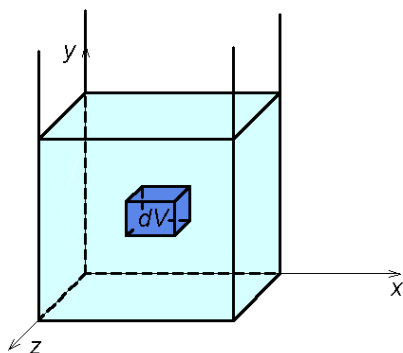


1.1. Základné pojmy mechaniky tekutín

Základným rozdielom medzi tekutinou a tuhým telesom je pohyblivosť molekúl kvapalín a plynov. Tuhé teleso sa pohybuje ako tuhý celok hmotných bodov, ak neprihliadame k nepatrným deformáciám. **Tekutina** je látka, ktorá sa na rozdiel od tuhých telies vždy nevratne deformuje. Nemá vlastný tvar a pri pôsobení nepatrných dotykových síl sa jej častice ľahko uvedú do pohybu (výnimkou sú niektoré anomálne – nenewtonské kvapaliny). Tekutiny tečú v prúde ohraňovanom pevnými stenami alebo tvoria rozhranie (hladiny).

Pri riešení úloh v mechanike tekutín sa vychádza z predstavy tekutiny ako spojitého, rovnorodého prostredia. Rovnorodosťou alebo izotropiou rozumieme rovnaké vlastnosti všetkých čiastočiek kvapaliny nezávisle na ich polohe a smere pôsobenia síl. Tento predpoklad umožňuje výhodne riešiť úlohy mechaniky tekutín na zvolenom, veľmi malom objeme, nazývanom „**elementárny objem tekutiny**“ a odvodené zákonitosti rozšíriť na celý objem.

Ako to už bolo uvedené, jedná sa o objem veľmi malý vzhľadom k rozmeru nádoby či prúdu, avšak dostatočne veľký vzhľadom k strednej voľnej dráhe molekuly. Tento objem si môžeme predstaviť napr. ako objem hranola $dV = dx dy dz$ alebo ako všeobecný objem dV .



obr. 2.1 Elementárny objem kvapaliny

Sily, ktoré môžu pôsobiť na tento elementárny objem tekutiny, je možné rozdeliť všeobecne do dvoch skupín, tj. na **sily hmotnostné** (resp. objemové) a **sily plošné**, ako je znázornené na obr. 2.2.



obr. 2.2 Sily pôsobiace na elementárny objem kvapaliny

Hmotnostné sily (v prípade nestlačiteľnej kvapaliny - objemové) - závisia od hmotnosti makroskopickej častice a zrýchlenia podľa vzťahu $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, pôsobia v ťažisku objemu tekutiny. K vonkajším hmotnostným silám je možné zaradiť tiažovú silu, odstredivú silu a zotrvačnú silu od pohybu nádoby, v ktorej sa tekutina nachádza. Pokiaľ tekutina prúdi, patria

sem sily zotrvačné od vlastného pohybu tekutiny a tiež sily hybnostné. **Plošné sily** sú úmerné veľkosti plochy (tlaková sila, trecia sila, sily povrchového napätia).

V kartézskom súradnicovom systéme sú **sily** definované ako **vektory**, napr. $\vec{F}_p = (F_{px}, F_{py}, F_{pz})$. Pritom veľkosť vektora sa označuje $|\vec{F}_p| = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2 + F_{pz}^2}$.

Pokiaľ sa predpokladá prúdenie jednorozmerné alebo v danom smere, od vektorového označenia sa upúšťa, pretože smer je daný jednoznačne a sila bude zadaná iba veľkosťou, teda súradnicou.

Tekutiny sú látky, ktorých súdržnosť medzi molekulami je veľmi malá. Podľa stlačiteľnosti ich delíme do dvoch skupín:

- **nestlačiteľné tekutiny**, ktoré pôsobením tlaku, normálových síl, len nepatrne menia svoj objem – sem patria **kvapaliny**. Malé objemy kvapalín tvoria kvapky. Kvapaliny vyplňajú tvar nádoby, pôsobením zemskej tiaže vyplňujú jej spodnú časť a vytvárajú voľnú hladinu.
- **stlačiteľné tekutiny**, teda i rozpínavé, ktoré vyplňujú vždy celý objem nádoby. Podľa toho či ich stav je blízko či ďaleko bodu skvapalnenia, sú to buď **pary alebo plyny**. Spoločný názov je vzdušniny.

Charakteristické základné fyzikálne vlastnosti tekutín sú:

A) Špecifická (merná) hmotnosť - hustota

$$\rho = \frac{dm}{dV} \text{ [kg.m}^{-3}\text{]}$$

ktorá je definovaná ako hmota pripadajúca na jednotku objemu. V homogénnej nestlačiteľnej tekutine $\rho = \text{const}$.

Špecifickú hmotnosť zmesi určíme zo vzťahu

$$\rho_z = \frac{\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2 + \dots + \rho_n \cdot V_n}{V_1 + V_2 + \dots + V_n}$$

kde $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ sú špecifické hmotnosti komponentov, $V_1, V_2, \dots, V_n$ sú objemy komponentov zmesí.

B) Špecifický (merný) objem

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm} \text{ [m}^3\text{.kg}^{-1}\text{]}$$

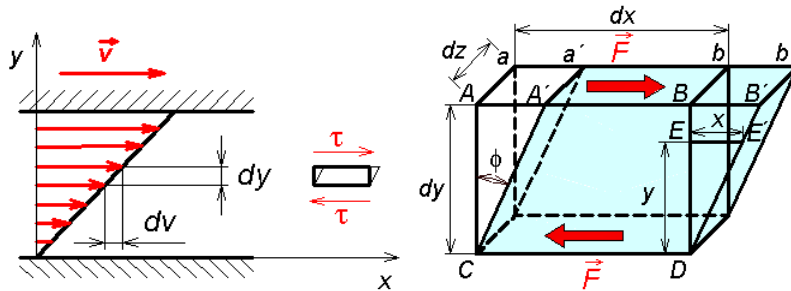
je objem pripadajúci na jednotku hmotnosti. Hustota aj špecifický objem sú pri kvapalinách prakticky konštantné. Pri stlačiteľných tekutinách (pary, plyny) sa veľmi menia s tlakom aj teplotou.

C) Viskozita je vlastnosť prejavujúca sa vnútorným trením, resp. odporom proti pohybu makročastíc tekutiny. Ak sa pohybujú susedné vrstvy tekutiny rôznymi rýchlosťami, vzniká na ich rozhraní šmykové napätie, ktoré bráni pohybu. Pomalšia vrstva je zrýchľovaná a naopak zasa rýchlejšia brzdená. Dotyčnicové (šmykové, tangenciálne) napätie je vyvolané vnútorným

trením, teda viskozitou tekutiny. Šmykové napätie je úmerné zmene rýchlosti v smere kolmom na smer pohybu podľa Newtonovho vzťahu

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} [\text{Pa}]$$

kde η je **dynamická viskozita** (vážkosť) a $\frac{dv}{dy}$ je gradient rýchlosti v smere kolmom na smer pohybu. Šmykové napätie spôsobuje uhlovú deformáciu elementárneho objemu tekutiny.



Šmykové napätie pri laminárnom prúde

Jednotka dynamickej viskozity η sa definuje zo vzťahu pre šmykové napätie

$$[\eta] = \frac{[\tau][y]}{[v]} = \frac{\text{N.s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m.s}} = \text{Pa.s}$$

Rozmer obsahuje jednotku sily, preto bola táto viskozita označená ako dynamická, pretože v dynamike sa riešia príčiny pohybu, tj. sily. Technická sústava jednotiek (stále používaná v príručkách a tabuľkách) zavádza pre jednotku dynamické viskozity označenie 1 P (Poise), čo je $1\text{P} = 1\text{g.cm}^{-1}\text{s}^{-1} = 0,1\text{Pa.s}$.

Všeobecný vzťah na prepočet viskozity kvapalín vzhľadom k teplote:

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + a \cdot t + b \cdot t^2}$$

kde a, b sú konštanty pre danú kvapalinu, η_0 je dynamická viskozita pri $t=0^\circ\text{C}$. Pre vodu je to (Poisselov vzťah):

$$\eta = \frac{0,00176}{1 + 0,0337 \cdot t + 0,000221 \cdot t^2} \text{ Pa.s}$$

Kinematická viskozita je definovaná podielom dynamickej viskozity a hustoty podľa vzťahu

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad [\nu] = \frac{\text{kg}}{\text{ms}} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = \text{m}^2\text{s}^{-1}$$

Rozmer kinematickej viskozity neobsahuje jednotky hmotnosti ani sily. V praxi je dosiaľ stále dôležitá jednotka kinematickej viskozity v sústave technickej – Stokes, pre ktorú platí $1\text{S} = \text{cm}^2\text{s}^{-1} = 10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$.

Viskozita kvapalín sa meria viskozimetrami, z ktorých najbežnejšie sú kapilárne, výtokové, prietokové, rotačné, telieskové a iné. Z merania viskozity kvapalín Englerovým viskozimetrom vyplýva ďalšia jednotka viskozity, a to Englerov stupeň, ktorá sa definuje ako pomer doby výtoku τ skúmanej kvapaliny s objemom 200cm^3 pri danej teplote k dobe výtoku destilovanej vody s teplotou $t = 20^\circ\text{C}$, teda

$$\nu_E = \frac{\tau}{\tau_{H_2O}} \quad [^\circ\text{E}]$$

viskozitu vyjadrenú v Englerových stupňoch je možné previesť na kinematickú viskozitu v SI jednotkách pomocou empirického vzťahu

$$\nu = \left(7,31\nu_E - \frac{6,31}{\nu_E} \right) \cdot 10^{-6} [\text{m}^2\text{s}^{-1}]$$

Dynamická a kinematická viskozita závisí od druhu tekutiny. Ich hodnoty sú pre väčšinu tekutín tabelované. Viskozita každej tekutiny závisí od teploty a tlaku, teda od stavových veličín. Tieto závislosti sú dané poloempirickými rovnicami, ktoré sú uvádzané v odbornej literatúre. Mimo závislosti pre vodu a vzduch, sú technicky dôležité závislosti dynamickej viskozity od teploty, pre minerálne oleje. Tieto závislosti je možné dobre aproximovať exponenciálnou funkciou v tvare

$$\eta = \eta_0 \cdot e^{(-k \cdot T)} \text{ alebo } \eta = \eta'_0 \cdot e^{\frac{A}{t+B}}$$

kde η_0 , η'_0 , k , A , B - sú konštanty, ktoré je nutné pre jednotlivé druhy olejov určiť experimentálne a štatisticky napr. metódou najmenších štvorcov.

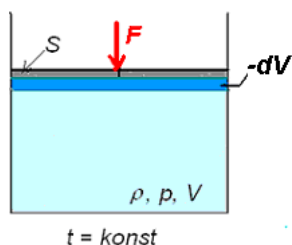
V prípade plynov, tepelný pohyb molekúl prevláda nad silami medzimolekulárnymi, so zvýšením teploty vzrastá rýchlosť tepelného pohybu molekúl a tým vzrastie i viskozita plynu. V prípade kvapalín je to opačne. Tu sú výrazné medzimolekulárne sily oproti tepelnému pohybu molekúl. Zvýšením teploty dochádza k intenzívnejšej výmene hybnosti častíc v pohybujúcich sa vrstvách kvapalín a dotyčnicové napätie sa znižuje. Pri kvapalinách klesá viskozita s rastúcou teplotou.

Tekutosť tekutín je opakom viskozity a tekutosťou sa zaoberá samostatný odbor mechaniky tekutín mechaniky tekutín - reológia.

D) Stlačiteľnosť (objemová stlačiteľnosť) je schopnosť meniť svoj objem pôsobením tlaku. Zatiaľ, čo plyny a pary sa vyznačujú stlačiteľnosťou - rozpínavosťou, pretože vyplňajú celý priestor, v ktorom sú uzavreté, kvapaliny sú veľmi málo stlačiteľné.

Stlačiteľnosť sa vyjadruje súčiniteľom stlačiteľnosti β , kde úbytok objemu vyvolaný stlačením pri konštantnej teplote udáva rovnica

$$\beta_p = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dp} \right) [\text{Pa}^{-1}]$$



Predstavme si, že na počiatku je v nádobe kvapalina s hustotou ρ , objemom V a tlakom p , vid' **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov..** Sila F pôsobiaca na plochu piestu S vyvolá zmenu tlaku Δp . Objem kvapaliny pod piestom sa zmenší o ΔV , takže po stlačení zaberá kvapalina objem $V_0 = V - \Delta V$ a tlak sa zvýši na $p_0 = p + \Delta p$. V_0 , p_0 , ρ_0 sú objem, tlak a hustota kvapaliny po stlačení.

Po dosadení rozdielov objemov a tlakov pred a po stlačení do rovnice dostaneme vzťah

$$\beta_p = -\frac{1}{V} \frac{(V - V_0)}{(p - p_0)} = \frac{1}{V} \frac{(V - V_0)}{(p_0 - p)} = \frac{\Delta V}{V \Delta p} [\text{Pa}^{-1}]$$

ktorý vyjadruje zmenu objemu kvapaliny $\Delta V = V - V_0$ pripadajúcu na jednotku pôvodného objemu V pri zmene tlaku $\Delta p = (p_0 - p)$.

Z predchádzajúcich rovníc vyplýva vzťah pre objem kvapaliny po stlačení

$$V_0 = V - \Delta V = V - \beta_p V \Delta p = V(1 - \beta_p \Delta p)$$

Hustota po stlačení je daná rovnicou

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{m}{V(1 - \beta_p \Delta p)} = \frac{\rho}{(1 - \beta_p \Delta p)}$$

Prevrátená hodnota súčiniteľa objemov stlačiteľnosti je modul objemovej pružnosti resp. modul pružnosti v šmyku

$$K = \frac{V \Delta p}{\Delta V} = \frac{1}{\beta_p} [\text{Pa}]$$

Pri stláčaní kvapaliny sa jej hmotnosť nemení, preto je možné písať $m = \rho V = \text{konst.}$ Diferencovaním sa dosiahne $\rho \cdot dV + V \cdot d\rho = 0$, z čoho pre mernú objemovú zmenu vyplýva

vzťah $\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$. Po dosadení do definičného vzťahu $\beta_p = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dp} \right)$ sa modul objemovej

pružnosti kvapaliny vyjadrí vzťahom $K = \rho \frac{dp}{d\rho}$.

Rozmer modulu objemovej pružnosti kvapalín K pripomína modul pružnosti v ťahu tuhých látok. Pre vodu je modul objemovej pružnosti $K \cong 2,1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$. Všeobecne závisí od stavových veličín, tj. tlaku a teploty.

Zmenu objemu s tlakom vypočítame zo vzťahu

$$V = V_0 \cdot [1 - \beta_p \cdot (p - p_0)]$$

E) Rýchlosť zvuku, tj. šírenie malých tlakových porúch, ktoré je sprevádzané zmenou hustoty.

Teoretická rýchlosť šírenia zvuku v kvapaline je daná vzťahom

$$a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} [\text{ms}^{-1}]$$

Pre šírenie zvuku vo vode po dosadení za K a ρ dostaneme

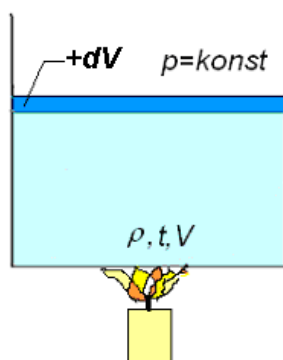
$$a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^9}{1000}} = \sqrt{2,1 \cdot 10^6} = 1449 [\text{ms}^{-1}]$$

Pre teoretickú **rýchlosť zvuku vo vzduchu** platí za predpokladu izoentropickej (adiabatickej) stavovej zmeny (pri $T = 273,15 \text{ K}$ a mernej plynovej konštanty $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

$$a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa r T} = 331 [\text{ms}^{-1}]$$

F) Teplotná rozťažnosť kvapalín je schopnosť kvapaliny meniť svoj objem s teplotou. Vyjadruje ju teplotný súčiniteľ objemovej rozťažnosti resp. súčiniteľ teplotnej rozťažnosti.

$$\beta_t = \frac{1}{V} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right)_{p=\text{konst}}$$



Predstavme si, že na počiatku je v nádobe kvapalina s hustotou ρ , teplotou t a objemom V . Po zahriati kvapaliny je jej teplota vyššia o Δt a kvapalina zaberá objem $V_0 = V + \Delta V$. Objem, teplota a hustota kvapaliny po zahriati sú V_0 , t_0 , ρ_0 . Po dosadení rozdielu objemov a teplôt po a pred zahriatím, do rovnice dostaneme vzťah, ktorý vyjadruje zmenu objemu kvapaliny $\Delta V = V_0 - V$ pripadajúcu na jednotku pôvodného objemu V pri zmene teploty $\Delta t = (t_0 - t)$.

$$\beta_t = \frac{1}{V} \frac{V_0 - V}{t_0 - t} = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta t} \quad [^{\circ}\text{C}^{-1}]$$

Hustota po zahriatí je daná nasledujúcou rovnicou.

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{m}{V(1 + \beta_t \Delta t)} = \frac{\rho}{(1 + \beta_t \Delta t)} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$$

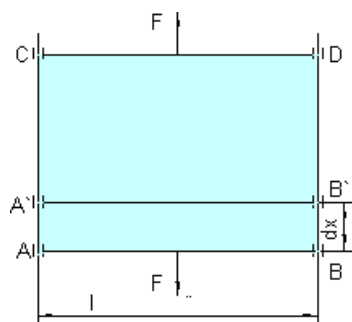
Zmenu objemu vypočítame zo vzťahu

$$V = V_0 \cdot [1 - \beta_t \cdot (t - t_0)] \quad [^{\circ}\text{C}^{-1}]$$

G) Povrchové napätie je definované ako pomer povrchovej energie k ploche rozhrania alebo ako sila, ktorá pôsobí na jednotku dĺžky rozhrania, a to kolmo k tejto dĺžke v rovine povrchu.

$$\sigma = \frac{E_a}{S} = \frac{F}{l} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]$$

Kvapalina na rozhraní (hladina, stena) sa vyznačuje odlišnými vlastnosťami, typickými pre ostatný objem kvapaliny. Molekuly na rozhraní majú vyššiu potenciálnu energiu oproti molekulám vo vnútri kvapaliny a rozhranie kvapaliny sa javí ako potiahnuté veľmi tenkou a napätou vrstvou.

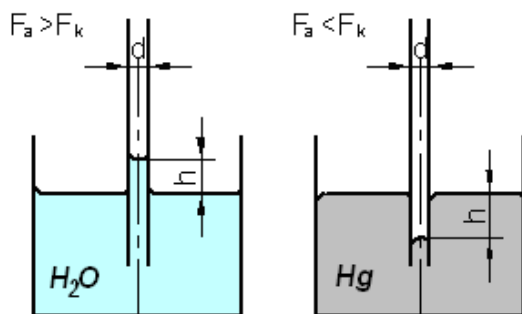


Príkladom môže byť napr. sila, ktorou je mydlová blana roztáhovaná v rámečku s posuvnými tyčkami AB a CD (každá s dĺžkou l), vid' **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov..** Sila je daná výrazom $F = \sigma \cdot l$, pretože dĺžka namáhaného povrchu je l a povrchové napätie je σ . Ak sa zväčší povrch blany o dĺžku dx , vykoná sa práca $dA = F dx = \sigma l dx$. Touto prácou sa zväčší povrchová energia kvapaliny.

Účinky povrchového napätia sa prejavujú napríklad vzliňaním pri stenách nádoby, tvorbou kvapiek, pri vytváraní vln na hladine, zúžením lúča kvapaliny a jeho rozpadom, stúpaním, alebo klesaním stĺpca kvapaliny v kapiláre.

Kapilarita sa vyskytuje pri trubičkách veľmi malého priemeru – kapilár, alebo v poréznom prostredí. Keď adhézne (prilnavé) sily sú väčšie než kohézne (súdržné), vystupuje kvapalina v kapiláre do výšky h . V opačnom prípade, keď kohézne sily sú väčšie než adhézne, zostáva kvapalina v kapiláre o výšku h nižšie než je hladina okolitej kvapaliny. Príslušné výšky h je možné spočítať z podmienky rovnováhy medzi gravitačnými silami a povrchovými silami.

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g d}$$



H) Tlak nasýtených pár je tlak pri ktorom je odparená kvapalina nahradená rovnakým množstvom skondenzovanej kvapaliny. Čím je tlak nasýtených pár kvapaliny pri danej teplote vyšší, tým je kvapalina prchavejšia. Tlak nad hladinou musí byť vyšší, ako je tlak nasýtených pár, inak by došlo k prudkému odpareniu (varu). Ak klesne tlak v kvapaline pod hodnotu tlaku nasýtených pár, dochádza ku kavitácii (vznik bublín vyplnených parou a ich následný zánik). Kavitácia (studený var) spôsobuje účinkom implózie bublín kavitačnú eróziu a vplyvom vzniku bublín diskontinuitu kvapalného prostredia.

Kavitáciu charakterizujeme pre danú kvapalinu a pri určitej teplote tzv. kavitačným číslom

$$\chi = \frac{p_{\infty} - p_w}{\rho \cdot v_{\infty}^2} [-]$$

kde p_{∞} , v_{∞} sú hodnoty neovplyvneného tlaku a rýchlosti, p_w je tlak (napätie) nasýtených pár pri danej teplote.

