú hypotézu H_0 budeme zamietať na hladine významnosti α, ak hodnota testovacieho kritéria $t \in W_\alpha$.

V prípadoch 2. a 3. budeme testovať hypotézu o rovnosti stredných hodnôt μ_1, μ_2 oproti jednostranným alternatívnym hypotézam.

2. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 > \mu_2$

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak hodnota testovacieho kritéria $t \in W_\alpha$, kde

$$W_\alpha = (t_{2\alpha}(n_1 + n_2 - 2), \infty).$$

3. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 < \mu_2$

Kritický obor má v tomto prípade nasledujúci tvar:

$$W_\alpha = (-\infty, -t_{2\alpha}(n_1 + n_2 - 2)).$$

Poznámka. Dvojvýberový *t*- test sa používa v mnohých oblastiach výskumu. V pedagogickom výskume ho použijeme napríklad vtedy, ak zavádzame nový, experimentálny spôsob výučby a je potrebné overiť jeho efektívnosť. Postupujeme tak, že zvolíme dve skupiny žiakov. V jednej skupine - nazveme ju experimentálna - bude výučba prebiehať novým experimentálnym spôsobom. V druhej skupine, tzv. kontrolnej, bude výučba prebiehať štandardným spôsobom. Dvojvýberovým *t*- testom budeme porovnávať úroveň vedomostí žiakov kontrolnej a experimentálnej skupiny na začiatku experimentu. Aby boli výsledky výskumu preukazné, musí byť úroveň vedomostí žiakov v oboch skupinách pred začatím experimentu rovnaká.

Efektívnosť nového spôsobu výučby overíme dvojvýberovým *t*- testom po realizácii experimentu. Nový spôsob výučby bude efektívny, ak dvojvýberový *t*- test potvrdí štatisticky významné rozdiely v úrovni vedomostí žiakov kontrolnej a experimentálnej skupiny. Môžeme postupovať aj tak, že porovnáme úroveň vedomostí žiakov kontrolnej skupiny na začiatku experimentu a po jeho skončení a tiež úroveň vedomostí žiakov experimentálnej skupiny na začiatku experimentu a po jeho skončení. Na toto porovnávanie sa používa tzv. párový *t*- test, ktorý popíšeme v časti 6.3.3. Nový spôsob výučby je efektívny, ak úroveň vedomostí žiakov experimentálnej skupiny je po realizácii experimentu štatisticky významne vyššia ako pred jeho realizáciou a v kontrolnej skupine zlepšenie nenastalo.

V nasledujúcom príklade ukážeme použitie dvojvýberového *t*- testu pri rovnakých disperziách v pedagogickom výskume.

Príklad 6.14 Treba overiť efektívnosť nového spôsobu výučby vybraných tematických celkov matematiky. Preto výučba matematiky bola realizovaná v jednej triede experimentálnym spôsobom. Z tejto triedy boli náhodne vybraní žiaci, ktorí budú predstavovať experimentálnu skupinu. Žiaci z experimentálnej skupiny dosiahli v záverečnom teste, ktorý písali po realizácii experimentu, nasledujúce počty bodov: 22, 34, 26, 31, 26, 35, 25, 38, 36, 22, 23, 32. V ostatných triedach prebiehala výučba matematiky štandardným spôsobom. Z týchto tried boli náhodne vybraní žiaci, ktorí tvoria kontrolnú skupinu. Dosiahli v záverečnom teste nasledujúce počty bodov: 24, 33, 23, 20, 26, 32, 35, 21, 25.

Riešenie. Pozorovaným znakom X je počet bodov, ktorý žiaci dosiahli v záverečnom teste. Predpokladajme, že pozorovaný znak má na prvkoch obidvoch súborov normálne rozdelenie $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ resp. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, kde μ_1 je priemerná úroveň vedomostí žiakov z matematiky pri experimentálnom spôsobe výučby a μ_2 je priemerná úroveň vedomostí žiakov z matematiky pri tradičnom spôsobe výučby.

