

7 ANALÝZA ROZPTYLU

Analýza rozptylu je metóda na porovnávanie priemerov niekoľkých základných súborov. Názov „Analýza rozptylu“ vyplýva zo skutočnosti, že porovnávanie priemerov je založené na analyzovaní rozptylov. Analýzu rozptylu môžeme použiť len vtedy, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

1. Výberové súbory pochádzajú zo základných súborov s normálnymi rozdeleniami.
2. Výberové súbory sú navzájom nezávislé.
3. Rozptyly základných súborov sa rovnajú.

Ak porovnávané súbory nemajú normálne rozdelenie, môžeme použiť niektorú z neparametrických analógií analýzy rozptylu, napríklad Kruskalov–Wallisov test resp. Friedmanov test. Týmito testami sa budeme zaoberať v 8. kapitole.

Poznámka. Ak by neboli splnené predpoklady použitia analýzy rozptylu, získané výsledky by neboli vierohodné. Za určitých okolností však niektoré z uvedených podmienok nemusia byť dodržané. Napríklad pri tzv. *vyváženom modeli*, o ktorom hovoríme vtedy, ak výberové súbory majú rovnaké rozsahy, predpoklad o rovnakých rozptyloch nemusí byť nutne splnený. V tomto prípade je vplyv rozdielnych rozptylov minimálny. Predpoklad o rovnosti rozptylov je však dôležitý v prípade, keď rozsahy výberových súborov sú rozdielne (t.j. v prípade tzv. *nevyváženého modelu*). Nerovnaké rozptyly môžu zapríčiniť veľké skreslenie hodnoty testovacieho kritéria.

Pôvodné myšlienky analýzy rozptylu rozvinul na začiatku 20. storočia R. A. Fisher. Väčšina prvých prác z tejto oblasti sa zaoberala vyhodnocovaním experimentov v poľnohospodárstve. Sledoval sa vplyv rôznych faktorov na úrodnosť plodín. Vyhodnocovala sa napríklad závislosť priemernej úrody od použitého hnojiva. Je zrejmé, že ak je priemerná úrodnosť pri použití hnojiva rovnaká ako priemerná úrodnosť dosiahnutá bez použitia hnojiva, použité hnojivo nemá vplyv na úrodnosť. Ak je priemerná úrodnosť rôzna, použité hnojivo má vplyv na úrodnosť. Použité hnojivo je príkladom kvalitatívnej premennej, ktorú budeme nazývať *faktor*. Od úrovni faktora môžu závisieť hodnoty kvantitatívnej

premennej X (úrodnosť). Hodnoty premennej X môžu závisieť aj od ďalších faktorov. V prípade úrodnosti to môže byť typ pôdy, typ podnebia, množstvo zrážok a pod. Podľa toho, či sledujeme vplyv jedného, dvoch alebo viacerých faktorov, hovoríme o *jednofaktorovej*, *dvojfaktorovej* alebo *viacfaktorovej analýze rozptylu*.

7.1 Jednofaktorová analýza rozptylu

Najjednoduchšou formou analýzy rozptylu je jednofaktorová analýza rozptylu. Pri jednofaktorovej analýze rozptylu budeme predpokladať, že úroveň stredných hodnôt niekoľkých základných súborov závisí len od jedného faktora. Ak má faktor k úrovní, hodnoty pozorovaného znaku X roztriedime do k skupín – súborov. Hodnotu pozorovaného znaku X pri i -tej úrovni faktora a pri j -tom pozorovaní označme x_{ij} a počet prvkov i -tej skupiny označme n_i , kde $j = 1, 2, \dots, n_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Výsledky pozorovania môžeme prehľadne zapísať pomocou tzv. *tabuľky jednoduchého triedenia analýzy rozptylu*, ktorá má vo všeobecnosti nasledujúci tvar:

Tabuľka 7.1.