2. Tlakové pomery v kvapaline v pokoji

Hydrostatika sa zaoberá skúmaním síl pôsobiacich na kvapalinu v pokoji. Rovnováha síl v pokoji nastane vtedy, keď jej častice sa voči sebe nepohybujú, to znamená, že tvar objemu kvapaliny sa nemení. V tom prípade je v skutočnej kvapaline šmykové (tangenciálne) napätie od viskozity nulové a všetky rovnice platia i pre skutočnú kvapalinu. Do hydrostatiky patria aj prípady relatívneho pokoji, kedy kvapalina voči stenám je v pokoji, ale celá sústava (nádrž + kvapalina) konajú pohyb.

Plošné sily (tiež povrchové) pôsobia na povrch uvažovaného objemu kvapaliny, preto ich veľkosť závisí od veľkosti plochy a sú dané tlakom kvapaliny na danú plochu.

$$F_p = p \cdot S \text{ [N]}$$

Hmotnostné sily sú úmerné hmotnosti (objemu kvapaliny pre kvapalinu s konštantnou hustotou) a sú dané zrýchlením daného objemu (napr. tiaž kvapaliny, odstredivá sila apod.).

$$F_o = a \cdot m = a \cdot \rho \cdot V \text{ [N]}$$

2.1. Tlak a jeho pôsobenie

Tlak kvapaliny je **daný veľkosťou tlakovej sily, pôsobiaci kolmo na jednotku plochy**. Ak je tlaková sila rovnomerne rozložená, je tlak daný pomerom veľkosti sily a plochy

$$p = \frac{|\vec{F}|}{S}$$

Pri nerovnomernom rozložení sily je daný všeobecne

$$p = \frac{d|\vec{F}|}{dS} \text{ a označuje sa ako miestny tlak.}$$

Tlaková sila v hydrostatike pôsobí vždy kolmo na plochu. Tlak pôsobí v danom mieste kvapaliny všetkými smermi rovnako a nezávisí na sklonu plochy, tzn., že **tlak je skalárna veličina**. Tento zákon platí všeobecne. Je treba poznamenať, že v inom mieste kvapaliny bude hodnota tlaku všeobecne iná, matematicky vyjadrená $p = p(x, y, z)$.

2.2. Eulerova rovnica hydrostatiky

Eulerova rovnica hydrostatiky je všeobecná podmienka rovnováhy síl pôsobiacich na tekutinu v pokoji, a to síl hmotnostných a tlakových. V ľubovoľnom objeme tekutiny sa zvolí kontrolný objem $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Na tento objem tekutiny pôsobí vektor hmotnostnej resp.

vonkajšej objemovej sily $\vec{F}_o$ so súradnicami F_{ox}, F_{oy}, F_{oz} , teda je možné zapísať

$\vec{F}_o = (F_{ox}, F_{oy}, F_{oz})$ (napr. gravitačná alebo odstredivá sila) a vektor tlakovej sily

$\vec{F}_p = (F_{px}, F_{py}, F_{pz})$. **Vektorový súčet hmotnostnej a tlakovej sily je rovný nule.**

$$\vec{F}_o + \vec{F}_p = 0$$

Pretože hmotnostná sila nie je v celom objeme tekutiny konštantná, je nutné definovať diferenciál tejto sily pre elementárny objem dV ako vektor

$$d\vec{F}_o = \vec{a} dm = \rho \vec{a} dV$$

kde zrýchlenie hmotnostnej sily je vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Celková sila je tak daná trojným integrálom $\vec{F}_o = \iiint_V \vec{a} \rho dV$.

Diferenciál tlakovej sily v smere vonkajšej normály na plochu elementárneho objemu je daný všeobecne v tvare

$$d\vec{F}_p = p \vec{n} dS$$

Pritom skalárna veličina p je tlak, $\vec{n}$ je vonkajšia normála k elementu dS uzavretej plochy. Pretože **tlaková sila v hydromechanike je definovaná v smere vnútornej normály**, je nutné túto tlakovú silu definovať so znamienkom mínus, teda

$$d\vec{F}_p = -p \vec{n} dS$$

a celková tlaková sila je opäť daná integrálom, ale plošným $\vec{F}_p = \iint_S -p \vec{n} dS$.

Eulerova rovnice hydrostatiky v integrálnom tvare je definovaná súčtom hmotnostných a objemových síl:

$$\iiint_V \vec{a} \rho dV - \iint_S p \vec{n} dS = 0$$

Plošný integrál je možno podľa Gauss Ostrogradského vety nahradiť objemovým integrálom:

$$\iiint_V \vec{a} \rho dV - \iiint_V \text{grad} p dV = 0$$

kde **gradient** je vektor derivácie tlaku podľa x, y, z $\text{grad} p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$

Rovnica platí pre ľubovoľný objem V , bude teda platiť i pre výraz pod integrálom

$$\vec{a} \rho - \text{grad} p = 0$$

Tento výraz je možné po vydelení hustotou rozpísať súradnicami do klasického diferenčného tvaru

$$a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

2.3. Hladinové plochy

Hladinové plochy sú miesta s konštantnou hodnotou skalárnej veličiny tlaku, tj. $p = \text{konst}$. Prírastok tlaku medzi dvoma bodmi ležiacimi na rovnakej hladine musí byť rovný

nule, tj. $dp = 0$, čo platí i pre súmedzné body. Podľa rovnice sa dosiahne všeobecná rovnice hladinových plôch v diferenciálnom tvare

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0 \quad (2.3.1)$$

Hladinové plochy sú vždy kolmé na výslednú hmotnostnú silu. Hladinové plochy majú v úlohách hydrostatiky veľký význam, predovšetkým však hladinová plocha rozhraní medzi okolitým ovzduším a kvapalinou. Sú to **plochy konštantného potenciálu, teploty, hustoty**.

Na kvapalinu v nádobe v pokoji pôsobí z hmotnostných síl len zemská tiaž. V ľubovoľnom mieste kvapaliny bude tlak $p(x,y,z)$ určený diferenciálnou rovnicou odvodenou v predchádzajúcich odstavcoch.

$$dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz)$$

Pri pôsobení len zemskej tiaže sú súradnice zrýchlenia definované nasledovne

$$a_y = -g$$

$$a_x = a_z = 0$$

Zrýchlenie zemskej tiaže je nutne dosadiť so záporným znamienkom, pretože tiaž pôsobí v opačnom zmysle, než je zvolená orientácia osy y . Diferenciálna rovnica sa teda zjednoduší

$$dp = -\rho g dy$$

a integrál je

$$p = -\rho g y + konst.$$

Integračná konštanta sa určí z okrajovej podmienky. Na rozhraní kvapaliny a vzduchu je tlak ovzdušia, tj. pre $y = h_0$ je $p = p_0$. Dosadením do poslednej rovnice sa vypočíta integračná konštanta:

$$p_0 = -\rho g h_0 + konst \Rightarrow konst = p_0 + \rho g h_0$$

a hľadaná závislosť tlaku je

$$p = -\rho g y + p_0 + \rho g h_0 = p_0 + \rho g (h_0 - y)$$

Nech je $h = h_0 - y$ zvislá vzdialenosť uvažovaného miesta v kvapaline od hladiny tlaku ovzdušia, potom

$$p = p_0 + \rho g h$$

Ak uvažovaný bod leží pod hladinou, je $h > 0$ (kladné); keď je bod vyššie než hladina tlaku ovzdušia je $h < 0$ (záporné). Uvedený vzťah platí pre nestlačiteľné kvapaliny, na ktoré pôsobí zemská tiaž, lebo pri integrácii bola merná hmotnosť považovaná za konštantnú.

Tlakové hladiny v kvapaline pri pôsobení tiaže sú vodorovné roviny, pretože sa predpokladá, že nádoba s tekutinou nie je rozľahlá tak, aby bolo nutné prihliadať k zakriveniu povrchu zemského. Za tohto predpokladu je rovnica tlakových hladín

$$dp = -g dy = 0$$

čo vyplýva zo všeobecnej diferenciálnej rovnice pre tlakové hladiny po dosadení hmotnostných síl uvažovaného prípadu $a_y = -g$, $a_x = a_z = 0$. Integráciou sa dosiahne rovnica tlakových hladín $gy = konst \Rightarrow y = konst$, čo sú rovnice vodorovných plôch.

Pri riešení technických úloh hovoríme o pretlaku, podtlaku alebo absolútnom tlaku. Tlak sa dá vyjadriť absolútnou alebo relatívnou hodnotou. Absolútny tlak je vzťahnutý k absolútnej

nule, tj. k vákuu, zatiaľ čo relatívny tlak je vzťahnutý od dohodnutej hodnoty tlaku, ktorým je tlak vzduchu.

$$p_{abs} = p_0 + p_{rel}$$

kde p_{abs} je absolútny tlak, p_{rel} je relatívny tlak a p_0 je atmosférický tlak. Porovnaním s výrazom $p = p_0 + \rho gh$ vyplýva, že tlak takto definovaný je **absolútny tlak**, a **relatívny tlak** je daný vzťahom $p = \rho gh$. Kladná hodnota relatívneho tlaku sa nazýva **pretlak** a záporná hodnota relatívneho tlaku sa nazýva **podtlak** (Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.). K označeniu absolútnej a relatívnej hodnoty tlaku sa nepoužívajú indexy, avšak je potrebné údaj doplniť, o aký tlak ide, napr. $p = 8 \cdot 10^5 \text{ Pa abs.}$; $p = 7,1 \cdot 10^4 \text{ Pa rel.}$ Relatívny tlak daný vzťahom $p = \rho gh$ v kvapaline je nazývaný **hydrostatický tlak**, vyjadrujúci tlak stĺpca kvapaliny v hĺbke h pod hladinou. Pretože tlak kvapaliny závisí od výšky stĺpca kvapaliny a jej hmotnosti

$p = \rho gh$, je možné tlak vyjadriť výškou kvapalinového stĺpca, tj. stanoviť **tlakovú výšku**

$$h = \frac{p}{\rho g} \text{ v metroch.}$$

2.4. Relatívny pokoj kvapaliny

Pri pohybe nádoby s kvapalinou môžu nastať prípady, kedy je kvapalina voči stenám nádoby v pokoji. Na kvapalinu pôsobia objemové (hmotnostné) sily od vlastného pohybu nádoby s kvapalinou, ktorú je nutné zahrnúť do podmienok hydrostatickej rovnováhy.

- A) Ak sa nádoba pohybuje priamočiaro v zvislom smere konštantným zrýchlením a , tlak v ľubovoľnom bode daný vzťahom

$$p = p_0 + \rho \cdot (g \pm a) \cdot h$$

Plochy konštantného tlaku (aj hladinová plocha) budú horizontálne roviny

- B) Ak sa nádoba pohybuje priamočiaro vodorovným smerom konštantným zrýchlením a a tlak v ľubovoľnom bode bude daný vzťahom

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

Kde h je zvislá vzdialenosť od hladiny. Plochy konštantného tlaku sú roviny naklonené pod uhlom

$$\alpha = \arctg \frac{a}{g} \text{ k horizontálnej rovine}$$

- C) Ak nádoba rotuje okolo vertikálnej osi, plochy konštantného tlaku sú rotačné paraboloidy s rovnicou

$$z = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2 \cdot g} + C$$

a tlak v ľubovoľnom bode kvapaliny je daný vzťahom

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h + \rho \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2}$$

Pričom r je polomer dráhy, na ktorej bod rotuje a ω je uhlová rýchlosť otáčania

- D) Ak nádoba rotuje okolo horizontálnej osi rotácie, plochy konštantného tlaku sú kružnice s rovnicou

$$x^2 + (z - g/\omega^2)^2 = C^2$$

a tlak možno vypočítať zo vzťahu ako pri rotácii okolo zvislej osi (ak je nádoba naplnená po os).

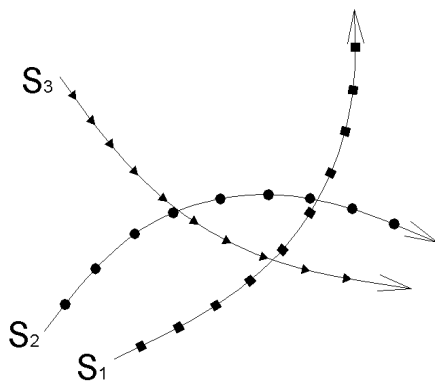
3. Úvod do prúdenia tekutín

Prúdenie znamená pohyb tekutín. Prúdením kvapalín sa zaoberá **hydrodynamika**. Prúdenia reálnych kvapalín je zložitý proces, ktorý je ovplyvňovaný množstvom faktorov. Pri skúmaní tohto pohybu sa teda zámerne zavádza určitá idealizácia. Najznámejším, a pre skúmanie najjednoduchším príkladom, je pohyb tzv. ideálnej (neviskózne) kvapaliny. Aplikovaná hydrodynamika prihliada viac na skutočné pomery, opiera sa o výsledky experimentálnych prác a využíva teoretické poznatky a je nazývaná tiež hydraulikou.

Aerodynamika potom skúma silové pôsobenia na telesá, ktoré sú obtekané prúdom vzduchu. Aerodynamika má najväčší význam v letectve, automobilizme a architektúre.

Prúdenie sa vyšetruje v priestore, rovine alebo po krivke buď sledovaním pohybu určité častice tekutiny ako hmotného bodu, alebo sa sleduje celý prúd v určitom časovom okamihu.

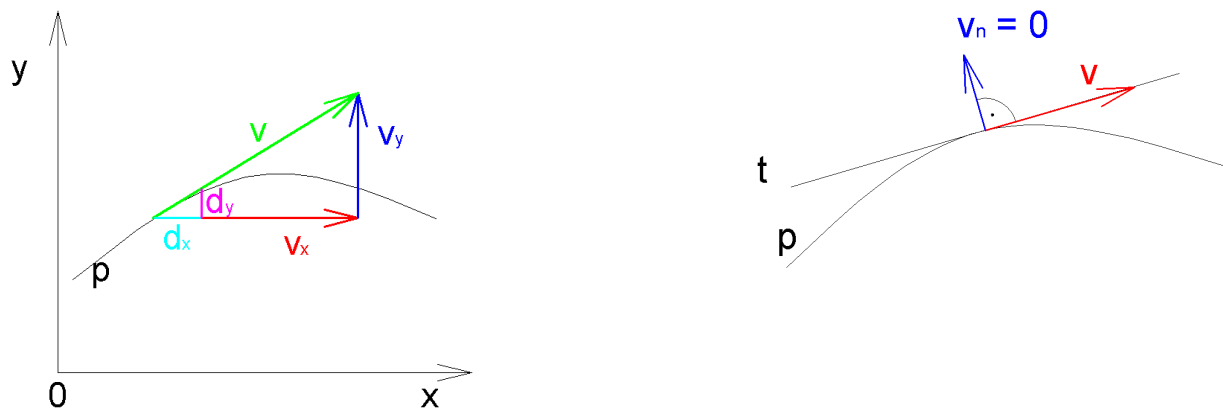
Dráha alebo trajektória je čiara, ktorá zobrazuje pohyb častice tekutiny. Za ustáleného prúdenia sa dráhy častíc nemenia s časom, zatiaľ čo pri neustálenom prúdení môžu byť v každom časovom okamihu odlišné



Prúdnice p (viď -obr. 5.2) sú obálkou vektorov rýchlosti a ich dotyčnice udávajú smer vektoru rýchlosti. Pri neustálenom prúdení vytvárajú prúdnice rôzne častice a nie sú totožné s dráhami častíc. Pri ustálenom prúdení sa nemenia rýchlosti s časom, a preto majú prúdnice stále rovnaký tvar a sú totožné s dráhami častíc. Matematické vyšetrenie prúdnice je možné riešením diferenciálnej rovnice

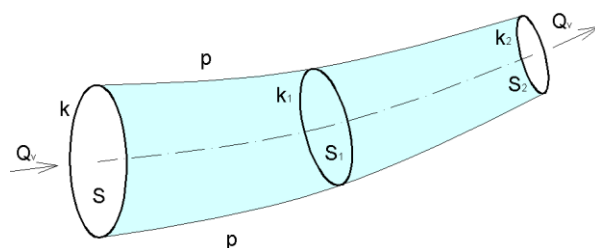
$$dx:dy:dz = v_x:v_y:v_z$$

ktorá vyplýva z podobnosti trojuholníkov zložiek rýchlosti a elementárnych dráh v smere príslušných osí



Prúdová trubica je tvorená zväzkom prúdnic, ktoré prechádzajú zvolenou uzavretou krivkou k . Plášť prúdovej trubice má rovnaké vlastnosti ako prúdnic. Pretože smer rýchlosti je daný dotyčnicami k prúdniciam, je v každom bode plášťa prúdovej trubice normálová zložka rýchlosti nulová $v_n = 0$. Nemôže teda žiadna častica prejsť stenou prúdovej trubice.

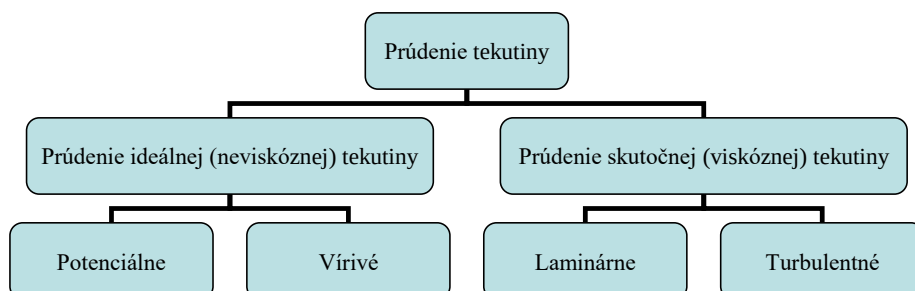
Prúdová trubica rozdeľuje priestorové prúdové pole na dve časti. Jednu tvorí vnútro prúdovej trubice. Častice tekutiny nemôžu pretekať z jednej časti prúdového poľa do druhého, a preto platí, že všetky častice pretekajúce prierezom S prúdovej trubice, musia pretekať ľubovoľnými prierezmi S_1, S_2 tejto prúdovej trubice. Ak prierez prúdovej trubice $S \rightarrow 0$, získa sa prúdové vlákno. Prúdová trubica predstavuje pomyselné potrubie.



3.1. Rozdelenie prúdení

Prúdenie kvapalín je možno rozdeliť podľa niekoľkých hľadísk:

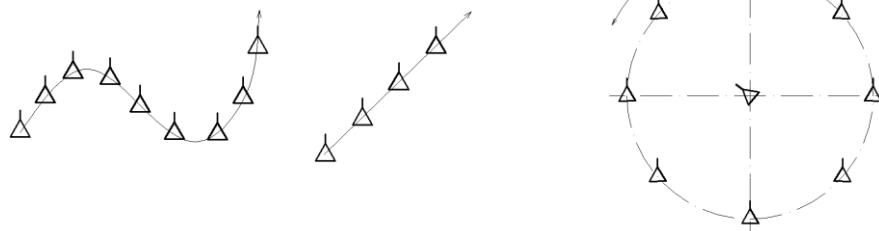
3.1.1. Delenie podľa fyzikálnych vlastností tekutiny



Prúdenie ideálnej (dokonalej) tekutiny

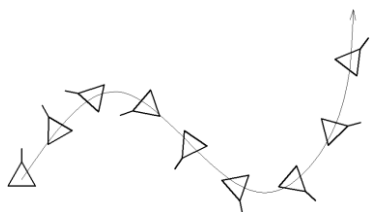
1) Potenciálne prúdenie (nevírivé)

Častice tekutiny sa pohybujú priamočiare alebo krivočiare po dráhach tak, že voči pozorovateľovi sa neotáčajú okolo vlastnej osi vid' obr. 5.5. Natočenie častice na krivej dráhe je kompenzované rovnako veľkým natočením častice okolo vlastnej osi, ale v opačnom zmysle. Medzi potenciálne prúdení patrí rovnako potenciálny vír, u ktorého častica krúži okolo vírového vlákna potenciálne s výnimkou častice, ktorá tvorí vlákno vid' obr. 5.6.



2) Vírivé prúdenie

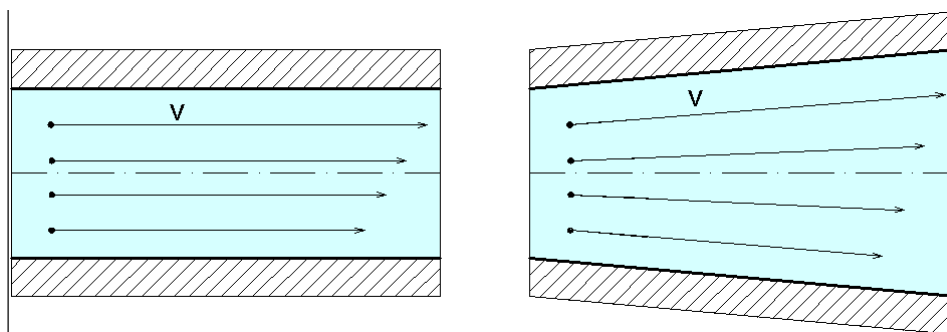
Častice tekutiny sa voči pozorovateľovi natáčajú okolo vlastných osí vid' **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.**



Prúdenie skutočnej (viskózne) tekutiny

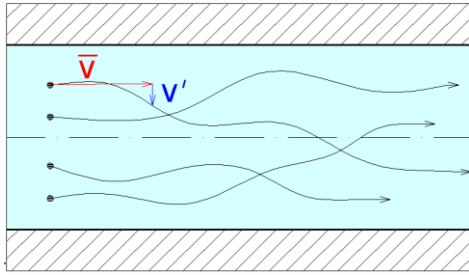
1) Laminárne prúdenie

Častice tekutiny sa pohybujú v tenkých vrstvách, bez toho aby sa premiestňovali po priereze

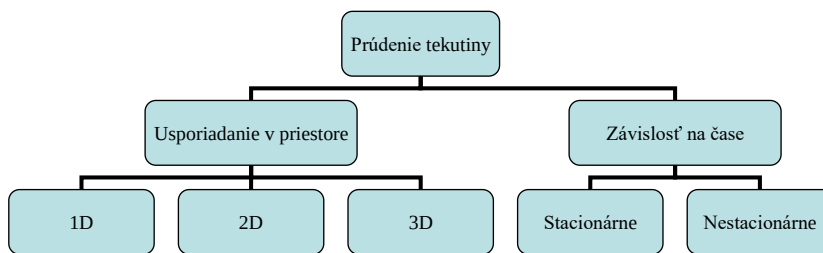


2) Turbulentné prúdenie

Častice tekutiny majú okrem pozdĺžnej rýchlosti tiež turbulentnú (flukтуаčnú) rýchlosť, ktorou sa premiestňujú po priereze vid' **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov..**



3.1.2. Delenie podľa kinematických hľadísk



Podľa usporiadania v priestore

- Prúdenie trojrozmerné teda priestorové (3D) - veličiny, napr. rýchlosť, závisia od polohy v priestore $v = v(x, y, z)$
- Prúdenie dvojrozmerné teda rovinné (2D) - rýchlosť závisí od polohy v rovine $v = v(x, y)$
- Prúdenie jednorozmerné (1D) - rýchlosť závisí od polohy na krivke $v = v(s)$

Podľa závislosti na čase

- Prúdenie ustálené (stacionárne), ktoré je nezávislé na čase $v \neq v(t)$; $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Prúdenie neustálené (nestacionárne), u ktorého veličiny sú závislé na čase – $v = v(x, y, z, t)$; $v = v(s, t)$; $v = v(t)$.