Budeme predpokladať, že disperzie σ_1^2 a σ_2^2 oboch súborov sú rovnaké. Predpoklad o rovnosti rozptylov σ_1^2 a σ_2^2 sme overili v príklade 6.17. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{oproti} \qquad H_1 : \mu_1 > \mu_2 .$$

Najskôr vypočítame aritmetické priemery $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ a výberové disperzie s_1^2, s_2^2:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} = 29{,}17; \quad s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 33{,}79;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} = 26{,}56; \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 29{,}78.$$

Ďalej vypočítame

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot s_1^2 + (n_2 - 1)\cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{11\cdot 33{,}79 + 8\cdot 29{,}78}{12 + 9 - 2} \doteq 32{,}1;$$

$$s = s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 5{,}66 \cdot \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{9}} \doteq 2{,}49.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} = \frac{29{,}17 - 26{,}56}{2{,}49} = 1{,}05.$$

Zvolíme hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a v tabuľke č. 12.3 vyhľadáme príslušnú kritickú hodnotu: $t_{2\alpha}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0,1}(19) = 1{,}729$. Kritický obor je množina:

$$W_\alpha = (t_{2\alpha}(n_1 + n_2 - 2);\ \infty) = (1{,}729;\ \infty).$$

Keďže $t \notin W_\alpha$, testovanú hypotézu H_0 nemôžeme zamietnuť. To znamená, že experimentálny spôsob výučby matematiky nie je efektívny. Pozorované rozdiely v úrovni vedomostí žiakov experimentálnej a kontrolnej skupiny z matematiky nie sú štatisticky významné.

6.3.2.3 Testovanie rovnosti stredných hodnôt dvoch normálnych rozdelení, ak sú ich disperzie neznáme a rôzne (dvojvýberový *t*- test pri nerovnakých disperziách)

Nech $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1}$ a $x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2}$ sú realizácie dvoch navzájom nezávislých náhodných výberov zo súborov s rozdelením $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ resp. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, pričom predpoklad o rovnosti disperzií σ_1^2, σ_2^2 nie je opodstatnený. Budeme testovať hypotézu o rovnosti stredných hodnôt μ_1, μ_2. Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$t' = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}.$$

Testovacie kritérium t' má za platnosti testovanej hypotézy H_0 Studentovo rozdelenie s počtom stupňov voľnosti *df*, kde *df* je celá časť výrazu

$$\frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}.$$

1. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α v prospech H_1, ak

$$|t'| > t_\alpha(df).$$

2. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 > \mu_2$

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak $t' > t_{2\alpha}(df)$.

3. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 < \mu_2$

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak $t' < - t_{2\alpha}(df)$.

V nasledujúcom príklade ukážeme použitie uvedeného testu pri vyhodnocovaní výsledkov psychologického výskumu.

Príklad 6.15 Psychológovia vypracovali určitý postup na upokojenie žiakov (rozprávanie s hudobnými efektmi), ktorý by sa mal prejaviť znížením krvného tlaku. Na overenie účinnosti tohto postupu bol meraný krvný tlak u žiakov dvoch skupín; v prvej skupine bez aplikácie tohto postupu a v druhej skupine s aplikáciou tohto postupu. Výsledky (v mm Hg) sú takéto:
1. skupina: 105, 107, 110, 117, 124, 153, 137, 174, 109, 119, 143, 162, 91, 146, 109;
2. skupina: 92, 96, 104, 119, 106, 100, 93, 90, 98, 109, 106, 91, 88, 94.

Riešenie. Pozorovaným znakom X je krvný tlak. Budeme predpokladať, že má normálne rozdelenie. Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ budeme testovať hypotézu $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti alternatívnej hypotéze $H_1: \mu_1 > \mu_2$, kde

μ_1 označuje priemernú hodnotu krvného tlaku žiakov bez aplikácie uvedeného postupu,
μ_2 označuje priemernú hodnotu krvného tlaku žiakov pri aplikácii uvedeného postupu.