Skupina č. i					
1	2	...	i	...	k
x_{11}	x_{21}	...	x_{i1}	...	x_{k1}
x_{12}	x_{22}	...	x_{i2}	...	x_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{1j}	x_{2j}	...	x_{ij}	...	x_{kj}
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
x_{1n_1}	x_{2n_2}	...	x_{in_i}	...	x_{kn_k}
$S_1 = \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}$	$S_2 = \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}$	...	$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$	...	$S_k = \sum_{j=1}^{n_k} x_{kj}$
$\bar{x}_1 = \frac{S_1}{n_1}$	$\bar{x}_2 = \frac{S_2}{n_2}$	...	$\bar{x}_i = \frac{S_i}{n_i}$	...	$\bar{x}_k = \frac{S_k}{n_k}$

Označme

symbolom S súčet všetkých nameraných hodnôt: $S = \sum_{i=1}^k S_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$,

symbolom N počet všetkých nameraných hodnôt: $N = \sum_{i=1}^k n_i$,

symbolom $\bar{x}$ celkový priemer: $\bar{x} = \frac{S}{N}$.

7.1.1 Jednofaktorová analýza rozptylu pre vyvážený model

Ak $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$, hovoríme o vyváženom modeli. Budeme testovať hypotézu

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ oproti hypotéze H_1 : „nie všetky μ_i sa rovnajú“.

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku F . Pre výpočet jej hodnoty zostavíme tzv. *tabuľku analýzy rozptylu pre vyvážený pokus* (tabuľka 7.2).

Tabuľka 7.2.

Variabilita	Počet stupňov voľnosti	Súčet štvorcov	Rozptyl	Hodnota štatistiky F
Celkove	$N - 1$	$S_c = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \frac{S^2}{N}$		$F = \frac{s_k^2}{s_r^2}$
Medzi skupinami	$k - 1$	$S_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k S_i^2 - \frac{S^2}{N}$	$s_k^2 = \frac{S_k}{k - 1}$	
Reziduálna (vo vnútri skupín)	$N - k$	$S_r = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k S_i^2$	$s_r^2 = \frac{S_r}{N - k}$	

Platí vzťah: $S_c = S_k + S_r$, ktorý môže poslúžiť na kontrolu výpočtu.

Testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α , ak hodnota testovacieho kritéria F prekročí kritickú hodnotu $F_\alpha(k-1; N-k)$. $F_\alpha(k-1; N-k)$ sú kritické hodnoty F -rozdelenia a sú uvedené v tabuľke č. 12.5.

Ak zamietneme testovanú hypotézu $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ v prospech alternatívnej hypotézy H_1 , ktorá znamená, že nie všetky stredné hodnoty sú rovnaké, ostáva nezodpovedaná otázka, ktoré súbory majú štatisticky významne odlišné stredné hodnoty.

V analýze rozptylu sa na zodpovedanie tejto otázky dá použiť viacero testov, napríklad Duncanov, Tukeyho a Neményiho test.

V tejto časti popíšeme *Duncanov test*. Duncanov test spočíva v porovnávaní rozdielov aritmetických priemerov jednotlivých výberov s kritickou hodnotou $D_{p,\alpha}$, ktorú vypočítame podľa vzťahu:

$$D_{p,\alpha} = D_\alpha \cdot \sqrt{\frac{s_r^2}{n}}, \quad p = 2, 3, \dots, k,$$

kde s_r^2 je reziduálny rozptyl a D_α je kritická hodnota Duncanovho testu. Pre dané p a pre reziduálny počet stupňov voľnosti $N - k$ ju nájdeme v tabuľke č. 12.13. Číslo p určíme nasledujúcim spôsobom. Priemery usporiadame podľa veľkosti: $\bar{x}'_k \geq \bar{x}'_{k-1} \geq \dots \geq \bar{x}'_1$. Potom $p = m + 2$, kde m je počet priemerov v uvedenej postupnosti medzi priermi, ktorých diferenciu testujeme. Napríklad, ak testujeme rozdiel $\bar{x}'_1 - \bar{x}'_3$, potom $m = 1$ (medzi týmito priermi sa nachádza jeden priemer $\bar{x}'_2$), a teda $p = 1 + 2 = 3$.

Ak $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > D_{p,\alpha}$, diferencia medzi strednými hodnotami i -teho a j -teho súboru je signifikantná.