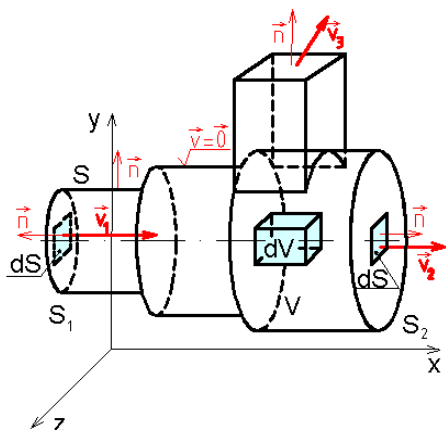
4. Základné rovnice pre prúdenie ideálnej tekutiny

4.1. Rovnica kontinuity

Rovnica kontinuity, často nazývaná tiež rovnica spojitosti, vyjadruje všeobecný fyzikálny **zákon zachovania hmotnosti**. Pre elementárny objem, ktorým prúdi tekutina, musí byť hmotnosť tekutiny konštantná $m = konst$, a teda celková zmena hmotnosti nulová $dm = 0$. V kontrolnom objeme môžu nastať dve zmeny hmotnosti a to lokálna a konvektívna, kde **lokálna (časová) zmena** prebieha v elementárnom objeme (tekutina sa stláča alebo rozpína) a **konvektívna zmena** je spôsobená rozdielom hmotnosti pritekajúcej a vytekajúcej tekutiny z elementárneho objemu. Súčet konvektívnej a časovej zmeny prietoku je rovný nule.

Rovnicu kontinuity je možné definovať tiež tak, že rozdiel vstupujúcej hmotnosti do kontrolného objemu a vystupujúcej hmotnosti z kontrolného objemu je rovný hmotnosti, ktorá sa v tomto kontrolnom objeme akumuluje. V technickej praxi je najbežnejší prípad jednorozmerného prúdenia.

Pri odvodení rovnice kontinuity pre priestorové prúdenie sa vytkne v prúdovom poli tekutiny elementárny objem $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Týmto hranolom preteká tekutina rýchlosťou, ktorá je určená vektorom so súradnicami $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.



Zmeny spôsobené konvekciou

Hmotnostný prietok elementom plochy označenej dS je daný vzťahom:

$$dQ_m = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS,$$

kde vektor rýchlosti sa násobí skalárne vonkajším normálovým vektorom vzhľadom k ploche dS , lebo prietok je definovaný v smere kolmom k prietocnej ploche dS . Celkový prietok plochou S ohraničujúci objem V je určený plošným integrálom:

$$Q_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

$$Q_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Časová zmena

Hmotnosť je tiež definovaná vzťahom $m = \rho V$. Pretože hustota nemusí byť v celom objeme konštantná, definuje sa hmotnosť v elementárnom objeme:

$$dm = \rho dV$$

Potom celková hmotnosť objemu je rovná

$$m = \iiint_V \rho dV$$

Za krátky časový okamih sa táto hmotnosť zmení a táto zmena je daná parciálnou deriváciou podľa času, čo reprezentuje prítok:

$$Q_m = \iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV = \iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dx dy dz$$

Podľa zákona zachovania hmotnosti (resp. hmotnostného prítoku) platí, že **súčet konvektívnej a časovej zmeny prítoku je rovný nule**:

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dx dy dz + \iiint_V \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz = 0$$

Pretože predchádzajúci vzťah platí pre ľubovoľný objem V , je možné zapísať rovnicu kontinuity v diferenciálnom tvare:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Táto rovnica je **všeobecná rovnica kontinuity pre neustálené priestorové prúdenie stlačiteľnej tekutiny**.

Pri **ustálenom prúdení** sa nemenia veličiny v čase, a preto musí byť $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ a rovnica kontinuity **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.** má diferenciálny tvar:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Ďalšie zjednodušenie nastáva pri **nestlačiteľných tekutinách** ($\rho = \text{konst.}$). Rovnica kontinuity je potom vyjadrená vzťahom v diferenciálnom tvare:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Zavedie sa pojem **divergencie vektora** pre skrátený zápis rovnice kontinuity :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$$

pomocou ktorého sa rovnica kontinuity prevedie na tvar:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

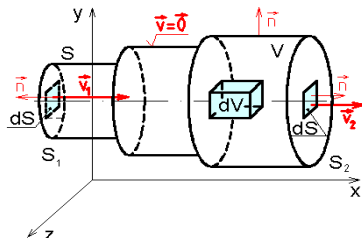
Pre ustálené prúdenie je zápis jednoduchší:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Pre nestlačiteľné prúdenie je:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

Pre jednorozmerné neustálené prúdenie stlačiteľnej tekutiny sa uvažuje s prúdovou trubicou s premenným prierezom, čo je bežný systém riešení potrubí v technickej praxi.



Z definície prúdovej trubice vyplýva, že tekutina prúdi vo vnútri prúdovej trubice a nepreteká cez jej plášť. Normálová rýchlosť plášťom prúdovej trubice je teda nulová ($v_n = 0$). Rozloženie rýchlosti po priereze prúdovej trubice sa uvažuje rovnomerné. Pri nerovnomernom rozložení rýchlosti po priereze sa uvažuje jej stredná rýchlosť.

Ako už bolo povedané, zo zákona zachovania hmotnosti platí vzťah:

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

ktorý má pre ustálené prúdenie tvar

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Pretože rýchlosť na stene prúdovej trubice je rovná nule, je možno uvažovať prietoky len cez prietokné plochy v smere prúdenia l . Plošný integrál je potom možno vyčísliť ako súčet prietokov jednotlivými plochami:

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho_2 v_2 S_2 - \rho_1 v_1 S_1 = 0,$$

čo znamená, že **hmotnostný prietok trubicou** $Q_m = \rho v S$ **je konštantný**. Druhý výraz má znamienko mínus z dôvodu opačnej orientácie rýchlosti na vstupe do prúdovej trubice proti normálovému vektoru von z plochy.

Pre nestlačiteľné prúdenie je:

$$v_2 S_2 - v_1 S_1 = 0$$

teda **objemový prietok** $Q_v = v S$ **je konštantný**.

4.2. Eulerova rovnica pre prúdenie ideálnej tekutiny

Eulerova rovnice pre prúdenie ideálnej tekutiny vyjadruje rovnováhu síl hmotnostných (objemových), ktoré pôsobia na tekutinu z vonka, tlakových (pôsobiacich v tekutine) a zotrvačných od vlastného pohybu častíc dokonalej tekutiny.

Pozn.: V skutočnej (viskózne) tekutine vznikajú pri prúdení vedľa normálových napätí, tj. tlakov, i dotyčnicové napätia, ktorých dôsledkom sú sily trecie, ktoré je nutné do podmienky rovnováhy síl tiež zahrnúť.

V prúde dokonalej tekutiny zvolíme elementárny objem dV ako v predošlom odvodení. Na tento objem tekutiny pôsobí vonkajšia objemová sila $\vec{F}_o = (F_{ox}, F_{oy}, F_{oz})$ (napr. gravitačná alebo odstredivá sila) a tlaková sila $\vec{F}_p = (F_{px}, F_{py}, F_{pz})$. Výslednice týchto síl sa rovná zotrvačnej sile $\vec{F}_s = (F_{sx}, F_{sy}, F_{sz})$, vid' **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov..**

Východzia podmienka rovnováhy síl je teda vyjadrená vzťahom

$$\vec{F}_o + \vec{F}_p = \vec{F}_s$$

Diferenciál zotrvačnej sily pohybujúcej sa častice tekutiny je daná zrýchlením $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ a platí

$$d\vec{F}_s = \frac{D\vec{v}}{Dt} dm = \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV$$

Celková zotrvačná sila je opäť definovaná objemovým integrálom $\vec{F}_s = \iiint_V \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV$.

Eulerova rovnica pre prúdenie ideálnej tekutiny v integrálnom tvare je definovaná súčtom hmotnostných, tlakových a zotrvačných síl:

$$\iiint_V \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV = \iiint_V \vec{a} \rho dV - \iint_S p \vec{n} dS$$

$$\iiint_V \frac{D\vec{v}}{Dt} \rho dV = \iiint_V \vec{a} \rho dV - \iiint_V \text{grad} p dV$$

kde **gradient** je vektor derivácie tlaku podľa x, y, z $\text{grad} p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$. Vzťah platí pre ľubovoľný objem tekutiny, bude teda platiť i pre výraz pod integrálom:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

čo je **rovnováha síl hmotnostných, zotrvačných a tlakových definovaná pre jednotku hmotnosti**, tj. pre 1 kg.

V Eulerových rovniciach rozpísaných do smeru osí x, y, z je celkom päť neznámych veličín, a to súradnice rýchlosti v_x, v_y, v_z , hustota ρ a tlak p . K určeniu päť neznámych je potrebných päť rovníc, z ktorých tri sú Eulerove rovnice a ďalšími sú rovnica kontinuity a stavová rovnica $\rho = \rho(p)$, v prípade nestlačiteľnej tekutiny je $\rho = \text{konst}$. Všetkých päť uvedených veličín závisí od polohy prúdiacej častice tekutiny a na čase. Pre riešenie sústavy rovníc je treba zadať okrajové a počiatočné podmienky.

Eulerova rovnica pre prúdenie ideálnej tekutiny je nelineárna parciálna diferenciálna rovnica, jej integrácia je obtiažna, v súčasnej dobe sa rieši numericky. Aplikáciou tejto rovnice je obtekanie leteckých profilov, kedy sa predpokladá neviskózne prúdenie.

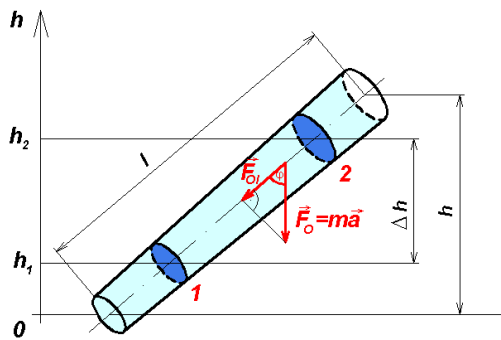
Eulerova rovnica je východiskom k odvodeniu Bernoulliho rovnice. Eulerovu rovnicu je možné zjednodušiť tak, že sa predpokladá jednorozmerné prúdenie, tj. rýchlosť a tlak sa menia v závislosti na čase a dráhe:

$$\vec{v} = \vec{v}(t, l) \quad p = p(t, l)$$

Potom sa sústava Eulerových rovníc zjednoduší na jednu rovnicu nasledovne (pritom nie je nutné písať index x a túto súradnicu je možné nahradiť dĺžkou potrubia l):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} = a - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}$$

Jednorozmerné prúdenie nemusí byť nutne rovnobežné s jednou z osí súradného systému, ale je odklonené od osy X o uhol φ . Zrýchlenie vonkajšej objemovej sily sa transformuje do smeru rovnobežného s osou potrubí l , teda $a \cos \varphi$.



Eulerova rovnica pre prúdovú trubicu má tvar

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} = a \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} = a \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}$$

Každý člen rovnice má rozmer $[\text{ms}^{-2}]$, teda rozmer zrýchlenia, tj. vyjadruje silu, pôsobiacu na 1 kg hmotnosti. Pri prúdení ideálnej tekutiny pôsobia na jej častice sily, ktoré pri posunutí po elementárnej dráhe dl konajú elementárnu prácu. Pokiaľ sa rovnica **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.** vynásobí dráhou dl , obdrží sa súčin „zrýchlenia x dráha“, čo vyjadruje elementárnu prácu, resp. mernú energiu označenú Y $[\text{Jkg}^{-1} = \text{m}^2\text{s}^{-2}]$. Rovnica bude mať tvar

$$\frac{\partial v}{\partial t} dl + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl = a \cos \varphi dl - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl$$

Jednotlivé členy vyššie uvedenej rovnice je možné popísať fyzikálne takto

$\frac{\partial v}{\partial t} dl$ - zrýchľujúca merná energia v prípade neustáleného prúdenia

$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl$ - kinetická merná energia

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl$ - tlaková merná energia

$a \cos \varphi dl = dUdl$ - potenciálna merná energia

Teda rovnica má tvar

$$\frac{\partial v}{\partial t} dl + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl = dUdl - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl$$

Ak pôsobí na tekutinu len tiažové zrýchlenie, je vonkajšie zrýchlenie $a = -g$. Znamienko záporné je uvedené preto, že kladný zmysel zvolenej osi je opačný než zmysel

pôsobenia tiažového zrýchlenia. Príslušný potenciál silového pola (pre tiažové zrýchlenie) $dU = -g \cos\varphi dl$. Navyše platí $dh = \cos\varphi dl$, teda $dU = -gdh$

$$\frac{\partial v}{\partial t} dl + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl = -gdh - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl$$

Súčtom (integráciou) všetkých prác po dráhe l dostaneme vzťah pre celkovú mechanickú energiu tekutiny

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} dl + \int \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl + \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl + \int gdh = 0$$

Pre nestlačiteľnú tekutinu za pôsobenia tiažového zrýchlenia a pre ustálené prúdenie sa predchádzajúca rovnica zjednoduší

$$\frac{1}{2} \int \frac{\partial v^2}{\partial l} dl + \frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p}{\partial l} dl + g \int dh = 0$$

Rovnica je tak vyjadrená vzťahom

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = konst$$

Táto rovnica predstavuje zákon zachovania energie hmotnostnej jednotky, pritom $\frac{v^2}{2}$ je

kinetická energia, $\frac{p}{\rho}$ odpovedá tlakovej energii, gh je polohová energia. Súčet kinetickej, tlakovej, a polohovej energie predstavuje celkovú mechanickú energiu hmotnostnej jednotky, nazývanou merná energia $e = \frac{E}{m}$ [J.kg⁻¹].

Ak sa rovnica delí tiažovým zrýchlením g , dostaneme

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = konst [m].$$

Toto je Bernoulliho rovnica. Každý člen rovnice predstavuje energiu vzťahnutú na tiažovú jednotku tekutiny a formálne má rozmer výšky. Prvý člen je známy ako rýchlostná výška, druhý člen je tlaková výška a tretí určuje polohovú (potenciálnu) výšku.

Ak sa vynásobí rovnica súčinom ρg , dostaneme

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gh = konst [Pa]$$

Každý člen rovnice predstavuje tlak (kinetický, statický, polohový).

Súčet všetkých energií, tj. kinetickej, tlakovej a polohovej je celková mechanická energia tekutiny, ktorá podľa Bernoulliho rovnice je v každom priereze jednej a rovnakej trubice konštantná.

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2 = \dots = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = gH = Y = konst$$

Bernoulliho rovnica platí pre prúdovú trubicu, v ktorej prierezoch je rýchlosť rovnomerne rozložená. Pri nerovnomernom rozložení rýchlosti je nutné voliť prúdovú trubicu veľmi malých prierezov, aby rozdiel rýchlosti po priereze prúdovej trubice bol zanedbateľný. Inak je nutné prihliadať k nerovnomernému priebehu rýchlosti, čo vyjadruje **stredná rýchlosť** podľa kinetickej energie.

Bernoulliho rovnica pre dokonalú kvapalinu písaná pre dva prierezy jednej a tej istej prúdovej trubice obsahuje šesť veličín: $p_1, v_1, h_1, p_2, v_2, h_2$. Hustota tekutiny ρ sa považuje za známu. Aby sa pomocou Bernoulliho rovnice určili parametre prúdenia, musí byť počet neznámych a počet rovníc rovnaký. Pri riešení najjednoduchšieho prípadu je možné teda z Bernoulliho rovnice vypočítať jednu neznámu. Ostatné veličiny musia byť známe.

Bernoulliho rovnica pre plyny má tvar

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\kappa - 1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{\kappa - 1} = konst.$$

4.3. Veta o zmene hybnosti

Veta o zmene hybnosti sa používa tam, kde sa sleduje silový účinok tekutiny na stenu pevného telesa.

Zmena hybnosti $\int_{v_1}^{v_2} m dv$ je rovná impulzu sily $\int_{t_1}^{t_2} F dt$

$$\int_0^t F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv$$

Pre konštantnú silu ($F = konst$) a hmotnosť ($m = konst$) získame po integrácii

$$F \cdot t = m(v_2 - v_1) = m \cdot \Delta v$$

$$F = \frac{m}{t} \Delta v = Q_m \cdot \Delta v = Q_m(v_2 - v_1) = H_2 - H_1 = \Delta H$$

H - je prietoková hybnosť. Sila F vyvolaná prúdiacou kvapalinou je rovná zmene prietokovej hybnosti $H_2 - H_1$.

Kvapalina, ktorá vteká do kontrolného objemu V rýchlosťou v_1 a vyteká z neho rýchlosťou v_2 vyvolá pri prietoku Q silu F .

Hybnostná veta v mechanike tekutín slúži k výpočtu síl, ktoré by bolo nutné určiť integráciou z Eulerových rovníc.

5. Základné rovnice prúdenia skutočnej tekutiny

5.1. Navier-Stokesove rovnice

Rovnováha síl pri prúdení skutočnej tekutiny je vyjadrená Navier-Stokesovými rovnicami, vyjadrujúcimi vzťah, kedy **zotrvačná sila je rovná súčtu hmotnostnej, tlakovej a trecej sily**

$$\vec{F}_s = \vec{F}_0 + \vec{F}_p + \vec{F}_t$$

Teda oproti Eulerovej rovnici, pre prúdenie ideálnej tekutiny pristupujú v prípade skutočnej tekutiny **trece sily**, ktoré sú spôsobené viskozitou tekutiny. Pre matematické vyjadrenie trecích síl sa použije Newtonov vzťah aplikovaný v súradnicovom systéme.

Tento výraz vyjadruje vzťah medzi viskóznym napätím a deriváciou rýchlosti podľa súradnice kolmej na smer pohybu. Treciu silu je možné vyjadriť obdobne ako silu tlakovú

$$F_t = \tau S = \eta \frac{dv}{dy} S = \nu \rho \frac{dv}{dy} S, \text{ kde } \nu \text{ je kinematická viskozita.}$$

Ak sa stanoví rovnováha všetkých síl pôsobiacich na elementárny objem tým, že sa skôr odvodená Eulerova rovnica rozšíri o zmeny normálových a dotyčnicových napätí, presnejšie o ich derivácie podľa súradníc, dostaneme **Navier - Stokesovu rovnicu**, ktorá vo vektorovom zápise pre nestlačiteľnú tekutinu v pravouhlom súradnom systéme má tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \text{grad} \right) \vec{v} = \vec{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}$$

V tejto rovnici výraz $\frac{\partial v}{\partial t}$ je tzv. lokálna (miestna) derivácia, ktorá nie je závislá od premiestňovania tekutiny. Výraz $\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}$ je tzv. konvektívny člen (konvektívna derivácia), závisí od rýchlosti premiestňovania častíc. Tento výraz je nelineárny čo prináša problémy pri integrácii NS rovnice. Posledný výraz $\nu \Delta v$, je viskóznym členom a predstavuje treciu potrebnú k prekonaniu viskózneho trenia tekutiny.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ je tzv. Laplaceov operátor aplikovaný na tri súradnice rýchlosti. Táto}$$

rovnica sa od Eulerovej rovnice pre ideálnu tekutinu líši práve týmto posledným členom na pravej strane. Navier – Stokesovu rovnicu je možné rozpísať do troch smerov súradníc x, y, z

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

Pri riešení prúdového poľa sa spravidla určuje rozloženie rýchlostí a tlakov. Vedľa pohybovej rovnice sa uplatní i rovnica kontinuity. V systéme diferenciálnych Navier - Stokesových rovníc a rovnice kontinuity sú štyri neznáme veličiny, tj. zložky rýchlosti v_x, v_y, v_z a tlak p . Pre

riešenie týchto rovníc musia byť známe vonkajšie zrýchlenia $\vec{a}$, hustota tekutiny ρ a okrajové podmienky. Navier-Stokesove rovnice patria medzi nelineárne parciálne diferenciálne rovnice a nie sú všeobecne riešiteľné. Analytické riešenie je dostupné pre jednoduchšie prípady laminárneho prúdenia. V súčasnej dobe i zložité prípady laminárneho prúdenia sú riešiteľné numerickými metódami, napr. metódou konečných objemov a metódou konečných prvkov.