Vypočítame hodnoty výberových charakteristík:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} = 127{,}1; \quad s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_{1i} - \bar{x}_1\right)^2 = 579{,}8;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} = 99; \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(x_{2i} - \bar{x}_2\right)^2 = 77{,}7.$$

Keďže nie je opodstatnený predpoklad o rovnosti disperzií σ_1^2, σ_2^2 (pozri príklad 6.16), ako testovacie kritérium použijeme štatistiku t'. Vypočítame jej hodnotu:

$$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{127{,}1 - 99}{\sqrt{\frac{579{,}8}{15} + \frac{77{,}7}{14}}} = \frac{28{,}1}{6{,}65} = 4{,}23.$$

Vypočítame počet stupňov voľnosti df testovacieho kritéria t':

$$df \doteq \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{579{,}8}{15} + \frac{77{,}7}{14}\right)^2}{\frac{\left(\frac{579{,}8}{15}\right)^2}{14} + \frac{\left(\frac{77{,}7}{14}\right)^2}{13}} \doteq 18.$$

V tabuľkách kritických hodnôt Studentovho rozdelenia (tabuľka č. 12.3) vyhľadáme príslušnú kritickú hodnotu: $t_{2\alpha}(df) = t_{0,1}(18) =$ $= 1{,}734$. Keďže $t' > 1{,}734$, na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ zamietame testovanú hypotézu H_0 v prospech alternatívnej hypotézy H_1. Pozorované rozdiely v nameraných hodnotách krvného tlaku medzi prvou a druhou skupinou žiakov sú štatisticky významné. Test potvrdil, že aplikáciou uvedeného psychologického postupu sa krvný tlak znížil. To znamená, že navrhnutý psychologický postup je účinný.

6.3.2.4 Testovanie rovnosti disperzií dvoch normálnych rozdelení (Fisherov *F*- test)

Nech $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1}$ a $x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2}$ sú realizácie dvoch navzájom nezávislých náhodných výberov zo súborov s rozdelením pravdepodobnosti hodnôt sledovaného znaku $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ resp. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Budeme testovať hypotézu H_0 o rovnosti disperzií σ_1^2, σ_2^2 oproti dvojstrannej alternatívnej hypotéze a oproti jednostranným alternatívnym hypotézam.

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$, ktorá má za platnosti testovanej hypotézy H_0 tzv. Fisherovo–Snedecorovo rozdelenie s ($n_1 - 1$, $n_2 - 1$) stupňami voľnosti. Príslušné kritické hodnoty, ktoré určia kritickú oblasť, budeme teda hľadať v tabuľkách kritických hodnôt Fisherovho–Snedecorovho rozdelenia (tabuľka č. 12.5).

V predchádzajúcom vzorci sú S_1^2, S_2^2 výberové disperzie jednotlivých výberových súborov. Do čitateľa v tomto vzorci dosadíme tú výberovú disperziu, ktorá má väčšiu hodnotu.

1. $H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ oproti $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1), \text{ kde}$$

m je rozsah súboru s väčšou výberovou disperziou,
n je rozsah súboru s menšou výberovou disperziou;
$F_\alpha(k, l)$ je kritická hodnota Fisherovho-Snedecorovho rozdelenia s (*k, l*) stupňami voľnosti.

2. $H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ oproti $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

3. $H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ oproti $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} > F_\alpha(n_2 - 1, n_1 - 1).$$

Uvedený test sa nazýva Fisherov *F*- test.

Príklad 6.16 Budeme testovať hypotézu o rovnosti disperzií súborov z predchádzajúceho príkladu na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$.

Riešenie. Testovaný problém bude mať tvar

$$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{oproti} \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 .$$

Rozsahy výberových súborov sú $n_1 = 15$; $n_2 = 14$ a hodnoty výberových disperzií sú $s_1^2 = 579{,}8$; $s_2^2 = 77{,}7$. Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{579{,}8}{77{,}7} = 7{,}5.$$

V tabuľke č. 12.5 vyhľadáme príslušnú kritickú hodnotu $F_{0{,}025}(14,\ 13) \doteq 3{,}1$. Keďže 7,5 > $F_{0{,}025}(14,\ 13)$, hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$. To znamená, že predpoklad o rovnosti disperzií σ_1^2, σ_2^2 nie je opodstatnený.

Príklad 6.17 Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujme hypotézu o rovnosti disperzií súborov z príkladu 6.14.

Riešenie. Testujeme hypotézu

$$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{oproti} \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 .$$

Rozsahy výberových súborov sú n_1 = 12; n_2 = 9 a hodnoty výberových disperzií sú $s_1^2 = 33{,}79$; s_2^2 = 29,78. Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{33{,}79}{29{,}78} = 1{,}135.$$

V tabuľke č. 12.5 vyhľadáme príslušnú kritickú hodnotu $F_{0,025}(11,\,8) \doteq 3{,}66$. Keďže $1{,}135 < F_{0,025}(11,\,8)$, hypotézu H_0 nemôžeme zamietnuť. To znamená, že predpoklad o rovnosti disperzií σ_1^2, σ_2^2 je opodstatnený. Pozorované rozdiely nie sú štatisticky významné.

Príklad 6.18 a) Na výrobnej linke pre balenie údenín bolo prevážených 20 náhodne vybraných balíčkov s týmito výsledkami v gramoch: 251,5; 258,1; 253,4; 256; 245; 251,1; 255,7; 255,5; 249,2; 254,6; 251,9; 248,3; 255,7; 256,2; 250,5; 251,7; 254; 259,5; 257; 252,8. Je potrebné zistiť, či hmotnosti balíčkov vyhovujú norme, podľa ktorej priemerná hodnota hmotnosti má byť 250 g a kolísavosť hmotnosti vyjadrená rozptylom má byť menšia alebo rovná 4.

Riešenie. Budeme predpokladať, že namerané hodnoty sú realizáciou náhodného výberu z normálneho rozdelenia $N(\mu,\sigma^2)$ a budeme testovať hypotézy o jeho parametroch. Najskôr budeme testovať hypotézu o strednej hodnote μ, pričom zvolíme dvojstrannú alternatívnu hypotézu: H_0: $\mu = 250$ oproti H_1: $\mu \neq 250$. Budeme testovať *t*- testom na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$. Vypočítame hodnoty výberových charakteristík: $\bar{x} = 253{,}385$; $s = 3{,}559$ a hodnotu testovacieho kritéria:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{253{,}385 - 250}{3{,}559} \cdot \sqrt{20} = 4{,}253.$$

V tabuľke č. 12.3 vyhľadáme príslušnú kritickú hodnotu $t_{0,05}(19) = 2{,}093$. Kritický obor je množina

$$W_\alpha = (-\infty; -t_\alpha(n-1)) \cup (t_\alpha(n-1); \infty) = (-\infty; -2{,}093) \cup (2{,}093; \infty).$$

Keďže hodnota testovacieho kritéria $t \in W_\alpha$, na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ zamietame testovanú hypotézu H_0 v prospech alternatívnej hypotézy H_1.

Ďalej budeme testovať hypotézu o disperzii hmotnosti. Norma bude porušená, keď disperzia σ^2 bude väčšia ako 4, preto zvolíme pravostrannú alternatívnu hypotézu. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

$$H_0: \sigma^2 = 4 \qquad \text{oproti} \qquad H_1: \sigma^2 > 4.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 12{,}667}{4} = 60{,}168.$$

V tabuľke č. 12.4 vyhľadáme kritickú hodnotu $\chi^2_{0,05}(19)$ = 30,14. Keďže pre hodnotu testovacieho kritéria platí $\chi^2 >$ 30,14, testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$. Testovaním bolo štatisticky preukázané, že hmotnosti balíčkov nespĺňajú ani jednu požiadavku normy.

Príklad 6.18. b) Vzhľadom k výsledku kontrolného preváženia bolo rozhodnuté, že linku treba opraviť. Po oprave bolo náhodne vybraných 7 balíčkov, u ktorých boli zistené tieto hmotnosti v gramoch: 251,1; 252,2; 249,9; 249,3; 251,1; 250,2; 250,4. Máme overiť, či sa opravou linky zmenšil rozptyl a stredná hodnota hmotnosti balíčkov.

Riešenie. Namerané hodnoty budeme považovať za realizáciu náhodného výberu z normálneho rozdelenia nezávislého na predchádzajúcom výbere.