5.2. Bernoulliho rovnica pre skutočnú tekutinu

Rovnováha síl pri prúde skutočných tekutín je vyjadrená Navier-Stokesovou rovnicou vo vektorovom tvare

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}$$

Ďalej sa predpokladá prúdenie jednorozmerné v trubici, teda predchádzajúce rovnice sa zjednodušia tak, že sa uvažuje len jeden súradný smer, vektor rýchlosti má len jednu súradnicu a taktiež sa píše bez indexu a rozmer je označený l

$$\frac{\partial v}{\partial t} dl + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl = a \cos \varphi dl - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial l^2}$$

K jednotlivým členom vyššie uvedenej rovnice pribudla stratová merná energia

- $\frac{\partial v}{\partial t} dl$ - zrýchľujúca merná energia v prípade neustáleného prúdenia
- $\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl$ - kinetická merná energia
- $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl$ - tlaková merná energia
- $\nu \frac{\partial^2 v}{\partial l^2}$ - stratová merná energia
- $a \cos \varphi dl = dU dl$ - potenciálna merná energia

Integráciou vyššie uvedenej upravenej rovnice je

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} dl + \int \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl + \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl - \int \nu \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} dl - \int dU dl = 0$$

Pre nestlačiteľné prúdenie sa vyčíslia integrály pre prierez 1-2 prúdovej trubice

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dl + \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) - \int_1^2 \nu \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} dl - (U_2 - U_1) = 0$$

Vyčíslenie integrálu vyjadrujúceho trecie sily je obtiažne, preto sa prakticky určuje poloempirickými vzťahmi a označuje sa e_z . Predstavuje prácu trecích síl na jednotku hmotnosti prúdiacej tekutiny, čo je rozptýlená (disipovaná) merná energia, alebo tiež merná stratová energia spotrebovaná na prekonanie hydraulických odporov na úseku 1 – 2 prúdovej trubice. Tato merná stratová energia znižuje mechanickú energiu (tlakovú + kinetickú + polohovú) tekutiny a mení sa na teplo. Bernoulliho rovnica pre prúdenie skutočnej tekutiny, na ktorú pôsobí len tiažové zrýchlenie $a = -g$ a teda $U = -gh$ má tvar

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + e_s$$

Merná stratová energia e_z sa môže vyjadriť ako násobok kinetickej energie $e_s = \zeta \frac{v^2}{2}$ alebo

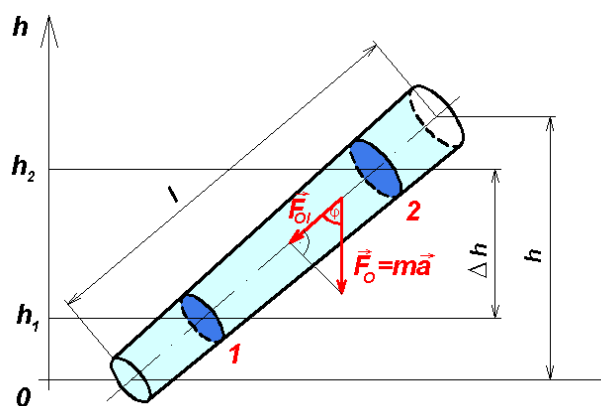
tlaková stratová energia $e_s = \frac{p_z}{\rho}$, popřípade stratová výška $e_s = gh_z$. Porovnaním uvedených vzťahov sa získa

$$e_s = \frac{p_s}{\rho} = gh_s \Rightarrow p_s = \rho gh_s = \zeta \frac{v^2}{2} \rho$$

Posledná rovnica vyjadruje hydraulický odpor tlakovým rozdielom p_s , ktorému sa tradične hovorí tlaková strata. Podobne veličina h_s , je označená ako stratová výška i keď nejde o stratu, ale nežiadajúcu premenu mechanickej energie v tepelnú. Obe veličiny h_s a p_s sú mierou rozptýlenej (stratovej) energie. Súčiniteľ ζ je stratový súčiniteľ a závisí na druhu hydraulického odporu či straty.

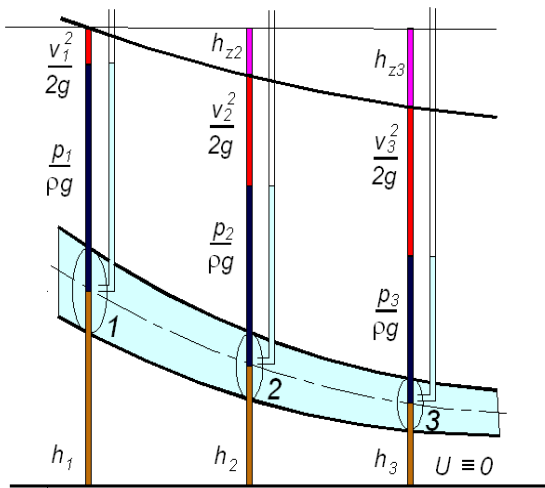
Bernoulliho rovnica pre skutočnú tekutinu písaná pre prierezy 1,2 prúdovej trubice pomocou mernej stratovej energie $e_s = gh_s$ je

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + gh_s$$



Kvapalina prúdi od prierezu 1 k prierezu 2. Stratová výška h_s zahŕňa všetky hydraulické straty na úseku medzi prierezmi 1-2.

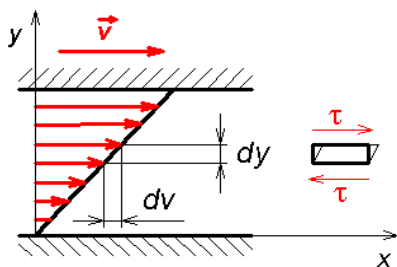
Podobne ako pri prúdení dokonalej tekutiny je možné znázorniť graficky tiež Bernoulliho rovnicu pre skutočnú tekutinu. Odčítaním stratovej energie pre jednotlivé prierezy od konštanty Bernoulliho rovnice $Y_0 (= gH_0)$ sa určí mechanická energia tekutiny, tj. súčet tlakovej, kinetickej a polohovej energie v uvažovaných prierezoch, ktorá je znázornená v diagrame príslušnou čiarou. Rozdiel medzi čiarou celkovej energie a čiarou mechanickej energie predstavuje rozptýlenú (stratovú) energiu. V tepelne izolovanej prúdovej trubici sa všetka rozptýlená energia ako tepelná odovzdáva tekutine, čím vzrastá jej vnútorná energia a stúpa teplota tekutiny. Člen so stratovou výškou v rovnici narušuje symetriu rovnice. Pre lepšiu názornosť je Bernoulliho rovnice vyjadrená vo výškach, tj. polohovej, tlakovej, kinetickej a stratovej výške



6. Laminárne prúdenie

Laminárne prúdenie je podstatne jednoduchšie ako turbulentné. V technickej praxi sa vyskytuje tam, kde sú malé prietochné kanály, väčšia viskozita kvapaliny a menšie prietokové rýchlosti. Jednoduché prípady lineárneho prúdenia je možné riešiť analyticky integráciou N-S rovníc. Zložitejšie prípady sa riešia numerickými metódami. Pri riešení laminárneho prúdenia sa uplatňuje Newtonov vzťah šmykového napätia, ktorý odpovedá skutočnosti, a preto sa dosahuje dobrá zhoda s experimentálnymi výsledkami.

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} = \eta j$$



Kvapaliny ktoré sa zhodujú s týmto zákonom sa nazývajú newtonovské. Pre ktoré tento vzťah neplatí sú nenenewtonovské. Toto porovnanie platí iba v laminárnej oblasti prúdenia, lebo pri turbulentnom prúdení rastie odpor a teda aj dotyčnicové šmykové napätie rýchlejšie v dôsledku fluktuálnych rýchlostí.

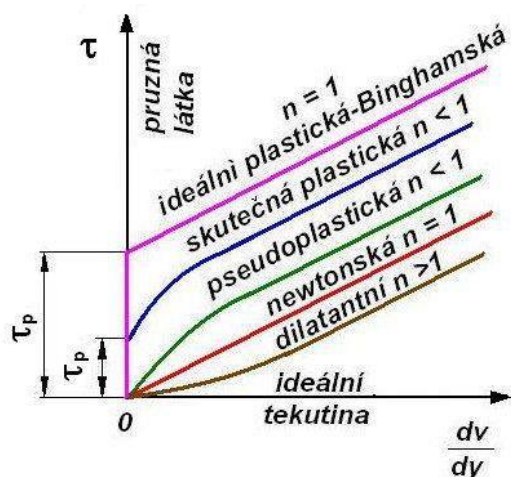
Zatiaľ čo pomer dotyčnicového napätia newtonovských kvapalín v šmykovej rýchlosti je konštantným látkovým parametrom, charakterizujúcim danú kvapalinu, pre nenenewtonovské kvapaliny je tento pomer premenlivý. Jeho okamžitá hodnota sa mení podľa použitého napätia a nemôže slúžiť pre vyjadrenie konzistencie nenenewtonovských kvapalín. Pre tento pomer sa používa pojem zdanlivá viskozita

$$\mu_a = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}} = \frac{\tau}{j}$$

Okrem zdanlivej intenzity sa pre hodnotenie nenenewtonovskej kvapaliny pri určitom šmykovom napätí tzv. diferenciálna viskozita

$$\mu_\Delta = \frac{d\tau}{dj}$$

Pretože ani zdanlivá ani diferenciálna viskozita nie sú pro nenenewtonovskú kvapalinu konštantné, je potrebné pre fyzikálne ohodnotenie týchto kvapalín udávať ich závislosť na šmykovom napätí. Takéto grafické zobrazenia sa nazývajú tokové krivky alebo reogramy. Najobvyklejšími súradnicami pre kreslenie týchto reogramov sú τ voči j alebo ich logaritmy.



Kvapaliny, ktoré sú charakterizované poklesom zdanlivej viskozity pri rastúcom šmykovom napätí sa nazývajú pseudoplastické (rednúce tekutiny). Medzi pseudoplastické tekutiny patria napr. suspenzie nesúmerných častíc, niektoré koloidné roztoky, kaly, pasty, taveniny a roztoky polymérov, celulózové deriváty, kaučuky, latexy, farby, mazivá, suspenzie papiera apod.

S rastúcim rýchlostným gradientom sa nesúmerné častice alebo molekuly postupne vyrovnávajú. V pokojovom stave sú častice náhodne premiešané, zatiaľ čo pri pohybe sa postupne orientujú hlavnými osami do smeru pohybu. Zdanlivo viskozita stále klesá s rastúcim rýchlostným gradientom až k určitej hodnote, pri ktorej už nie je možné dokonalejšie usporiadanie častíc. Od tejto hodnoty je už vzťah pre τ lineárny

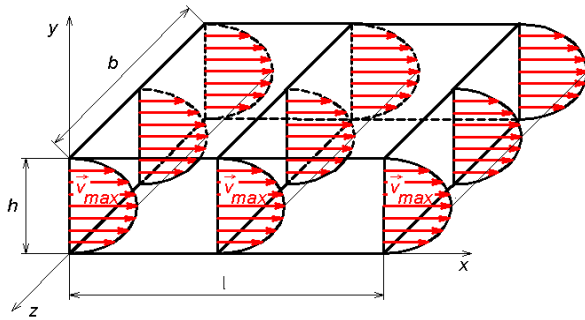
Hypotéza pseudoplastického správania sa predpokladá, že zmena štruktúry, tj. orientácie častice nastane okamžite akonáhle začne pôsobiť šmykové napätie, alebo v čase tak krátkom, že použitím bežných viskozimetrických metód nie je možné časový úsek zistiť. Ak zmena štruktúry nenastane okamžite a k jej vytvoreniu je potrebný určitý čas, takéto kvapaliny sa nazývajú tixotropné.

Reciprokým javom k pseudoplasticite je dilatácia charakterizovaná rastom zdanlivej viskozity zo vzrastajúcim dotyčnicovým napätím (hustnúcej tekutiny). Sú to napr. rozpúšťadlá farieb, niektoré náterové a tlačiarenské farby, vodné suspenzie železité červené, oxidu zinočnatého, niektorých pigmentov, kobaltovej modrej, škrobového mazu, betón, arabská guma a niektoré polymérové roztoky, med aj.

Binghamova tekutina je charakterizovaná tým, že v pokoji má tekutina trojrozmernú štruktúru, ktorá má tuhosť, schopnú vzdorovať ľubovoľnému napätiu menšiemu než napätiu na medzi deformácie τ_p . Po dosiahnutí tohto napätia sa štruktúra rozpadne a hmota sa správa ako newtonovská tekutina.

6.1. Laminárne prúdenie medzi rovnobežnými doskami

Medzi rovnobežnými stenami je tlakovým spádom $\Delta p = p_1 - p_2$ vyvolané laminárne prúdenie vo vodorovnom smere. Predpokladá sa izotermické a izoviskózne prúdenie. Vertikálna vzdialenosť dosiek je h . Rovnováha síl je vyjadrená tlakovými a trecími silami.



Predpokladá sa vodorovná štrbina, teda hmotnostné (ťažové) sily sú rovné nule ($\vec{a} = 0$).

Prudenie je ustálené, rýchlosť sa v čase nemení a teda aj zotrvačné sily sú rovné nule ($\frac{D\vec{v}}{Dt} = 0$). Rýchlostný profil je vyvinutý a po dĺžke štrbiny sa nemení. Uvažuje sa s jednorozmerným prúdením, teda v_y a v_z a všetky ich zmeny (derivácie) sú nulové. Fyzikálne vlastnosti ako hustota a viskozita sú konštantné.

Rýchlostný profil je daný iba zmenou v_x po výške štrbiny y . Za týchto predpokladov sa Navier - Stokesova rovnica zjednoduší na tvar

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$$

čo je spomínaná rovnováha tlakových a trecích síl.

Ak sa predpokladá, že na dĺžke l dôjde ku tlakovej strate Δp , potom na základe daného tlakového spádu $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{l}$ a okrajových podmienok rýchlosti na stenách je možné odvodiť rýchlostný profil v úzkej medzere.

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{\Delta p}{l} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\eta} \frac{\Delta p}{l} y + konst1 \Rightarrow$$

$$v_x = -\frac{1}{\eta} \frac{\Delta p}{l} \frac{y^2}{2} + konst1 \cdot y + konst2$$

Pre určenie integračných konštánt 1 a 2 sa využije okrajová podmienka na stenách, kde je nulová rýchlosť, t.j. pre $y = 0$ je $v_x(0) = 0$, po dosadení je $konst2 = 0$ a pre $y = h$ je $v_x(h) = 0$

a $konst1 = \frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p}{l} h$. Výsledkom je **parabolická závislosť rýchlosti v_x na y** .

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p}{l} (h - y)y$$

Rýchlostný profil je **kvadratická parabola**. Maximálna rýchlosť sa určí z podmienky pre maximum, tj. $\frac{dv}{dy} = 0$. Maximálna rýchlosť je uprostred vzdialenosti dosiek h , čiže $y = \frac{h}{2}$

$$v_{\max} = \frac{h^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}$$

Prietok sa určí integráciou elementárneho prietoku $dQ = b v_x dy$, ktorý preteká elementárnou plochou $b \cdot dy$

$$Q = b \int_0^h v_x dy = \frac{b}{2\eta} \frac{\Delta p}{l} \int_0^h (hy - y^2) dy = \frac{b}{12\eta} \frac{\Delta p}{l} h^3$$

Stredná rýchlosť podľa prietoku je

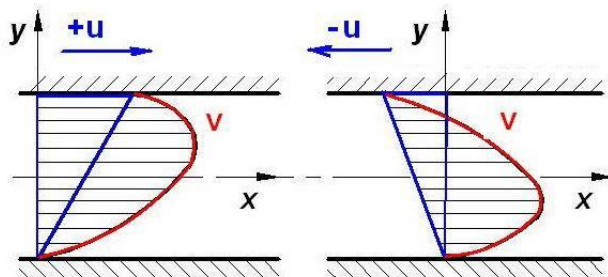
$$v_s = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{bh} = \frac{h^2}{12\eta} \frac{\Delta p}{l}$$

Pomer strednej a maximálnej rýchlosti je

$$\frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{2}{3}$$

Prúdenie v medzere môže byť ovplyvnené okrem tlakového spádu tiež pohybom hornej steny rýchlosťou $\pm u$. Pre tento prípad sa odvodí rýchlostný profil pre okrajové podmienky $v_x(0) = 0$, $v_x(h) = \pm u$. Potom sa zmenia integrační konštanty a po dosadení do rovnice je rýchlostný profil určený vzťahom

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\eta l} h^2 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \pm u \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right)$$

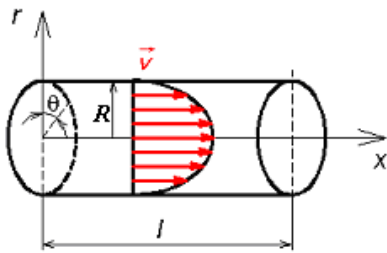


Ak je prúdenie vyvolané len unášaním, potom $\frac{\Delta p}{l} = 0$ a rýchlostný profil je lineárny

$$v_x = \pm u \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right)$$

6.2. Laminárne prúdenie v potrubí kruhového prierezu

Laminárne prúdenie v trubici kruhového prierezu nastane pri $Re \leq Re_{krit} = 2320$. Potrubie je vodorovné, prúdenie je ustálené, rýchlostný profil je vyvinutý. Na prúdiacu tekutinu pôsobia sily tlakové a trecie. V dôsledku viskozity dôjde na dĺžke potrubia l ku tlakovej strate. Pri prúdení vo vodorovnom potrubí sa predpokladá valcový súradný systém



Pri axiálnom prúde nestlačiteľnej tekutiny v dlhej trubke s kruhovým prierezom je možné predpokladať zjednodušenie pre rýchlosti uhlové a radiálne a derivácie všetkých premenných podľa uhla vzhľadom k valcovej symetrii. Potom analogicky podľa predchádzajúceho postupu avšak vzhľadom k valcovému súradnicovému systému sa odvodí rovnica pre rýchlostný profil

$$v_x = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2) = \frac{1}{16\eta} \frac{\Delta p}{l} (D^2 - d^2)$$

Grafické znázornenie rovnice rýchlostného profilu v rovine rezu prechádzajúceho osou trubice je kvadratická parabola. V priestore predstavuje rýchlostný profil rotačný paraboloid.

Na stene pre $r = R$ bude rýchlosť $v_x = 0$, v ose potrubia pre $r = 0$ je rýchlosť maximálna

$$v_{x\max} = v(r)|_{r=0} = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} R^2 = \frac{1}{16\eta} \frac{\Delta p}{l} D^2$$

Prietok trubicou sa určí integráciou elementárneho prietoku kvapaliny $dQ = 2\pi r v_x dr$, ktorý preteká elementárnym medzikružím na polomere r so šírkou dr tlakovým rozdielom Δp na dĺžke trubice

$$Q = \int_S v_x dS = \int_0^R 2\pi r v_x dr = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} \int_0^R [R^2 - r^2] r dr = \frac{\pi D^4}{128\eta} \frac{\Delta p}{l}$$

Táto rovnica sa označuje ako Hagen-Poiseuilleova, alebo ako Hagen-Poiseuilleov zákon.

Stredná rýchlosť podľa prietoku sa vypočíta zo vzťahu

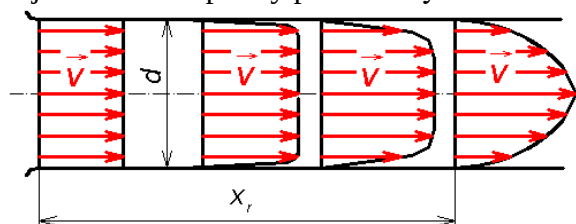
$$Q = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot v_s = \frac{\pi D^4}{128\eta} \frac{\Delta p}{l},$$

$$v_s = \frac{D^2}{32\eta} \frac{\Delta p}{l}$$

Z porovnania strednej a maximálnej rýchlosti vyplýva

$$\frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{1}{2}$$

Zákon Hagen-Poiseuilleov platí len pre ustálené laminárne prúdenie, kedy rýchlostný profil v jednotlivých prierezoch je rovnaký, čo nastáva po určitej dráhe od začiatku trubice. Tekutina po vstupe do trubice má rýchlostný profil odpovedajúci dokonalej tekutine. V prvom okamihu majú častice kvapaliny pri stene rýchlosť rovnakú ako v ostatnom prúde kvapaliny.

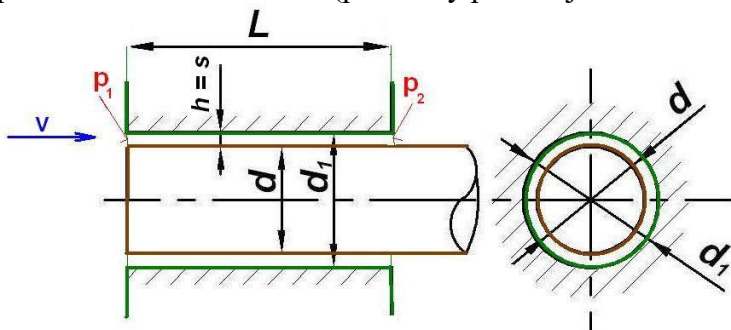


Až stykom kvapaliny so stenou sú častice brzdené, čím vznikajú dotyčnicové napätia od viskozity medzi jednotlivými vrstvami prúdu a objavujú sa rozdiely v rýchlostiach častíc. Tak sú postupne brzdené ďalšie častice a v jadre prúdu sú častice naopak urýchľované. Dráha na ktorej sa vyvíja rýchlostný profil, sa nazýva **rozbehovou dráhou** laminárneho prúdu. Pre rozbehovú dráhu uvádza Boussinesq výraz $\frac{x_r}{d} \geq 0,065 \text{ Re}$, Schiller $\frac{x_r}{d} \geq 0,025 \cdot \text{Re}$.