Vypočítame charakteristiky $\bar{x}_2$ a s_2^2 tohto výberového súboru: n_2 = 7; $\bar{x}_2$ = 250,314; s_2^2 = 0,411. Z predchádzajúceho riešenia vieme, že n_1= 20; $\bar{x}_1$ = 253,385; s_1^2 = 12,667.

Testujeme najskôr *F*- testom hypotézu o rovnosti rozptylov

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad \text{oproti hypotéze} \qquad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{12{,}667}{0{,}411} = 30{,}8.$$

Pre zvolenú hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ vyhľadáme v tabuľke č. 12.5 príslušnú kritickú hodnotu: $F_{0{,}05}(19,\ 6) = 3{,}87$. Keďže 30,8 > 3,87, zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ testovanú hypotézu H_0 v prospech alternatívnej hypotézy H_1. To znamená, že opravou linky sa rozptyl hmotnosti zmenšil.

Ďalej budeme testovať hypotézu o rovnosti stredných hodnôt μ_1, μ_2. Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{oproti} \qquad H_1:\ \mu_1 > \mu_2 .$$

Keďže podľa predchádzajúceho Fisherovho F- testu nie je opodstatnený predpoklad o rovnosti rozptylov σ_1^2, σ_2^2, použijeme dvojvýberový t- test pri nerovnosti rozptylov. Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{253{,}385 - 250{,}314}{\sqrt{\frac{12{,}667}{20} + \frac{0{,}411}{7}}} = 3{,}7.$$

Vypočítame počet stupňov voľnosti df testovacieho kritéria t':

$$df \doteq \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{12{,}667}{20} + \frac{0{,}411}{7}\right)^2}{\frac{\left(\frac{12{,}667}{20}\right)^2}{19} + \frac{\left(\frac{0{,}411}{7}\right)^2}{6}} \doteq 22.$$

V tabuľkách kritických hodnôt Studentovho rozdelenia (tabuľka č. 12.3) vyhľadáme kritickú hodnotu $t_{2\alpha}(df) = t_{0{,}1}(22) = 1{,}717$. Keďže $t' > 1{,}717$, na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ zamietame testovanú hypotézu H_0 v prospech alternatívnej hypotézy H_1. Pozorované rozdiely v nameraných hodnotách hmotností balíčkov pred opravou a po oprave linky sú štatisticky významné. Test potvrdil, že po oprave linky sa zmenšila stredná hodnota hmotností balíčkov. Čitateľovi odporúčame, aby vhodnými testami overil, či hmotnosti balíčkov po oprave linky vyhovujú norme.

6.3.3 Párový *t* - test

Predpokladajme, že na prvkoch výberového súboru pozorujeme dva kvantitatívne znaky *X*, *Y*, ktoré nemôžeme považovať za nezávislé. Nech (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... ,(x_n, y_n) je realizáciou náhodného výberu zo základného súboru, na ktorom má pozorovaný znak *X* normálne rozdelenie $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a znak *Y* normálne rozdelenie $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Budeme testovať nulovú hypotézu o rovnosti stredných hodnôt μ_1, μ_2 oproti dvojstrannej a jednostranným alternatívnym hypotézam.

Použijeme tzv. *párový t- test*. Budeme postupovať nasledujúcim spôsobom. Vypočítame diferencie $d_i = x_i - y_i$ pre $i = 1,2,...,n$. Ďalej vypočítame hodnoty $\overline{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$ a $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2$.

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku $t = \frac{\overline{d}}{S}\cdot\sqrt{n}$, ktorá má za platnosti nulovej hypotézy Studentovo *t*- rozdelenie o *n* - 1 stupňoch voľnosti.

1. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α, ak

$$|t| = \frac{\left|\overline{d}\right|}{s}\cdot\sqrt{n} > t_\alpha(n-1).$$

Hodnota $t_\alpha(n-1)$ je kritická hodnota Studentovho *t*- rozdelenia o *n* - 1 stupňoch voľnosti. Pre zvolené α a dané *n* ju nájdeme v tabuľke č. 12.3. Takže kritický obor pre testovaný problém 1. má tvar:

$$W_\alpha = (-\infty;\ -t_\alpha(n-1)) \cup (t_\alpha(n-1);\ \infty).$$

2. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 > \mu_2$

Kritický obor je množina $W_\alpha = (t_{2\alpha}(n-1),\ \infty)$. Ak pre hodnotu testovacieho kritéria platí $t \in W_\alpha$, na hladine významnosti α zamietame testovanú hypotézu H_0 v prospech alternatívnej hypotézy H_1.

3. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ oproti $H_1: \mu_1 < \mu_2$

Kritickým oborom je množina $W_\alpha = (-\infty,\ -t_{2\alpha}(n-1))$.

Použitie párového *t*- testu budeme ilustrovať na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 6.19 ([2]) Je potrebné overiť, či sa u osobného automobilu určitej značky pri správnej geometrii kolies ojazdia obe pneumatiky rovnako rýchlo. Preto bolo náhodne vybraných 6 nových áut a po určitej dobe bolo zistené, o koľko milimetrov sa ojazdili ich pravé a ľavé predné pneumatiky. Výsledky zisťovania sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 6.3.

auto č. i	1	2	3	4	5	6
x_i	1,8	1,0	2,2	0,9	1,5	1,6
y_i	1,5	1,1	2,0	1,1	1,4	1,4

x_i označuje počet milimetrov, o ktorý sa ojazdili pravé pneumatiky;
y_i označuje počet milimetrov, o ktorý sa ojazdili ľavé pneumatiky.

Riešenie. Pozorovanými znakmi sú znaky *X*, *Y*, kde *X* označuje opotrebovanie pravej pneumatiky a *Y* opotrebovanie ľavej pneumatiky. Budeme predpokladať, že pozorovaný znak *X* má normálne rozdelenie $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a znak *Y* normálne rozdelenie $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Budeme testovať hypotézu o rovnosti stredných hodnôt μ_1, μ_2 oproti dvojstrannej alternatívnej hypotéze na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$. Takže testovaný problém bude mať tvar:

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{oproti} \qquad H_1:\ \mu_1 \neq \mu_2 .$$

Použijeme párový *t*- test. Určíme diferencie $d_i = x_i - y_i$ pre $i = 1,2,\dots,n$.

Vypočítame hodnoty výberových charakteristík:

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = 0{,}0833; \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2 = 0{,}0377; \quad s = 0{,}194$$

a hodnotu testovacieho kritéria:

$$t = \frac{\bar{d}}{s}\cdot\sqrt{n} = \frac{0{,}0833}{0{,}194}\cdot\sqrt{6} = 1{,}0512.$$

V tabuľke č. 12.3 nájdeme kritickú hodnotu $t_\alpha(n-1) = t_{0{,}05}(5) = 2{,}57$. Kritický obor je množina

$$W_\alpha = (-\infty;\ -t_\alpha(n-1)) \cup (t_\alpha(n-1);\ \infty) = (-\infty;\ -2{,}57) \cup (2{,}57;\ \infty).$$

Keďže pre hodnotu testovacieho kritéria platí $t \notin W_\alpha$, testovanú hypotézu H_0 nemôžeme zamietnuť. To znamená, že predné pneumatiky na automobiloch sledovanej značky sa ojazdia rovnako rýchlo. Pozorované rozdiely nie sú štatisticky významné.

Príklad 6.20 ([8]) Obchodná spoločnosť sa rozhodla zaviesť nový druh predaja pomocou internetu. Vedenie spoločnosti chce zistiť, či tento spôsob predaja zabezpečí vzrast tržieb. Preto bolo náhodne vybraných 16 domácností, u ktorých sa počas dvoch mesiacov sledoval objem ich nákupov v obchodoch tejto spoločnosti v období, keď nemali k dispozícii internetovú službu. Po jej zavedení sa počas ďalších dvoch mesiacov opäť sledoval objem nákupov týchto domácností. Zistené údaje o tržbách a ďalšie potrebné výpočty sú uvedené v tabuľke 6.4.