K ustáleniu rýchlostného profilu dôjde dosť ďaleko od vstupného prierezu, takže v krátkych trubiciach sa laminárny rýchlostný profil nevytvorí, a preto u nich zákon Hagen-Poiseuilleov neplatí.

6.3. Laminárne prúdenie v medzikruží

V hydraulických strojoch a zariadeniach sa často stretávame s prípadmi, kedy kvapalina prúdi valcovou medzerou (prietočný prierez je medzikružie)



Tak je to v prípade čerpadiel, turbín, šupátok, ventilov, klzných ložísk apod. Prúdenie vo valcovej rovine je možné riešiť pre malé hodnoty s/d_1 ako rozvinutú valcovú medzeru do roviny, čím sa prípad prevedie na prúdenie medzi dvoma rovnobežnými doskami. Valcové medzery slúžia k tesneniu rôznych častí hydraulických strojov a zariadení, z ktorých jedna koná voči druhej relatívny pohyb. Najjednoduchší prípad nastane, keď obe časti sú v relatívnom pokoji. Vzájomná poloha oboch častí môže byť buď súosá alebo výstredná. Prietok valcovou medzerou je možné určiť ako prietok medzi dvoma doskami. Šírka medzery v tomto prípade sa rovná obvodu kružnice, teda $b = \pi \cdot d$ a vzdialenosť dosiek h odpovedá hrúbke valcovej medzery, čiže $h = s$. Po dosadení získame prietok

$$Q_v = \frac{\pi}{12\eta} \frac{\Delta p}{d} \cdot h^3$$

a stredná rýchlosť

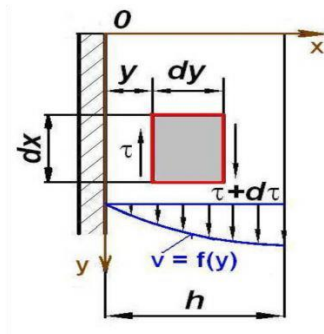
$$v_s = \frac{Q_v}{S} = \frac{h^2 \Delta p}{12 \eta L}$$

kde prietokná plocha valcovej medzery $S = \pi \cdot d \cdot s$. Na prietok má tiež vplyv výstrednosť medzery, ktorá nastane ak osy oboch valcových plôch s priermi d a d_1 nebudú totožné. Maximálna výstrednosť je $e_{max} = \frac{d_1 - d}{2}$. Prietok medzerou s maximálnou výstrednosťou je 2,5x väčší ako v prípade súosej valcovej medzery.

6.4. Stekanie po zvislej stene

Viskózna kvapalina ktorá, priľne na zvislej stene, steká po nej vplyvom tiažového zrýchlenia. Predpokladá sa izotermické a izoviskózne prúdenie. Na elementárnu časticu kvapaliny so šírkou

b s rozmermi $dx \cdot dy$ pôsobia tiažové a trecie sily v smere osy y . Predpokladá sa ustálené rovnomerné prúdenie. Výslednice síl v smeroch osí x, z sú nulové. Na rozhraní stekajúcej kvapaliny so šírkou kvapaliny h s ovzduším je tlak vzduchu p_0 . Tlak v stekajúcej vrstve je konštantný.



Priebeh šmykového napätia v stekajúcej vrstve je daný rovnicou
 $\tau = \rho \cdot g \cdot (h - x)$

Rýchlostný profil stekajúcej kvapaliny na stene
 $v = \frac{g}{\nu_s} \left(h - \frac{x}{2} \right) x$

Priebeh rýchlosti je parabolický. Maximálna rýchlosť na rozhraní vrstvy so vzduchom
 $v_{max} = \frac{g \cdot h^2}{2\nu}$

Prietok
 $Q_v = b \int_0^h v \, dx = \frac{gb}{\nu} \int_0^h \left(h - \frac{x}{2} \right) x \, dx = \frac{gbh^3}{3\nu}$

Šírka vrstvy
 $h = \sqrt[3]{\frac{3Q_v}{gb}}$

Stredná rýchlosť vo vrstve
 $v_s = \frac{Q_v}{bh} = \frac{gh^2}{3\nu}$

Porovnanie strednej rýchlosti s maximálnou vyplýva
 $v_s = \frac{2}{3} v_{max}$

6.5. Prúdenie nenewtonovských kvapalín

Najstarším analytickým vyjadrením závislosti šmykovej rýchlosti na dotyčnicovom napätí nenewtonovských kvapalín sú mocninové funkcie. Najčastejšie sa používa formulácia Ostwalda a de Waelea

$$\tau = K \left(\frac{dv}{dr} \right)^n = k j^n$$

K - súčiniteľ konzistencie,

n - index toku, ktorého hodnota pre pseudoplastické tekutiny je menšia ako 1, zatiaľ čo pre newtonovské tekutiny je rovná 1 a pre dilatantné tekutiny je väčšia ako 1

Rýchlosť prúdenia v potrubí

$$v = \frac{n}{n+1} \left(\frac{p_s R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right] R$$

Maximálna rýchlosť v potrubí

$$v_{max} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{p_s R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R$$

Objemový prietok v potrubí

$$Q = \frac{\pi n}{3n+1} \left(\frac{p_s R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R^3 = \frac{\pi n}{8(3n+1)} \left(\frac{p_s D}{4LK} \right)^{\frac{1}{n}} D^3$$

Stredná rýchlosť

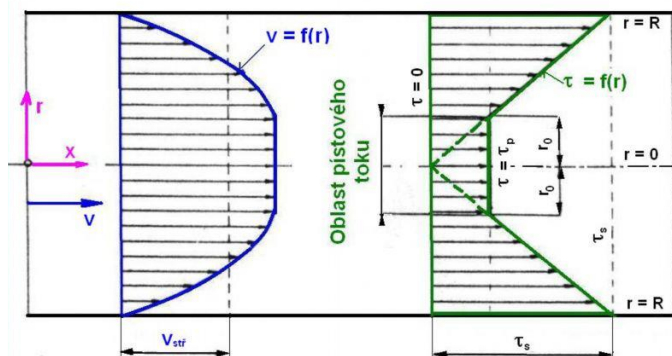
$$v_s = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{n}{3n+1} \left(\frac{p_s R}{2LK} \right)^{\frac{1}{n}} R = v_{max} \frac{n+1}{3n+1}$$

Veľkosť šmykového napätia pre Binghamské tekutiny je daná rovnicou

$$\tau = \tau_p + \mu_B \left(\frac{dv}{dr} \right) = \tau_p + \mu_B \cdot j$$

τ_p - počiatočné šmykové napätie

μ_B - plastická viskozita



Rýchlosť prúdenia v potrubí

$$v = \frac{p_s}{4L\mu_B} (R^2 - r^2) - \frac{\tau_p}{\mu_B} (R - r) = \frac{1}{\mu_B} \left[\frac{p_s}{4L} (R^2 - r^2) - \tau_p (R - r) \right]$$

Objemový prietok v potrubí

$$Q = \frac{\pi p_s R^4}{8L\mu_B} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^4 \right]$$

Stredná rýchlosť

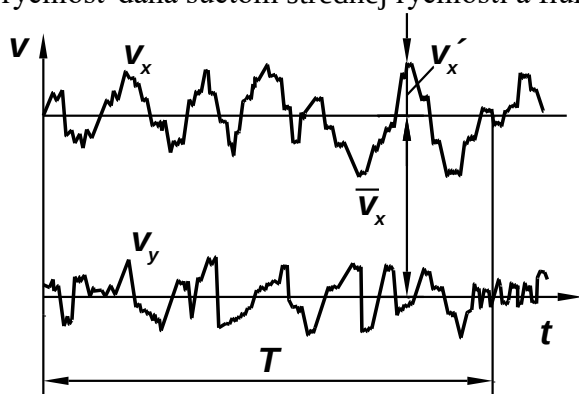
$$v_s = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{p_s R^2}{8L\mu_B} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^4 \right]$$

6.6. Turbulentné prúdenie v trubici kruhového prierezu

Skutočná tekutina sa môže pohybovať dvomi kvalitatívne úplne odlišnými typmi prúdenia, ktoré označujeme laminárne alebo turbulentné. Rozhranie medzi oboma druhmi prúdenia udáva Reynoldsovo kritické číslo. Jeho hodnota je závislá na parametroch ako napr. na geometrii prúdu, tlakovom spáde, atď. Pre potrubie kruhového prierezu je spodná hranica asi 2300. Pre ustálené laminárne prúdenie je charakteristické, že sa častice tekutiny pohybujú po paralelných dráhach, jednotlivé vrstvy sa navzájom nemiesia (neuvažujeme molekulárnu difúziu).

Pre turbulentné prúdenie sú typické nárazovitosti všetkých veličín napr. rýchlosti. Trajektórie častíc tekutiny sú nepravidelné, dochádza k intenzívnemu premiešavaniu celého objemu prúdiacej tekutiny.

Turbulentné prúdenie je trojrozmerný, časovo premenlivý pohyb tekutiny, pri ktorom veličiny charakterizujúce prúdenie (rýchlosť, tlak, hustota, teplota) sa menia náhodne v čase. Okamžité hodnoty veličín neustále kolíšu okolo strednej hodnoty, takže v každom okamihu je napríklad rýchlosť daná súčtom strednej rýchlosti a fluktuáčnej zložky



Pre zložku **okamžitej rýchlosti** v smere x bude platiť

$$\mathbf{v}_x = \overline{\mathbf{v}_x} + \mathbf{v}'_x$$

kde $\overline{\mathbf{v}_x}$ je **stredná hodnota rýchlosti** v čase a $\mathbf{v}'_x$ je **fluktučná zložka rýchlosti**

Stredná hodnota $\overline{\mathbf{v}_x}$ (resp. $\overline{\mathbf{v}_y}, \overline{\mathbf{v}_z}$) za čas T sa určí zo vzťahu $\overline{\mathbf{v}_x} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{v}_x dt$ (čo je pri

dostatočne veľkom počte vzoriek nahradiť **aritmetickým priemerom** $\overline{\mathbf{v}_x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_{xi}$). Ak je

časový interval dostatočne dlhý, je stredná hodnota fluktuáčnej zložky $\mathbf{v}'$ nulová

$$\overline{\mathbf{v}'_x} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{v}'_x dt = 0.$$

Intenzita turbulencie charakterizuje relatívnu veľkosť amplitúd fluktuácií rýchlosti vzhľadom

k strednej hodnote rýchlosti, napr. pre smer x je $I_x = \frac{\sqrt{\overline{\mathbf{v}'_x{}^2}}}{\overline{\mathbf{v}_x}}$. Intenzita turbulencie pri

vyvinutom prúdení v potrubí kruhového prierezu je závislá na smere - pozdĺžne fluktuácie sú väčšie ako priečne, v osi majú minimum, maximum je v tesnej blízkosti steny a na stene sú rovné nule.

Pre technické výpočty v praxi sú stredné hodnoty rýchlosti zistené za dostatočne dlhý časový interval dôležité pre popis rýchlostného profilu, určení Re čísla, prietoku, strát v potrubí, apod. a túto rýchlosť označujeme obyčajným písmenom v .

Na rozdiel od laminárneho prúdenia je odpor proti pohybu pri turbulentnom prúdení omnoho väčší. Boussinesq zaviedol zdanlivú (vírovú, turbulentnú) viskozitu μ_t , ktorá je analógiou dynamické viskozity η z Newtonovho vzťahu pre šmykové napätie pri laminárnom prúdení. Na rozdiel od nej však vírová (turbulentná) viskozita nie je látkovou vlastnosťou, ale funkciou súradníc a je závislá na geometrii a ďalších charakteristikách prúdového poľa. Pre rovinné turbulentné prúdenie je možné turbulentné šmykové napätie vyjadriť rovnicou

$\tau_t = \mu_t \frac{d\bar{v}_x}{dy}$. V blízkosti steny, kde dochádza k brzdeniu prúdiacej tekutiny, sa prejaví aj šmykové napätie podľa Newtona a výsledné dotyčnicové napätie v turbulentnom prúde bude rovné súčtu $\tau = (\eta + \mu_t) \frac{d\bar{v}_x}{dy}$.

V praxi je možné rýchlostný profil v potrubí popísať logaritmickou alebo mocninovou funkciou.

Logaritmický rýchlostný profil, je možné definovať vzťahom

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + K_1$$

kde v_* je **trecia rýchlosť** a môže byť definovaná vzťahom $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, kde τ_0 je dotyčnicové

napätie na stene, y je odľahlosť od steny potrubia, κ je tzv. Kármánova konštanta, ktorej hodnota sa pohybuje okolo 0,4 a K_1 je integračná konštanta. Tento tzv. logaritmický zákon neplatí v blízkosti steny, pretože na stene, pre $y = 0$ dáva nekonečne vysokú rýchlosť. Ani integračnú konštantu nemôžeme ako obvykle stanoviť z podmienky, že na stenu tekutina priľne a rýchlosť je nulová. Prandtl a Kármán preto rozdelili turbulentný prúd v blízkosti steny na tri oblasti

- **Viskózna podvrstva** sa vytvorí v tesnej blízkosti hladkej steny, kde prevažuje viskózne dotyčnicové napätie nad zdanlivým turbulentným napätím, pretože priečne zložky fluktuálnych rýchlostí sú stenou tlmené. Táto vrstva je veľmi tenká, zlomky milimetrov, ale má veľký význam pri prestupe tepla. Rýchlostný profil je priamkový.
- **Prechodová vrstva**, čo je tá časť prúdu, kde dotyčnicové napätia spôsobené viskozitou alebo turbulentným zmiešavacím pohybom sú rádovo rovnako veľké a rýchlosť plynu prechádza z priamkového na logaritmický zákon.
- **Turbulentné jadro prúdu** sa nachádza v určitej vzdialenosti od steny, kde už je dotyčnicové napätie od viskozity tekutiny zanedbateľné v porovnaní so zdanlivým turbulentným napätím. V tejto oblasti platí logaritmický zákon, v tejto forme zvaný zákon steny.

Na základe experimentov vykonaných v hladkých trubiciach boli stanovené aj neznáme konštanty v logaritmickom zákone:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = 5,75 \log \frac{v_* y}{\nu} + 5,5$$

V literatúre sa zavádza bezrozmerná rýchlosť

$$v^+ = \frac{\bar{v}_x}{v_*}$$

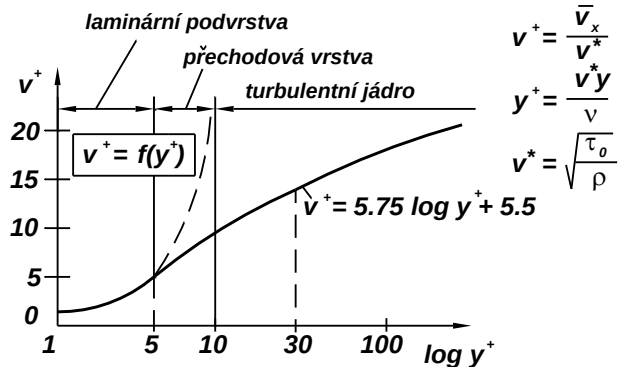
a bezrozmerná odľahlosť od steny

$$y^+ = \frac{v_* y}{\nu}$$

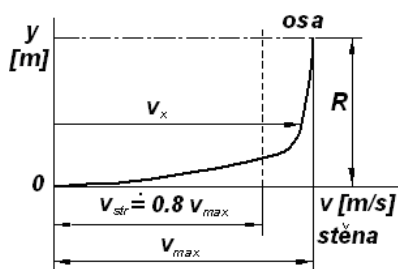
Logaritmický zákon má tvar

$$v^+ = 5,75 \log y^+ + 5,5$$

a je znázornený v semilogaritmických súradniciach



Miesto logaritmického zákona sa v turbulentnom prúdení používa tiež starší empirický **mocninový rýchlostný profil**.



$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n}$$

kde $\bar{v}_{max}$ je maximálna rýchlosť tj. rýchlosť v osi potrubia ktorého polomer je R . Exponent „ n “ nie je konštanta, ale mení sa s Reynoldsovým číslom od 7 do 10 a s drsnosťou potrubia. Pre pomer strednej a maximálnej rýchlosti m v potrubí je možné odvodiť

$$m = \frac{v_s}{v_{max}} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

Exponent „ n “ a pomer rýchlostí „ m “ môžeme určiť z podmienky rovnováhy síl trecích a tlakových. Ich hodnoty platia pre určitý rozsah Re čísla:

- pre hydraulicky hladké potrubie $2320 \leq Re < 10^5 \Rightarrow n = 1/7 = 0.143, m = 0.817$
- pre $8 \cdot 10^4 < Re < 5 \cdot 10^6 \Rightarrow n = 1/8 = 0.125, m = 0.837$
- pre väčšiu rýchlosť v rozsahu $Re > 5 \cdot 10^6 \Rightarrow n = 1/10 = 0.1, m = 0.866$

Rýchlostný profil v potrubí môžeme merať (napríklad Pitotovou trubicou) a mocnitéľ „ n “ určiť experimentálne.

Mocninový zákon vyhovuje dobre pre jadro prúdu, ale pre oblasť blízko steny (viskózna a prechodová vrstva) nie je táto funkcia platná.

Mocninový rýchlostný profil je možné vyjadriť

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{\max}} = \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)^{n_0}$$

kde y je vzdialenosť od osi potrubia, R polomer potrubia. Exponent n_0 v mocninovom rýchlostnom profile je funkcia Re čísla a z experimentálnych výsledkov bol pre určený vzťah

$$\frac{1}{n_0} = 1 + 6\sqrt{\frac{\text{Re}}{50}}. \text{ Pomer strednej a maximálnej rýchlosti } m$$

$$m = \frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{1}{(n_0 + 1)}.$$

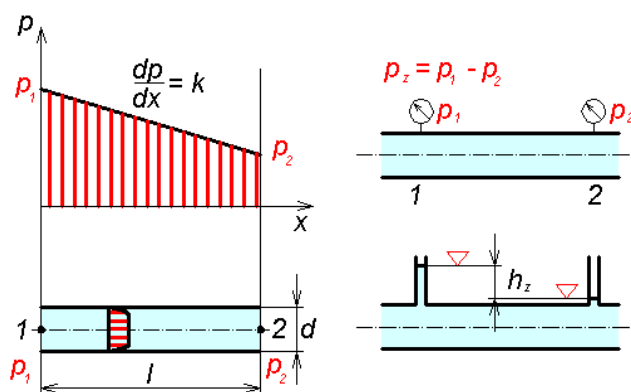
Vyššie uvedené prístupy k popisu rozloženiu rýchlosti po priereze potrubia môžu poskytnúť iba stredné hodnoty zložiek rýchlostí, prípadne súčiniteľ turbulentných trecích strát. Nedokážu však stanoviť ďalšie dôležité veličiny, ktoré charakterizujú turbulenciu, ako sú napr.

Reynoldsove napätia, kinetická energie turbulentných fluktuácií $k = \frac{\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}}{2}$, atd. Tieto veličiny však spadajú už do problematiky štatistických modelov turbulencie.

7. Prúdenie skutočných tekutín - straty

Pri prúdení skutočných tekutín vznikajú následkom viskozity hydraulické odpory, tj. sily, ktoré pôsobia proti pohybu častíc tekutiny. Mechanizmus hydraulických odporov je zložitý jav, ktorý sa dosiaľ nepodarilo exaktne vyriešiť, preto sa v hydraulických výpočtoch uplatňuje množstvo polo empirických metód.

Pod pojmom **hydraulické odpory (straty)** pri prúdení skutočnej tekutiny sú zahrnuté všetky účinky, ktoré spôsobujú rozptýl energie. Rozptýlená (stratová) energia na hydraulických odporoch sa prejaví buď ako tlakový úbytok $\Delta p = p_s$ (vynútené prúdenie v potrubí apod.), alebo úbytok kinetickej energie $m \frac{v^2}{2}$ (napr. výtok z nádob otvormi), alebo zníženie polohovej energie mgh (prúdenie v korytách, gravitačné potrubie, atd.)



Rozptýlenú (stratovú) energiu vzťahujeme obvykle na jednotku hmotnosti alebo tiaže a platí vzťah

$$e_s = Y_s = \frac{p_s}{\rho} = \zeta \frac{v^2}{2} = gh_s [\text{Jkg}^{-1}]$$

$$\frac{e_s}{g} = \frac{Y_s}{g} = \frac{p_s}{\rho g} = \zeta \frac{v^2}{2g} = h_s [\text{m}]$$

kde ζ je stratový súčiniteľ.

Z hľadiska fyzikálnej podstaty je možné odpory (straty) v potrubí rozdeliť na dva typy:

- **trecie odpory**, ktorých príčinou sú trecie sily a ktoré závisia na dĺžke potrubia, kanálu, apod. Stratový súčiniteľ trecieho odporu je teda priamo úmerný dĺžke potrubia L .
- **miestne odpory**, ktoré vznikajú v miestach, kde sa mení veľkosť rýchlosti (zmena prietoku prierezu), smer rýchlosti (zakrivené potrubie), poprípade veľkosť i smer rýchlosti (armatúry) a dochádza pritom k odtrhnutiu prúdu a vzniku vírvej oblasti. Stratový súčiniteľ z miestneho odporu závisí na geometrii uvažovaného miesta a na prúdení.