Riešenie. Pozorovanými znakmi sú znaky X, Y, kde X označuje tržbu v korunách pred zavedením služby a Y tržbu v korunách po zavedení služby. Zistené hodnoty x_i, y_i znakov X a Y a diferencie $d_i = x_i - y_i$ pre $i = 1,2,\dots,n$ sú uvedené v tabuľke 6.4.

Tabuľka 6.4.

domácnosť č. i	x_i	y_i	$d_i = x_i - y_i$
1	6680	8100	-1420
2	3000	2500	500
3	10400	10800	-400
4	1900	2000	-100
5	4240	4000	240
6	600	600	0
7	21100	24000	-2900
8	6000	5300	700
9	700	800	-100
10	2580	4120	-1540
11	800	360	440
12	8800	9780	-980
13	12200	11800	400
14	4160	6200	-2040
15	17600	19900	-2300
16	500	1500	-1000
spolu	-	-	-10500

Budeme predpokladať, že znak X má normálne rozdelenie $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a znak Y normálne rozdelenie $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ a testovať hypotézu o rovnosti stredných hodnôt μ_1, μ_2 oproti pravostrannej alternatívnej hypotéze na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$.

Testovaný problém bude mať tvar:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{oproti} \qquad H_1: \mu_1 < \mu_2 .$$

Použijeme párový t- test. Vypočítame hodnoty $\bar{d}$, s^2, s:

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = -\,656{,}25; \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2 = 1\,243\,371{,}67;$$

$$s = \sqrt{s^2} = 1\,115{,}066$$

a hodnotu testovacieho kritéria:

$$t = \frac{\overline{d}}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{-656{,}25}{1115{,}066} \cdot \sqrt{16} = -2{,}354.$$

V tabuľke č. 12.3 nájdeme kritickú hodnotu $t_{2\alpha}(n-1) = t_{0,1}(15) = 1{,}753$. Kritický obor je množina

$$W_\alpha = (-\infty; -t_{2\alpha}(n-1)) = (-\infty; -1{,}753).$$

Keďže hodnota testovacieho kritéria t je prvkom kritického oboru W_α, na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ zamietame testovanú hypotézu H_0 v prospech alternatívnej hypotézy H_1. To znamená, že zavedením internetovej služby sa zvýšili tržby obchodnej spoločnosti.

6.3.4 Testy extrémnych hodnôt

V praxi sa často stretávame so súbormi, v ktorých sa vyskytujú hodnoty, ktoré sa na prvý pohľad odlišujú od ostatných. Vzniká preto domnienka, že ide o hrubú chybu, ktorá spôsobí skreslenie charakteristík (napr. charakteristiky $\overline{x}$). Napríklad v postupnosti nameraných hodnôt 9,8; 9,56; 9,43; 9,25; 11,95; 9,38; 9,33 je hodnota 11,95 odlišná od ostatných. Aby bolo možné takúto hodnotu zo súboru nameraných hodnôt vylúčiť, musí byť jej odchýlka od ostatných zhodnotená štatistickým testom. Toto vyhodnocovanie sa realizuje pomocou *testu extrémnych hodnôt*.

V prípade, že analyzovaný súbor má normálne rozdelenie, použijeme tzv. Grubbsov test extrémnych hodnôt. Pri testovaní sa skúma pravdepodobnosť, s akou by extrémna hodnota patrila do skupiny hodnôt v prípade, že by išlo o odchýlku v hraniciach náhodného kolísania. Ak je táto pravdepodobnosť malá, uvedenú extrémnu hodnotu vylúčime zo súboru. Ako testovacie kritériá použijeme štatistiky

$$T_n = \frac{X_{(n)} - \overline{X}}{S_G} \quad \text{resp.} \quad T_1 = \frac{X_{(1)} - \overline{X}}{S_G}.$$

Hodnota $x_{(1)}$ je najmenšia a $x_{(n)}$ je najväčšia hodnota v súbore hodnôt usporiadaných podľa veľkosti, t.j. v súbore hodnôt $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$.