7.1. Trecie straty v potrubí

7.1.1. Laminárne prúdenie

V prípade laminárneho prúdenia pre $Re < 2320$ sa veľkosť tlakovej straty či stratovej výšky dá odvodiť analyticky. Pri riešení vyjdeme z rovnice pre strednú rýchlosť $v = v_s$ v potrubí a upravíme

$$v = \frac{p_s d^2}{32\eta L} \Rightarrow$$
$$p_s = \frac{32\eta L v}{d^2} = \frac{32\eta L v}{d^2} \frac{v}{v} \frac{\rho}{\rho} \frac{2}{2} = \frac{64}{v d} \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} \rho = \frac{64}{Re} \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} \rho = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} \rho$$

kde **súčiniteľ trenia** $\lambda = \frac{64}{Re}$; $Re = \frac{vd}{\nu}$; $\eta = \rho \nu$

Pre stratovú výšku je možné odvodiť vzťah (tzv. Darcy-Weisbachovu rovnicu)

$$h_s = \frac{p_s}{\rho g} = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

kde $\zeta = \lambda \frac{L}{d}$ je **stratový súčiniteľ**.

7.1.2. Turbulentné prúdenie

V prípade turbulentného prúdenia je šmykové napätie väčšie a preto sú straty trením väčšie ako v prípade laminárneho prúdenia. Súčiniteľ trenia λ je závislý na veľkosti Reynoldsovho čísla a **relatívnej (bezrozmernej) drsnosti** $\varepsilon = \frac{d}{k}$, prípadne $k_r = \frac{k}{d}$, kde k [mm] je absolútna drsnosť steny potrubia, definovaná ako stredná hodnota nerovností na stene. Rovnice pre výpočet súčiniteľa trenia sú stanovené na základe experimentálneho merania. Pre hladké potrubie ($k = 0$) odvodil **Blasius** empirický vzťah

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (Re_k \leq Re \leq 8 \cdot 10^4)$$

Nikuradse pre hladké potrubie udáva podľa výsledkov pokusu vzorec

$$\lambda = \frac{1}{\left[2 \log \left(Re \sqrt{\lambda} \right) - 0,8 \right]^2} \quad (Re > 6 \cdot 10^4)$$

Súčiniteľ trenia v **Altšulovom vzorci** pri uvažovaní drsnosti potrubia je explicitne vyjadrený vo forme

$$\lambda = 0,1 \left(\frac{100}{Re} + \frac{k}{d} \right)^{0,25}$$

Platí pre oblasť, v ktorej sa uplatní tak vplyv Re čísla, tak aj drsnosti (oblasť zmiešaného trenia). Pre túto oblasť bolo odvodených desiatok rovníc, najčastejšie sa však používa vzorec, ktorý odvodil **Colebrook - White**

$$\lambda = \frac{1}{\left[2 \log \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) + 0,27 \frac{k}{d} \right]^2}$$

Tato rovnica je implicitná a λ sa musí riešiť iteráciami. Preto boli v posledných rokoch odvodené pre λ explicitné vzorce. Ako príklad je uvedená rovnica odvodená **Churchillom**

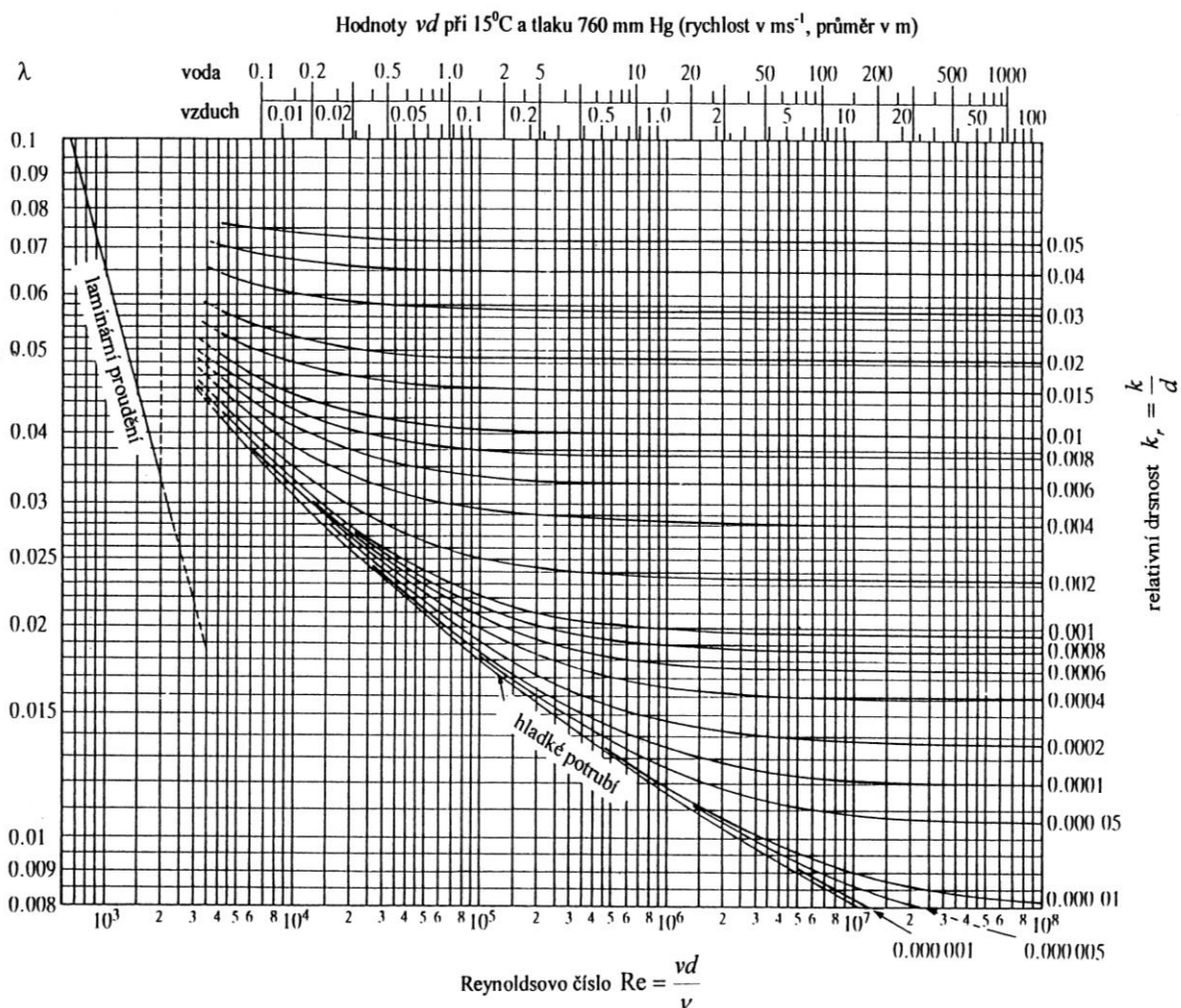
$$\lambda = 8 \left[\left(\frac{8}{\text{Re}} \right)^{12} + \frac{1}{(a+b)^{1,5}} \right]^{\frac{1}{12}}$$

$$a = \left[-2,457 \ln \left(\left(\frac{7}{\text{Re}} \right)^{0,9} + 0,27 \varepsilon \right) \right]^{16} \quad b = \left(\frac{37530}{\text{Re}} \right)^{16}$$

Pre danú pomernú drsnosť má súčiniteľ trenia λ od určitého Reynoldsovho čísla hodnotu stálu a nezáleží na Re. V tejto oblasti nazvanej vyvinuté turbulentné prúdenie vyjadril Nikuradse súčiniteľ trenia vzťahom

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \log \frac{d}{k} + 1,138 \right)^2} \text{ platným pre } \left(\frac{k}{d} \text{Re} \sqrt{\lambda} \right) > 191,2$$

Graficky spracované závislosti súčiniteľa trenia na Reynoldsovom čísle a prípadne drsnosti ako parametra boli vyhodnotené v diagrame Nikuradseho $\lambda = f(\text{Re}, k_r)$



Absolutná drsnost' potrubia k závisí od druhu materiálu, spracovania a prevádzkových podmienok (korózie, erózie). Podľa skúsenosti rôznych autorov sú v uvedené drsnosti vybraných materiálov.

tab. 7.1 Absolutná drsnost' materiálov potrubia k

Materiál potrubia	Pôvodný stav (mm)	Korodovaný stav (mm)
Ťahané trubky mosadzné, medené, hliníkové	0,0015 až 0,003	0,003 až 0,1
Bezošvé trubky oceľové	0,04 až 0,1	0,1 až 0,9
Ťahané trubky oceľové	0,03 až 0,12	0,12 až 0,9
Zvárané trubky oceľové	0,05 až 0,1	0,1 až 0,9
Pozinkované trubky oceľové	0,15 až 0,5	0,5 až 3,5
Vodovodné potrubie po 20 a viac rokoch v prevádzke		0,6 až 3,0
Sklenené trubky, trubky z plastov	0,001 5 až 0,01	
Pryžové hadice	0,01 až 0,03	
Betónové potrubie	0,3 až 6,0	

7.1.1. Straty trením v nekrhových prietokných prierezoch

Laminárne prúdenie v nekrhových potrubíach sa dá riešiť matematicky. V prípade laminárneho prúdenia sa trením o steny potrubia zbrzdia častice v celom prietoknom priereze.

„Medzná vrstva“ vyplňuje celý prietochý prierez a jeho tvar má vplyv na rozloženie rýchlostí alebo rýchlostný profil. Preto je nutné pre každý prierez odvodiť vzťah pre trecie straty a nie je možné ich prepočítavať z jedného prierezu na druhý.

V prípade turbulentného prúdenia v potrubí sa vplyv trecích síl na obtekaných stenách obmedzí na podstatne menšiu vrstvu, ktorá v porovnaní s charakteristickými rozmermi prietochého prierezu je veľmi malá. Hrúbka medznej vrstvy u turbulentného prúdu závisí predovšetkým na Re čísle. Ak tvar prietokového prierezu potrubia nemá v podstate vplyv na súčiniteľ trenia, sú straty trením turbulentného prúdenia v potrubí nekrhového prierezu určené rovnakými vzorcami ako pre kruhové potrubie. Miesto priemeru d kruhového potrubia je však treba dosadiť ekvivalent pre nekrhové prierezy, pomocou ktorého sa vypočíta Re-číslo, súčiniteľ trenia a stratová výška. Tento ekvivalent sa nazýva hydraulický priemer – d_h a je určený vzťahom

$$d_h = \text{konst} \frac{S}{o}$$

Konštantu úmernosti je možno zvoliť. Výhodne sa stanoví z podmienky, aby hydraulický priemer kruhového potrubia d_h bol rovný jeho priemeru d čiže $d_h = d$. Pretože v kruhovom

potrubí je prietochý prierez $S = \frac{\pi}{4} d^2$ a zmáčaný obvod $o = \pi d$, je

$$d_h = k \frac{\frac{\pi}{4} d^2}{\pi d} = k \frac{d}{4} \Rightarrow k = 4$$

Je teda hydraulický priemer definovaný vzťahom

$$d_h = 4 \frac{S}{o}$$

Hydraulický priemer d_h je teda ekvivalent nekrhového prierezu a predstavuje kruhové potrubie o svetlosti $d = d_h$, v ktorom sú rovnaké hydraulické straty ako v nekrhovom priereze.

Hydraulický priemer sa môže dosadiť do výrazu pre pomernú drsnosť, do Reynoldsovho čísla a do výrazu pre stratovú výšku a z toho je zrejmé, že výpočet straty trením v nekrhovom potrubí (turbulentné prúdenie) je zhodný s výpočtom straty v kruhovom potrubí.

7.2. Miestne odpory (straty)

V každom potrubí bývajú okrem rovných úsekov i rôzne kolena, odbočky, armatúry, meracie zariadenia, čističe, chladiče apod., okrem toho sa môže meniť prierez potrubia. V týchto častiach potrubí dochádza k zmene veľkosti i smeru rýchlosti prúdenia, čo vyvolá vírenie, poprípade odtrhnutie prúdu kvapaliny spojené s rozptylom energie. Energia prúdiacej kvapaliny sa rozptyľuje v mieste potrubí, kde dochádza k zmene vektora rýchlosti, preto je rozptyl nazvaný miestnymi stratami.

Veľkosť miestnych strát, tj. **stratová energia pri miestnych stratách** sa vyjadruje obdobne ako strata trením rýchlostnou výškou a stratovým súčiniteľom

$$e_s = \frac{p_s}{\rho} = gh_s = \zeta_m \frac{v^2}{2}$$

Stratový súčiniteľ ζ_m závisí od druhu miestnej straty, konštrukčných parametroch, drsnosti stien, tvaru rýchlostného profilu a na režimu prúdenia. Vplyv Reynoldsovho čísla sa prejavuje obdobne ako v prípade trecích odporov predovšetkým pri malých hodnotách tohto čísla. **Určuje**

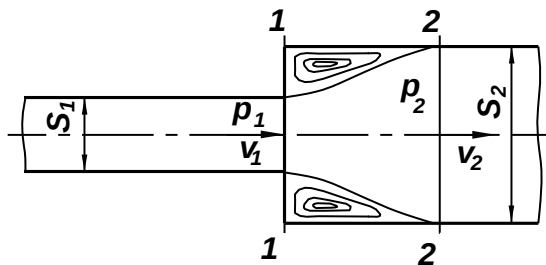
sa meraniami. Je možné stanoviť súčiniteľ ζ z nameranej tlakovej straty p_s na miestnom odpore. Pre hodnoty Reynoldsovho čísla $Re \geq 10^5$ sú hodnoty stratového súčiniteľa takmer konštantné.

Miestne odpory v potrubí sa môžu vyjadriť ekvivalentnou dĺžkou l_e potrubia, v ktorom je strata trením rovnako veľká ako miestna strata.

$$\zeta \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l_e}{d} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow l_e = \frac{\zeta}{\lambda} d$$

Za súčiniteľ trenia a priemer sa dosadia hodnoty platné pre rovný úsek potrubia. Pri zmenách prierezu sa mení prietočná rýchlosť a miestne straty sa môžu vyjadriť v závislosti od prítokovej v_1 alebo odtokovej rýchlosti v_2

Straty náhlým rozšírením prierezu



$$h_s = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

Z tejto rovnice vyplýva vzťah pre prepočet stratových súčiniteľov

$$\zeta_1 = \zeta_2 \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 = \zeta_2 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2$$

upravený pomocou rovnice kontinuity $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Pre kruhové prierezy platí

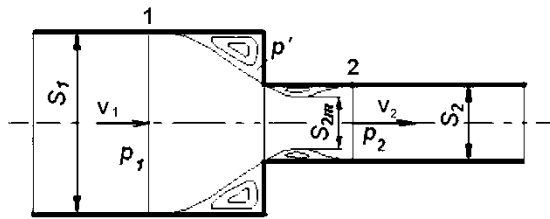
$$\zeta_1 = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \zeta_2; \quad \zeta_2 = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \zeta_1$$

Pri náhlom rozšírení prierezu sa odtrhne prúd kvapaliny od stien a vytvoria sa víry. Potom sa prúd kvapaliny rozšíri po celom priereze, pri rozšírení prierezu klesá stredná rýchlosť, a preto musí stúpnuť statický tlak. Borda odvodil pre stratovú výšku pri náhlom rozšírení prierezu vzťah

$$h_s = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

Straty náhlým zúžením prierezu

Pri strate náhlým zúžením prierezu dochádza v mieste náhleho zúženia, k zrýchleniu kvapaliny. Prúd kvapaliny nemôže sledovať tvar stien potrubia. Postup odvodenia je podobný ako v predchádzajúcom prípade.

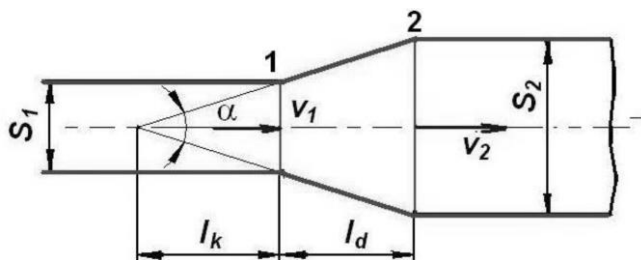


$$h_s = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \left(\frac{S_1}{S_2} - 1 \right) \frac{S_1}{S_2} \frac{v_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

Straty v difúzore

Ak bude prechod z menšieho prierezu na väčší pozvoľný, ako je tomu v difúzore, straty môžu byť podstatne menšie. Difúzor sa používa hlavne tam, kde je potrebné premeniť kinetickú energiu prúdu na tlakovú s najmenšími stratami. Je známe, že veľmi malým rozšírením prierezu sa mení prúdenie, a to najmä rýchlostný profil, ktorý je tým viac natiahnutý v smere prúdenia, čím je uhol rozšírenia väčší.

Do uhla rozšírenia $\alpha = 6 - 8^\circ$ zostáva rýchlostný profil symetrický k osi difúzora. Pri ďalšom zväčšení uhla sa prúd účinkom tlakového gradientu odtrhne od steny a symetria prúdu sa poruší.



Pri uhloch rozšírenia $\alpha = 10 - 50^\circ$ nastáva odtrhnutie prúdu spravidla od jednej steny, na ktorej je rýchlosť menšia. Rýchlostný profil sa stane nesymetrickým. Nesúmernosť prúdu je často doprevádzaná nestabilným odtrhávaním, čo vyvolá kmitanie prúdu a tvorenie vírov.

V difúzoroch s väčším uhlom rozšírenia ako $50 - 60^\circ$ nemôže prúd sledovať steny difúzora a odtrháva sa po celom priereze. Odtrhávanie od steny je sprevádzané menšími pulzáciami prúdu. Zvyšuje sa šmykové napätie následkom zväčšenia turbulencie, čo spôsobuje zvýšenie strát. V difúzore vznikajú aj straty trením, preto celkovú stratovú výšku je možné rozpísať na stratovú výšku spôsobenú stratami trením a stratami zmenou prierezu $h_{sd} = h_{st} + h_{sr}$. Skutočný tlakový rozdiel v difúzore je daný rozdielom tlakov v rozšírenom a počiatočnom priereze.

$$p_2 - p_1 = \rho \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - \rho g h_{sd}$$

Stratové súčinitele v prierezoch 1 a 2 sú dané

$$\xi_{d1} = \frac{h_{sd}}{\frac{v_1^2}{2g}} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 - \frac{p_2 - p_1}{\rho \frac{v_1^2}{2}} = 1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 2 \frac{p_2 - p_1}{\rho v_1^2}$$

$$\xi_{d2} = \frac{h_{sd}}{\frac{v_2^2}{2g}} = 1 - 2 \frac{p_2 - p_1}{\rho v_2^2} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1 - 2 \frac{p_2 - p_1}{\rho v_2^2}$$

Hydraulické straty v difúzore sú spojené so zmenou prierezu, a preto je ich možné vyjadriť pomerom k strate náhlým rozšírením prierezu

$$\xi_r = \frac{h_{sd}}{h_{sn}} = \frac{h_{sd}}{\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}}$$

Tento súčiniteľ sa nazýva stupeň rázu. Pri rastúcom uhle roztvorenia difúzora, kedy zmena prierezu prechádza v náhlu zmenu prierezu, sa stupeň rázu blíži hodnote 1.

$$\xi_{d1} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \xi_r$$

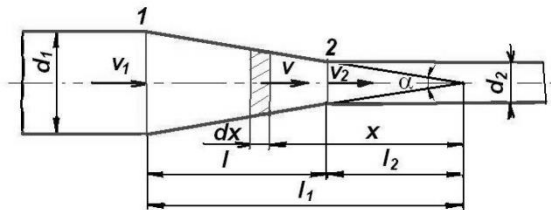
$$\xi_{d2} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 \xi_r$$

Straty v kuželovom potrubí - konfúzore

Pri zužovaní prierezu je hydraulická strata spôsobená takisto trením je ju možné určiť integráciou na elementárnej dĺžke kuželového potrubia.

Stratová výška na elementárnom úseku dx je určená

$$dh_s = \lambda \frac{dx}{d} \frac{v^2}{2g}$$



Celková strata sa určí integráciou diferenciálnej rovnice, pričom je nutné uvažovať zmenu priemeru a rýchlosti po dĺžke kuželového potrubia. Súčiniteľ trenia λ sa mení s Re číslom, avšak v malom rozmedzí, takže sa uvažuje stredná hodnota λ_s ako konštanta.

Stratová výška v kuželovom potrubí je tak

$$h_s = \frac{1}{4} \lambda_s \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \left(1 - \frac{l_2^4}{l_1^4}\right) = \frac{1}{4} \lambda_s \frac{l}{d_1 - d_2} \left(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}\right) \frac{v_2^2}{2g} = \xi_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

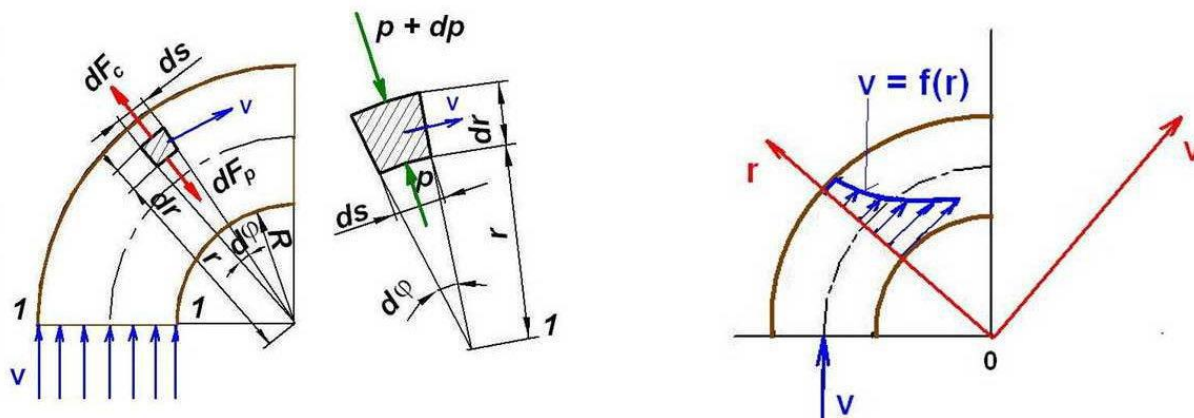
$$\xi_2 = \frac{1}{4} \lambda \frac{l}{d_1 - d_2} \left(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}\right) = \frac{\lambda_s}{8 \cdot tg \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]$$

Zmena smeru prúdenia - oblúk

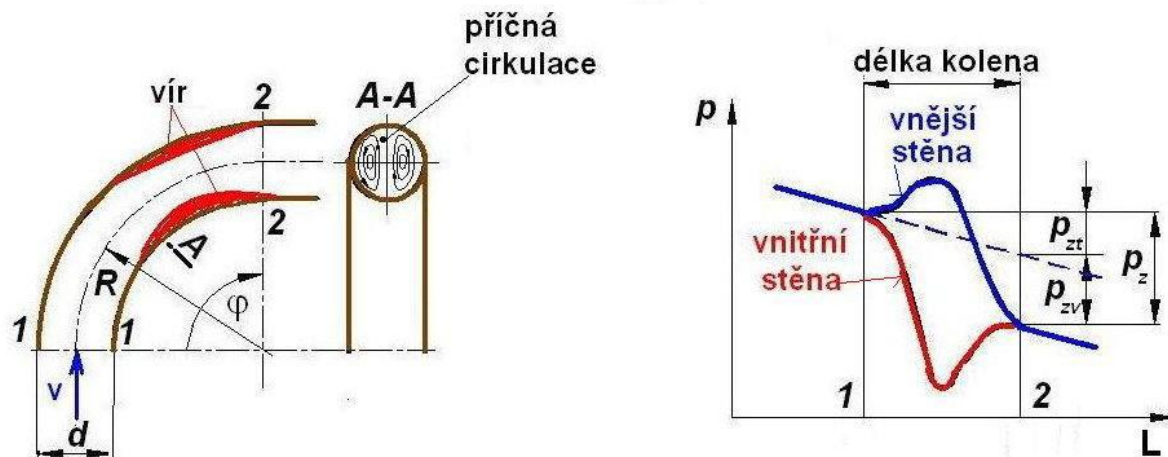
V každom potrubnom systéme sa spravidla vyskytuje prvok, v ktorom sa mení smer a rýchlosť tekutiny. Tento prvok tvorí zakrivené potrubie, oblúky, kolená a tiež kombinácie oblúkov. V týchto prvkoch dochádza k rozptylu energie, ktorá sa vyjadruje miestnou stratou zmenou smeru prúdenia.

K vytvoreniu predstavy prúdenia v zakrivenom potrubí je potrebné si všimnúť prúdenie dokonalej kvapaliny v kruhovom oblúku. Predpokladá sa, že kvapalina priteká ku kolenu konštantnou rýchlosťou rozloženou po celom priereze rovnomerne.

Následkom zakrivením dráh pôsobí na častice kvapaliny odstredivá sila, ktorá musí byť v rovnováhe s tlakovou silou. Aby vznikla tlaková sila pôsobiaca do stredu zakrivenia, musí na väčšom polomere r pôsobiť väčší tlak. Toto je možné dosiahnuť v súlade s Bernoulliho rovnicou tak, že sa rýchlosť častice zníži.

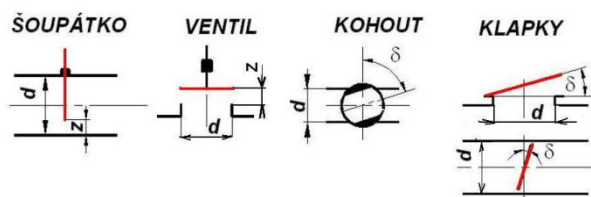


Závislosť rýchlosti a polomeru je graficky znázornená na nasledujúcom obrázku



Skutočná tekutina nemôže pretekať kolenom ako dokonalá. Častice pomalšie budú brzdiť častice rýchlejšie, pričom v skutočnej kvapaline sa častice premiestňujú na väčší alebo menší polomer. Vzniká zložitý špirálovitý priestorový pohyb. Súčasťou tohto prúdenia je vírivé prúdenie v priečnom reze, charakteristické dvoma vírmi opačného smeru. Prúd na vnútornej hrane kanála sa môže odtrhnúť, takže vznikajú víry aj pri stenách. Priebeh tlaku na vnútornej a vonkajšej stene je na predchádzajúcom obrázku. V diagrame je znázornená tlaková strata a jej zložky odpovedajúce trecím stratám a víreniu.

Armatúry (ventily, šupátka, kohútiky a klapky) slúžia k uzavretiu potrubia alebo k regulácii prietoku.



Pri úplne otvorených uzáverách majú byť straty čo najmenšie. Najmenšie odpory majú šupátka a kohútiky. Hydraulický odpor je spôsobený jednak trením, ale hlavne vírením. Doskou šupátka, ventilu, klapky alebo telesom kohútika sa zužuje prietochý prierez. Prúd kvapaliny nasleduje prúdnicami zmeny prierezu a dochádza k odtrhnutiu prúdnic a vzniku vírivých oblastí. Tieto javy vyvolávajú hydraulický odpor spojený s rozptylom energie. Stratový súčiniteľ sa zisťuje meraním. Všeobecne závisí od konštrukčného prevedenia armatúry, na jej pomernom otvorení a Re číslu. Pretože armatúry predstavujú premenlivý odpor, používajú sa často v technickej praxi aj na reguláciu prietoku tekutín. V prípade ventilov sa vhodný priebeh stratového súčiniteľa dosahuje tvarom kuželky. Regulačné vlastnosti armatúr sú charakterizované tzv. menovitou kapacitou armatúry K_v . Menovitú kapacitu armatúry $K_v = 1$ má armatúra, ktorou preteká prietok $Q_v = 1 \text{ m}^3/\text{h}$ pri tlakovom spáde $\Delta p = 10^5 \text{ Pa}$.

Všeobecne sa menovitá kapacita armatúry vypočíta pre prúdenie vody z rovnice

$$K_v = Q_v \sqrt{\frac{100000}{\Delta p}}$$

pre inú látku je to

$$K_v = Q_v \sqrt{\frac{100000}{\Delta p}} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\rho_v}}$$

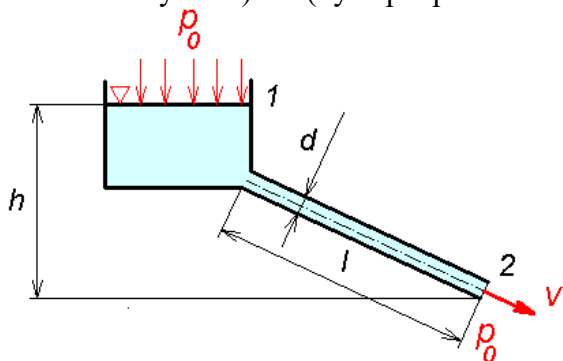
kde ρ_v je hustota vody pri teplote 15°C .

8. Príklady hydraulického výpočtu potrubí

8.1.1. Jednoduché potrubie s nádržou

Potrubie slúži k doprave tekutín. Pri jeho návrhu vychádzame z predpokladu jednorozmerného prúdenia. Za **jednoduché potrubie** považujeme potrubie s konštantným prierezom. V prípade dlhých potrubí prevažujú straty trením, u kratších potrubí sa môžu významne uplatniť straty miestne.

Jednoduché potrubie pripojené k nádrži má dĺžku l , priemer d . Predpokladá sa, že nádrž je rozmerná a teda rýchlosť prúdenia na tejto hladine je téměř nulová. Potom pre prierez 1 (hladina v nádrži vo výške h) a 2 (výstup z potrubia do ovzdušia) platí **Bernoulliho rovnica**:



$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + e_s$$

a po dosadení

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{0^2}{2} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g \cdot 0 + \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2}$$

a po úprave

$$gh = \frac{v^2}{2} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) = \frac{v^2}{2} (1 + \zeta_c)$$

Z tejto rovnice je možné vyjadriť skutočnú rýchlosť

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} = \sqrt{2gh} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_c}} = v_t \varphi$$

Je zrejmé, že rýchlostný súčiniteľ $\varphi = \frac{v}{v_t}$ je daný pomerom skutočnej a teoretickej rýchlosti.

V rovnici sú uvažované straty trením i súčet strát miestnych $\sum \zeta$. **Celkový stratový súčiniteľ**

$$\zeta_c = \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta = \lambda \frac{l + \sum l_e}{d}$$
 zahrnuje straty trením a všetky straty miestne.

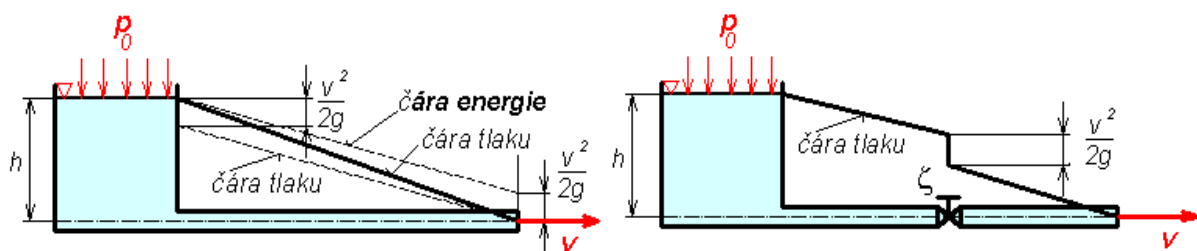
Jednoduché potrubie je určené pre hydraulický výpočet štyrmi veličinami: dĺžkou potrubia l , priemerom potrubia d , spádom h a rýchlosťou v alebo prietokom Q . Súčasne sú známe fyzikálne vlastnosti tekutiny, absolútna drsnosť steny potrubia, trecí súčiniteľ λ a stratový súčiniteľ všetkých miestnych strát. Jedna z veličín $l - d - h - v$ alebo Q môže byť určená riešením Bernoulliho rovnice, pri čom pre trecí súčiniteľ je vhodné voliť pre jednoduchosť explicitnú rovnicu.

8.1.1. Tlaková čiara

Pri návrhu potrubia je nutné vzhľadom k spoľahlivej činnosti potrubia dodržať dôležitú podmienku a síce, že os potrubia vždy leží pod čiarou tlaku. Pre definovanie čiary tlaku sa predpokladá vodorovné potrubie s nádržou. Ak sa odpočíta od hladiny v nádrži rýchlostná výška $\frac{v^2}{2g}$ a spojí sa takto vzniknutý bod s koncom potrubia, dostaneme čiaru tlaku. Pretože pri

potrubí obvykle platí $\frac{v^2}{2g} \ll h$, potom čiaru tlaku je možné zjednodušene dostať ako spojnicu hladiny v nádrži s koncom potrubia..

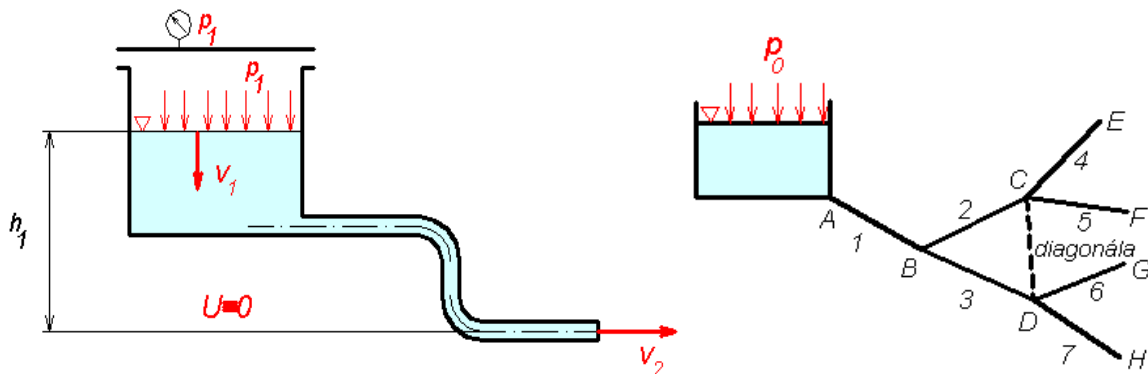
Na sa uvádza čiara tlaku u potrubia s miestnou stratou, napr. armatúrou situovanou vo všeobecnom mieste potrubí.



8.1.1. Potrubný systém

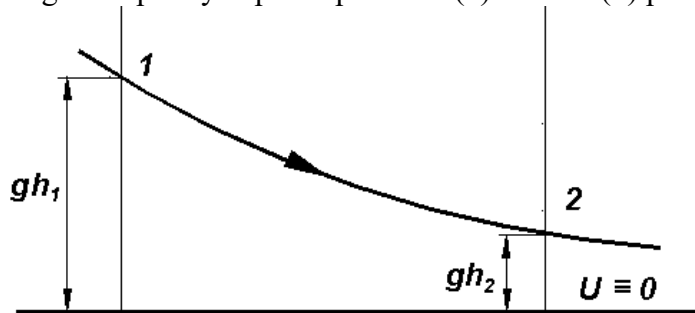
Potrubný systém je buď **jednoduchý**, tvorený jedným potrubím alebo **zložený**, pozostávajúci z väčšieho počtu potrubí tvoriacich sieť obsahujúcu uzly a vetvy (viď teória elektrických obvodov), prípadne zdroje kvapaliny. Na obr. je schéma prípadu jednoduchého potrubného systému.

Na obr. je schematický znázornený **zložený potrubný systém**, kde je možno identifikovať časti rozvetveného a okružného systému v kombinácii. Okruh vznikne prepojením dvoch uzlov pomocí diagonály. Návrh vetvej potrubnej siete spočíva v určení vhodných priemerov potrubí v jednotlivých vetvách a výpočet tlaku, tzv. tlakové čiary v sieti. Ak sú priemery potrubí dané, obmedzí sa výpočet na určenie tlakovej čiary s prípadným odporúčením zmeny nevyhovujúcich priemerov potrubí. Ak je v sieti uzavretá slučka (okruh), je nutné použiť niektorú z metód pre riešenie okruhových sietí, ktoré sú aplikáciou Kirchhoffových zákonov (ale na rozdiel od elektrické siete je nutné v potrubných sieťach pre vodu uvažovať nelineárnu závislosť medzi tlakovou stratou Δp a prietokom Q_v). Riešenie takého systému je matematicky zložitejšie, využíva sa maticový prístup k popisu systému a počítače pri numerickom spracovaní.



8.1. Charakteristika potrubia

Pre jednoduché potrubie stáleho prierezu, platí Bernoulliho rovnica, ktorá porovnáva energiu kvapaliny napr. na počiatku (1) a konci (2) potrubného úseku.



$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + gh_s$$

Pokiaľ sa predpokladá potrubie konštantného prierezu (jedná sa o jedno potrubie), potom pri platnosti rovnice spojitosti ($v_1 = v_2$) sa Bernoulliho rovnica zjednoduší na tvar

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + gh_s$$

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = g(h_2 - h_1) + \zeta_c \frac{v^2}{2}$$

kde $\zeta_c = \lambda \frac{L}{d} + \sum \zeta$. Pretože býva zvykom vyjadrovať **charakteristiku potrubia** ako závislosť tlakového spádu Δp na prietoku Q , potom

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) + \rho \frac{\zeta_c}{2} \left(\frac{4}{\pi d^2} \right)^2 Q^2 = \rho gh + k_Q Q^2 = \rho gh + k_Q Q|Q|$$

Tlaková strata je úmerná druhej mocnine prietoku Q^2 . Pokiaľ by prúdenie menilo smer, potom bude jednoducho tlaková strata úmerná výrazu $Q|Q|$. Ak je uvažovaná len tretia strata v potrubí, je konštanta k_Q určená vzťahom

$$k_Q = \rho \lambda \frac{8l}{d^5 \pi^2}$$

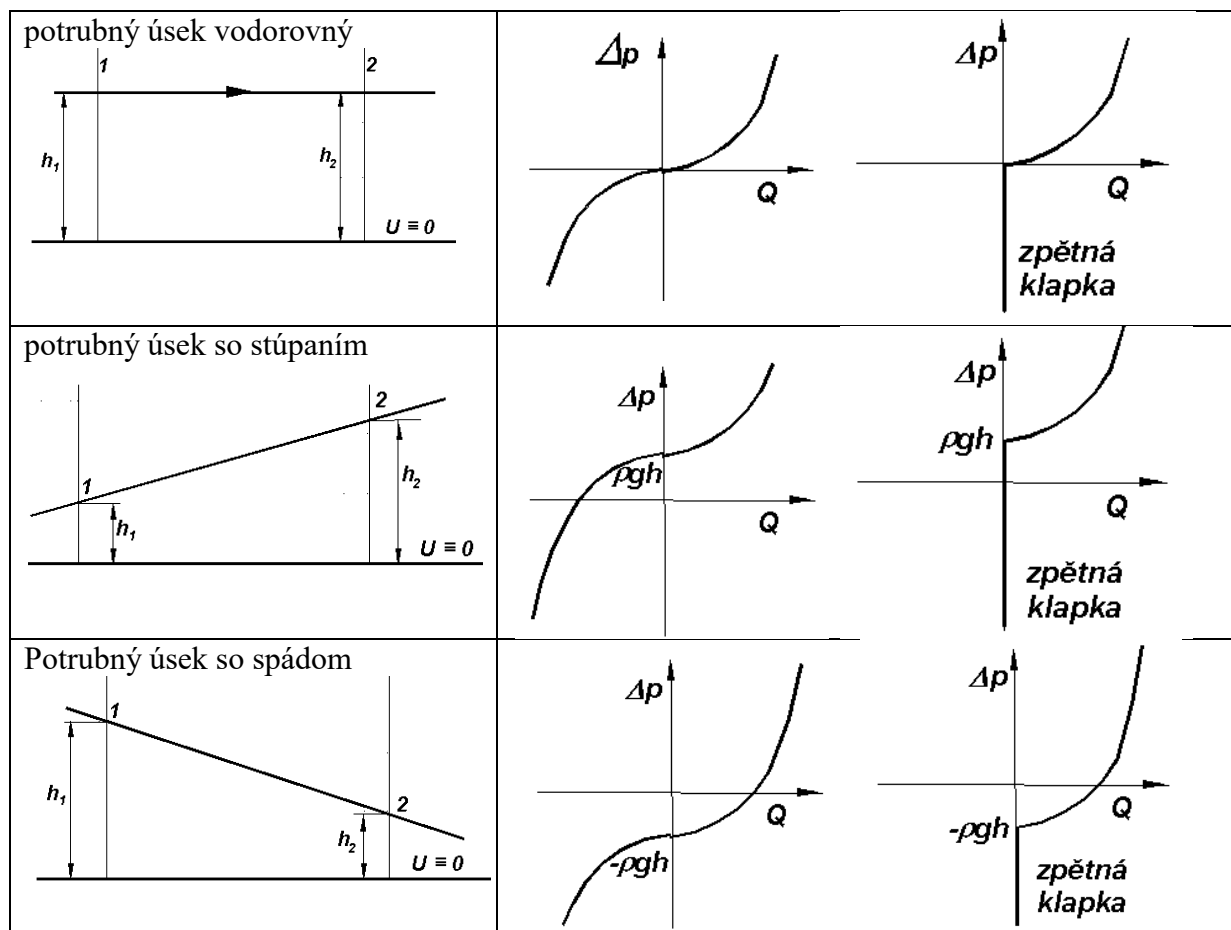
Prepočet medzi mernou energiou, tlakovou stratou a tlakovou výškou je nasledujúca

$$Y = \frac{\Delta p}{\rho} = gH$$

kde Y je merná energia, $\Delta p = p_1 - p_2$ je tlakový spád a tlaková výška $H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$ udáva

rozdiel tlakových výšok na počiatku a na konci potrubia, ktorý je potrebný pre prietok Q .

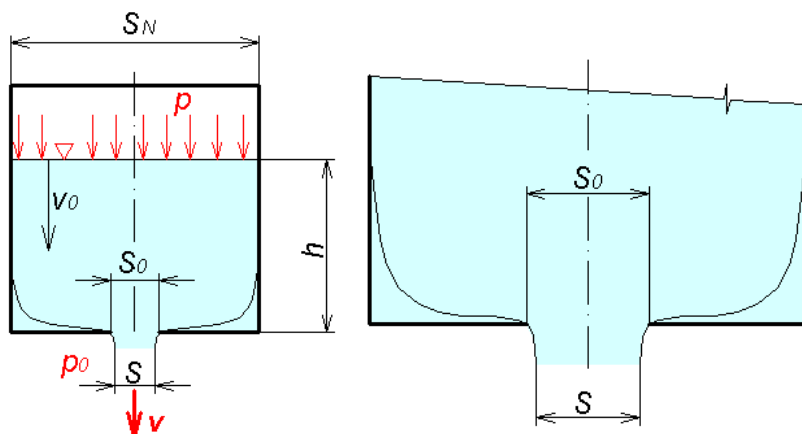
Ak je potrubie vodorovné, potom $h = 0$ a závislosť $\Delta p = f(Q)$ je kvadratická parabola s vrcholom v počiatku súradníc $Q, \Delta p$. Ak je na začiatku potrubia spätná klapka, ktorá bráni prietoku v opačnom zmysle, potom charakteristika potrubia v tretom kvadrante splynie so zápornou osou Δp . Charakteristika potrubnej vetvy so stúpaním je posunutá vo zvislom smere a to o tlak $\Delta p = \rho gh$. Pri tlakovom spáde zápornom sa nastaví prietok v opačnom zmysle, pokiaľ vo vetve nie je spätná klapka.