$\overline{X}$ je výberový aritmetický priemer a S_G je smerodajná odchýlka. Jej hodnotu budeme počítať podľa vzťahu:

$$s_G = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} \,.$$

Testovacie kritérium T_n použijeme vtedy, ak testujeme extrémnosť najväčšej hodnoty v súbore a testovacie kritérium T_1 použijeme vtedy, ak testujeme extrémnosť najmenšej hodnoty. Vypočítanú hodnotu testovacej štatistiky porovnáme s kritickou hodnotou $T_\alpha(n)$ Grubbsovho testu. Túto hodnotu pre zvolenú hladinu významnosti α a počet stupňov voľnosti n nájdeme v tabuľke č. 12.11.

Ak vypočítaná hodnota testovacej štatistiky T_n resp. T_1 prekročí kritickú hodnotu $T_\alpha(n)$, zamietame nulovú hypotézu na zvolenej hladine významnosti α. Testovanú extrémnu hodnotu zo súboru vylúčime a ďalšie výpočty a z nich vyplývajúce závery robíme už z redukovaného súboru.

Príklad 6.21 Meral sa čas v minútach piatich žiakov, za ktorý vyriešili zadanú úlohu. Výsledky merania spolu s ďalšími pomocnými výpočtami sú uvedené v tabuľke 6.5. Treba overiť, či je hodnota 19,6 zaťažená nenáhodnou chybou.

Tabuľka 6.5.

x_i	x_i^2
18,0	324,00
18,2	331,24
19,6	384,16
18,3	334,89
18,4	338,56
Σ = 92,5	Σ = 1712,85

Riešenie. Pomocou súčtov uvedených v tabuľke vypočítame aritmetický priemer: $\bar{x} = \frac{92{,}5}{5} = 18{,}5$ a hodnotu smerodajnej odchýlky:

$$s_G = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1712{,}85}{5} - (18{,}5)^2} = 0{,}5657.$$

Keďže za extrémnu hodnotu považujeme hodnotu 19,6, ako testovacie kritérium použijeme štatistiku T_n. Vypočítame jej hodnotu:

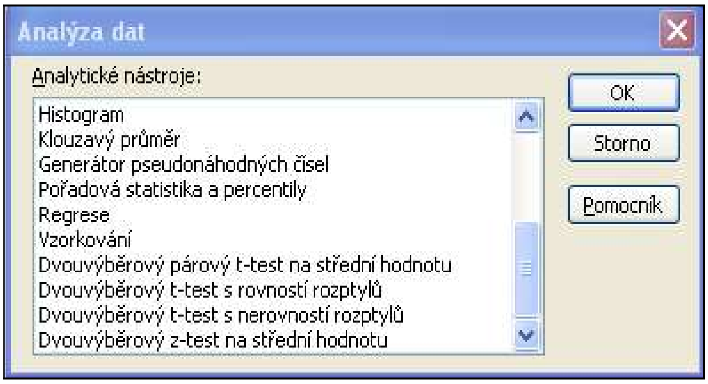
$$T_n = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{s_G} = \frac{19{,}6 - 18{,}5}{0{,}5657} = 1{,}9445.$$

V tabuľke č. 12.11 vyhľadáme príslušnú kritickú hodnotu $T_{0,05}(5) = 1{,}869$. Pretože $T_n > T_{0,05}(5)$, testovanú hypotézu zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$. To znamená, že hodnota 19,6 je zaťažená nenáhodnou chybou, a preto ju pri ďalších analýzach zo súboru vylúčime.

6.4 Testovanie štatistických hypotéz v programe Excel

Pri testovaní štatistických hypotéz pomocou programu Excel z ponuky ***Analýza dát*** vyberieme zvolenú testovaciu metódu. V ponuke ***Analýza dát*** sú zabudované nasledujúce parametrické testy (obr. 6.1):

A) *Dvojvýberový F- test pre rozptyl*
B) *Dvojvýberový t- test s rovnosťou rozptylov*
C) *Dvojvýberový t- test s nerovnosťou rozptylov*
D) *Dvojvýberový párový t- test na strednú hodnotu*
E) *Dvojvýberový z- test na strednú hodnotu*



Obr. 6.1.