9. Výtok kvapaliny z nádob, prepady

9.1. Výtok malým otvorom

Uvažujeme výtok kvapaliny otvorom na dne nádoby podľa **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov..** Nádoba má konštantný prierez S_n (valec, hranol) a je naplnená do výšky h . Na dne je malý ostrohranný otvor s prierezom S_0 , ktorým kvapalina vyteká do tlaku ovzdušia p_0 . Vo všeobecnom prípade sa uvažuje v nádrži tlak p , ktorý je od tlaku ovzdušia p_0 odlišný.



Pretože polohová výška je pre celý otvor konštantná, je **rýchlosť** v otvore **rovnomerne rozložená**. Výtoková rýchlosť sa v tomto prípade vypočíta z Bernoulliho rovnice. Pre skutočnú kvapalinu platí Bernoulliho rovnica písaná pre hladinu v nádrži a pre výtokový prierez v tvare:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0 + gh_s$$

Predpokladáme, že prierez výtokového otvoru S_0 je v porovnaní a prierezom nádrže S_n veľmi malý, potom rýchlosť poklesu hladiny $v_0 \rightarrow 0$. Pre stratovú výšku platí známa rovnica

$$h_s = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

Z rovnice pre výtokovú rýchlosť sa odvodí vzťah

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2 \left(gh + \frac{p-p_0}{\rho} \right)} = \varphi \sqrt{2 \left(gh + \frac{p-p_0}{\rho} \right)}$$

Pre teoretickú výtokovú rýchlosť ($\zeta = 0$) dostaneme

$$v_t = \sqrt{2 \left(gh + \frac{p-p_0}{\rho} \right)}$$

Pomer skutočnej a teoretickej rýchlosti je **rýchlostný súčiniteľ**

$$\varphi = \frac{v}{v_t} = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} < 1$$

Pri rovnakom tlaku v nádrži a vo výtokovom otvore $p = p_0$ je výtoková rýchlosť určená rovnicou

$$v = \varphi \sqrt{2gh}$$

Pre $\varphi = 1$ je teoretická rýchlosť

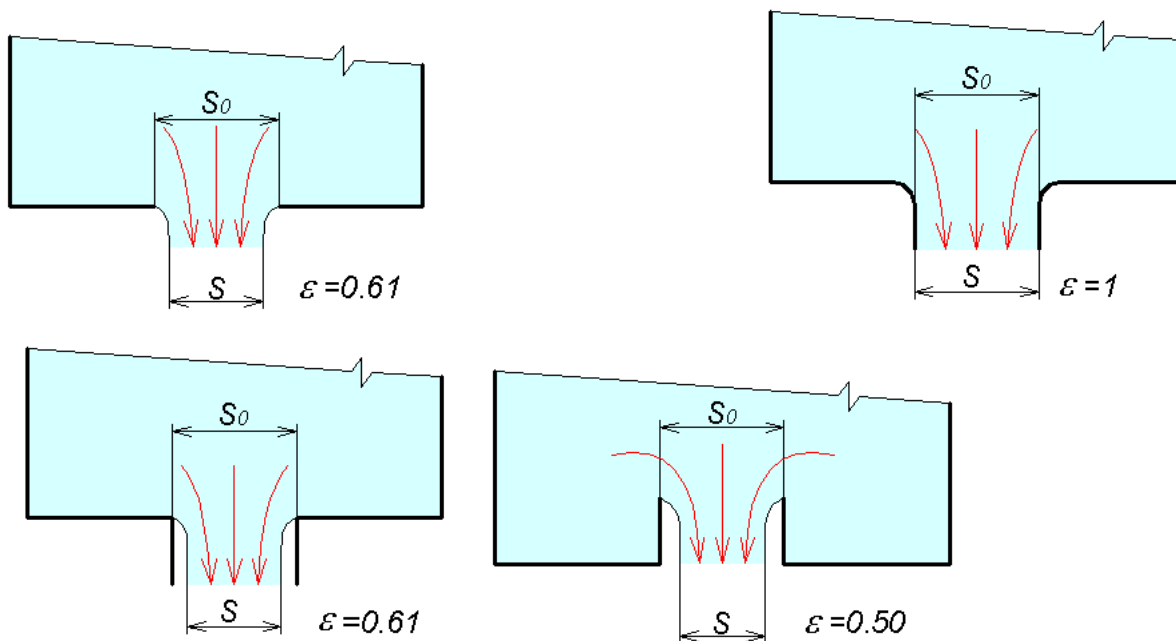
$$v_t = \sqrt{2gh}$$

čo je **Torricelliho výraz**.

Pri výtoku z nádoby nevyplňuje prúd kvapaliny spravidla celý výtokový otvor, lebo prúdnice sa nemôžu náhle zakriviť podľa hrán otvorov.. Zotrvačnosťou častíc kvapaliny je spôsobené zúženie alebo kontrakcie lúča. Vyjadruje sa **súčiniteľom kontrakcie**

$$\varepsilon = \frac{S}{S_0} < 1, \text{ odtiaľ } S = \varepsilon S_0$$

Súčiniteľ zúženia závisí všeobecne na tvaru výtokového otvoru, jeho umiestneniu voči bočným stenám a na Re-čísle.



Skutočný výtok kvapaliny otvorom je

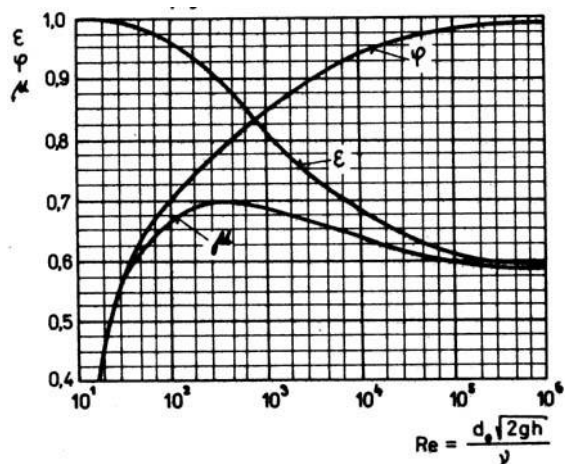
$$Q_v = vS = \varepsilon \varphi S_0 \sqrt{2gh} = \mu S_0 \sqrt{2gh}$$

kde

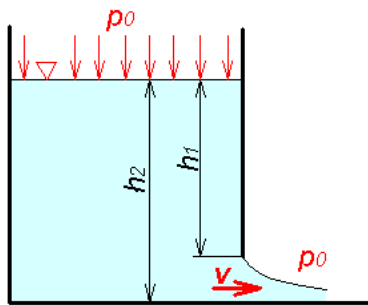
$$\mu = \frac{Q_v}{Q_{vt}} = \varepsilon \cdot \varphi < 1$$

je **výtokový súčiniteľ**, ktorý rovnako závisí na tvaru otvoru či nátrubku a Re-čísle.

Závislosť $\varphi, \varepsilon, \mu = f(\text{Re})$ pre ostro hranný otvor podľa výsledkov meraní je uvedený na

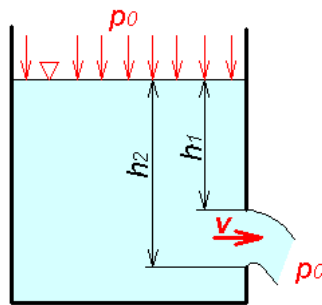


výtok pri dne



$$\mu = 0,6 \div 0,62$$

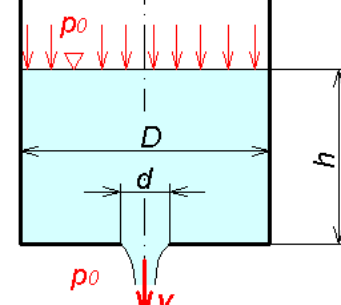
výtok bočným otvorom



$$\text{ostrohranný } \mu = 0,62 \div 0,64$$

$$\text{zaoblený } \mu = 0,7 \div 0,8$$

výtok otvorom na dne nádoby

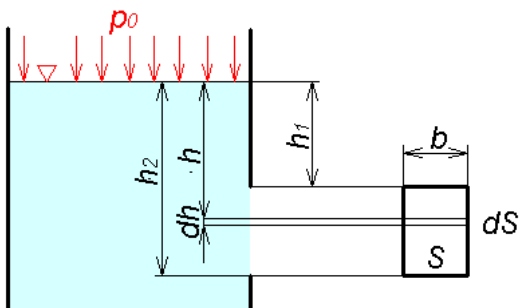


d/D	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
μ	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

9.2. Výtok veľkým otvorom v bočnej stene

Pri relatívne veľkom otvore vo zvislej stene je nutné rešpektovať závislosť výtokovej rýchlosti kvapaliny na hĺbke uvažovaného miesta pod hladinou tlaku ovzdušia. Výtok kvapaliny z nádoby sa určí integráciou. Elementom výtokového otvoru $dS = b \cdot dh$ vyteká elementárny **skutočný prietok** kvapaliny

$$dQ_v = \mu \cdot dS \cdot v = \mu b \sqrt{2gh} \cdot dh$$



Výtok rozmerným otvorom je určený všeobecne integrálom

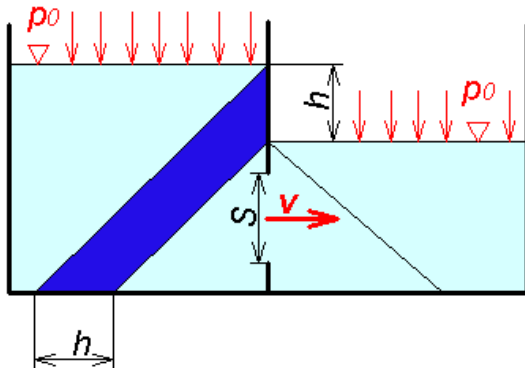
$$Q_v = \int_S dQ = \mu \int_{h_1}^{h_2} b \sqrt{2gh} \cdot dh$$

Ak má otvor obdĺžnikový prierez $b = konst$, potom výtok určíme integráciou rovnice

$$Q_v = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2} \right)$$

9.3. Výtok ponoreným otvorom

Kvapalina vyteká otvorom do prostredia vyplneného rovnako kvapalinou. Ide v podstate o prietok otvorom medzi dvoma nádobami. **Otvor je pod oboma hladinami** v nádržoch, preto je označovaný ako ponorený. Výtoková rýchlosť otvorom závisí na rozdieli hladín v nádobách.



K odvodeniu vzťahu pre výtokovú rýchlosť sa pomyselne otvor zakryje doskou. Tlak kvapaliny pôsobiacej na dosku z oboch strán je priamo úmerný hĺbke uvažovaného miesta do hladiny tlaku ovzdušia. Ich priebeh je vyznačený na obrázku priamkami. Tlaky pôsobia proti sebe, preto výsledný **tlak** je daný ich rozdielom, ktorý je po celej stene omočenej z oboch strán konštantný $\Delta p = \rho g h$

Po odkrytí otvoru začne kvapalina pretekať **teoretickou výtokovou rýchlosťou**

$$v_t = \sqrt{2gh}$$

Tento výraz je formálne totožný s Torricelliho výrazom. Pretože tlakový rozdiel je po celom priereze ponoreného otvoru rovnaký, je výtoková rýchlosť vo všetkých miestach rovnaká a nezávislá na tvare otvoru S . Pre **objemový prietok** preto platí rovnica

$$Q_v = \mu S \sqrt{2gh}$$

9.4. Výtok pri súčasnom prítoku

Z otvorenej nádoby **vyteká** kvapalina (Q_v) otvorom S_0 a súčasne **priteká** Q_{vp} , pričom $Q_{vp} \neq Q_v$. Výtok pri ľubovoľnej výške h hladiny je určený vzťahom

$$Q_v = \mu S_0 \sqrt{2gh}$$

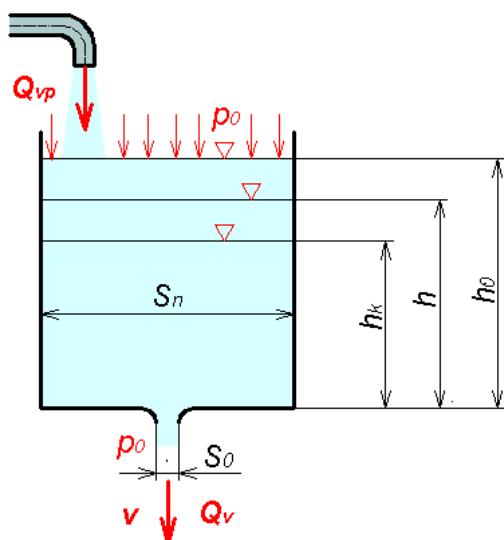
Ak je $Q_{vp} \neq Q_v$ poloha hladiny sa v nádobe bude meniť. Pokiaľ je $Q_{vp} > Q_v$, hladina stúpa, v opačnom prípade $Q_{vp} < Q_v$ hladina klesá. Stúpanie, poprípade klesanie hladiny trvá tak dlho, až sa dosiahne rovnováha $Q_{vp} = Q_v$. Tomuto **ustálenému stavu odpovedá výška h_k** , a platí

$$Q_{vp} = Q_v = \mu S_0 \sqrt{2gh_k}$$

Vyšetríme zmenu polohy hladiny v závislosti na čase t . Predpokladá sa, že v rovnovážnom stave v čase $t = 0$ je hladina vo výške h_0 . Skokom sa zmení prietok kvapaliny na hodnotu $Q_{vp} = \text{konst.}$, napr. sa Q_{vp} zväčší. V ľubovoľnom časovom okamžiku t spôsobí rozdiel pritekajúcej a vytekajúcej kvapaliny za elementárny čas dt zvýšenie dh hladiny p_0 v nádobe s prierezom S_n :

$$dt = \frac{S_n \cdot dh}{Q_{vp} - Q_v} = \frac{S_n \cdot dh}{\mu S_0 \sqrt{2g} (\sqrt{h_k} - \sqrt{h})}$$

Integráciou tejto rovnice sa stanoví **čas**, za ktorý hladina stúpne alebo klesne z pôvodnej hodnoty h_0 na hodnotu h .



Vo všeobecnom prípade je potrebné tiež uvážiť, že $S_n = f(h)$ a $Q_{vp} = f(t)$:

9.5. Vyprázdňovanie nádob

Ak do nádoby nepriteká kvapalina a teda $Q_{vp} = 0$, hladina klesá, až sa nádoba vyprázdni ($h = 0$). Čas potrebný k vyprázdneniu nádoby sa vypočíta z diferenciálnej rovnice do ktorej sa dosadí $Q_{vp} = 0$ alebo $h_k = 0$. Potom platí

$$dt = - \frac{S_n \cdot dh}{\mu S_o \sqrt{2gh}}$$

Z otvorenej nádoby s konštantným prierezom S_n sa získa integráciou doba t potrebná k zníženiu hladiny p_0 z výšky h_0 na h

$$t = - \frac{S_n}{\mu S_o \sqrt{2g}} \int_{h_0}^h h^{-1/2} dh = \frac{2S_n}{\mu S_o \sqrt{2g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h})$$

Pri úplnom vyprázdnení nádoby je konečná výška hladiny rovná $h = 0$ a potrebná doba vyprázdnenia nádoby sa vypočíta zo vzorca

$$t_v = \frac{2Sh_0}{\mu S_o \sqrt{2gh_0}} = 2 \frac{Sh_0}{Q_{v0}} = 2 \frac{V_0}{Q_{v0}}$$

kde V_0 je objem nádrže

$$Q_{v0} = \mu \cdot S_o \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

je výtok na začiatku vyprázdňovania.

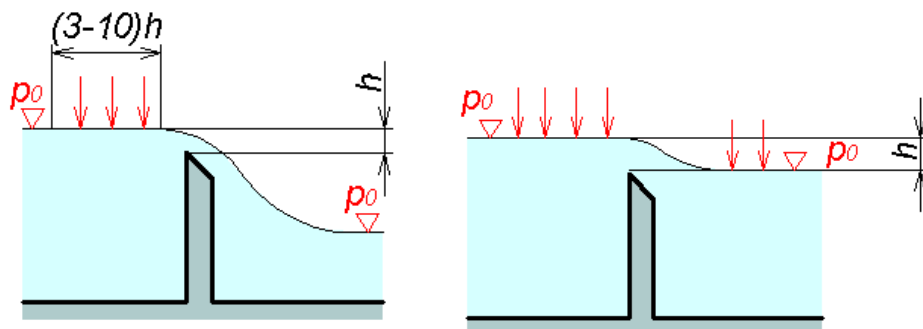
Vypočítaná doba úplného vyprázdnenia nádoby pri menších výškach hladiny h_0 sa môže líšiť od skutočnej doby vyprázdnenia. To je spôsobené kvalitatívnymi zmenami vo výtoku kvapaliny otvorom, lebo pri určitej výške hladiny nad otvorom vznikne nálevkovitý vír.

9.6. Prepady

Prepad je výtok nezaplneným otvorom alebo otvorom s neuzavretým obrysom. (Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.) Najnižšie miesto výtokového otvoru je **korunou prepadu**. Výška hornej hladiny (pred prepadom) nad korunou prepadu je prepadová výška h .

S prepadom sa stretávame na priehradách, kde zaisťujú prepúšťanie pri maximálnych prietokoch a udržanie hladiny v nádrži pod maximálnou úrovňou. Prepady majú význam rovnako pre meranie veľkých prietokov, napr. v laboratóriách.

Podľa polohy spodnej hladiny sa rozlišujú prepady dokonalé a nedokonalé. **Dokonalý prepad** je taký, pri ktorom spodná hladina neovplyvňuje prietok prepadom. U dokonalého prepadu je spodná hladina pod korunou prepadu. **Nedokonalý prepad** má ovplyvnený prietok spodnou hladinou, ktorá je vyššie než koruna prepadu. Prepadová stena môže byť pomerne tenká alebo hrubá, poprípade so zaoblením.

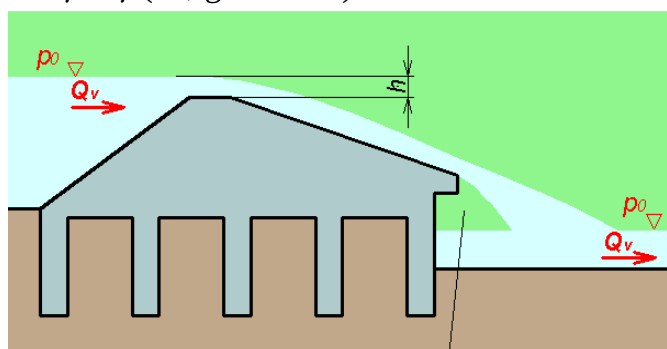


Dokonalý a nedokonalý prepad

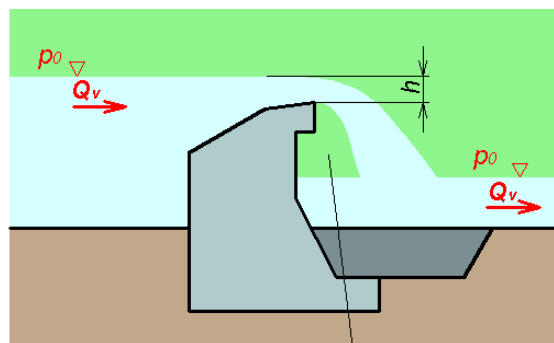
Prietok dokonalým prepadom s voľným prúdom sa stanoví ako **výtoku veľkým otvorom v stene nádoby**

$$Q_v = \mu \sqrt{2g} \int_s b \sqrt{h} \cdot dh$$

Tato rovnica je rovnica Dubuatova pre všeobecný tvar prepadu. Súčiniteľ prepadu μ je obdobný **výtokovému súčiniteľu**. Je závislý na prepadovej výške h a vlastnostiach prepadu, tzn. $\mu = \mu(\text{Re, geom. tvar})$.



zavzdušnený priestor

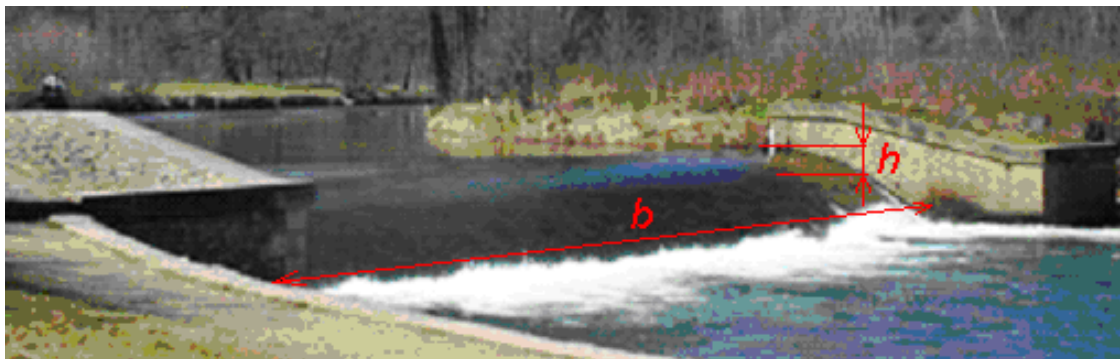


zavzdušnený priestor

Pre obdĺžnikový prepad so šírkou koruny prepadu b , je prietok určený vzorcom pre **výtok veľkým otvorom v stene nádoby**. Ak sa dosadí $h_1 = 0$ a $h_2 = h$, potom

$$Q_v = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}$$

Pre prepad s ostrou hranou a pre voľný prúd, ktorý je dobre zavzdušnený (vzduch má prístup pod prepádajúci prúd), je stredná hodnota súčiniteľa prepadu $\mu = 0,65$, pokiaľ šírka prepadu b je rovná šírke celého kanálu b_0 .



Pre prepady iných prierezov vzťahy pre prietok je možné nájsť v odbornej literatúre. Pre meranie prietoku sa veľmi často používa prepad trojuholníkový.

10. Čerpadlá