Príklad 7.1 V rámci pedagogického výskumu treba porovnať efektívnosť troch vyučovacích metód A, B a C. Preto bola náhodne vybraná skupina 45 žiakov rozdelená do troch skupín. V prvej skupine sa učebná látka vyučovala metódou A, v druhej metódou B a v tretej metódou C. Po odučení učiva žiaci písali kontrolnú prácu, výsledky ktorej boli bodované. Počty bodov spolu s ďalšími pomocnými výpočtami sú uvedené tabuľke 7.3.

Tabuľka 7.3.

j	1. skupina	2. skupina	3. skupina	Súčty
1	9	15	18	$N = n_1 + n_2 + n_3 =$ $= 15 + 15 + 15 = 45$
2	11	16	14	
3	10	15	17	
4	12	10	9	
5	7	13	14	
6	11	14	17	
7	12	15	16	
8	10	7	15	
9	13	13	16	
10	11	15	8	
11	13	15	14	
12	11	14	10	
13	10	11	16	
14	12	15	15	
15	13	10	17	
$S_i = \sum_{j=1}^{15} x_{ij}$	165	198	216	$S = \sum_{i=1}^3 S_i = 579$
$\bar{x}_i = \frac{S_i}{15}$	11	13,2	14,4	
S_i^2	27 225	39 204	46 656	$\sum_{i=1}^3 S_i^2 = 113\,085$
$\frac{S_i^2}{15}$	1 815	2 613,6	3 110,4	$\frac{1}{15} \sum_{i=1}^3 S_i^2 = 7\,539$

Riešenie. Pozorovaným znakom X je vedomostná úroveň žiakov. Budeme predpokladať, že namerané hodnoty sú realizáciou troch navzájom nezávislých náhodných výberov zo základných súborov, na ktorých má pozorovaný znak X normálne rozdelenie $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ resp. $N(\mu_3, \sigma_3^2)$. μ_1 označuje priemernú vedomostnú úroveň žiakov vyučovaných metódou A, μ_2 označuje priemernú vedomostnú

úroveň žiakov vyučovaných metódou B a μ_3 označuje priemernú vedomostnú úroveň žiakov vyučovaných metódou C. Budeme testovať hypotézu $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ oproti alternatívnej hypotéze H_1 : „nie všetky μ_i sa rovnajú“ za predpokladu rovnosti rozptylov $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$. Keďže pre rozsahy n_1, n_2, n_3 výberových súborov platí $n_1 = n_2 = n_3 = n = 15$, použijeme jednofaktorovú analýzu rozptylu pre vyvážený pokus.

Počítajme:

$$\sum_{j=1}^{15} x_{1j}^2 = 1\,853; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{2j}^2 = 2\,706; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{3j}^2 = 3\,242;$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{15} x_{ij}^2 = 1\,853 + 2\,706 + 3\,242 = 7\,801;$$

$$S_c = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{15} x_{ij}^2 - \frac{S^2}{N} = 7\,801 - \frac{579^2}{45} = 7\,801 - 7449,8 = 351,2;$$

$$S_k = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^3 S_i^2 - \frac{S^2}{N} = 7\,539 - 7\,449,8 = 89,2;$$

$$S_r = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{15} x_{ij}^2 - \frac{1}{15} \sum_{i=1}^3 S_i^2 = 7\,801 - 7\,539 = 262;$$

$$s_k^2 = \frac{S_k}{k-1} = \frac{89,2}{2} = 44,6; \quad s_r^2 = \frac{S_r}{N-k} = \frac{262}{42} = 6,24.$$

Tabuľka 7.4.

Variabilita	Počet stupňov voľnosti	Súčet štvorcov	Rozptyl	Hodnota štatistiky F
Celkove	44	351,2		$F = \frac{44,6}{6,24} = 7,15$
Medzi skupinami	2	89,2	44,6	
Reziduálna (vo vnútri skupín)	42	262	6,24	

Tabuľka 7.4 je výslednou tabuľkou analýzy rozptylu. Pre zvolenú hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ nájdeme v tabuľke č. 12.5 príslušnú kritickú hodnotu: $F_{0,05}(k-1; N-k) = F_{0,05}(2;42) = 3,22$. Keďže vypočítaná hodnota testovacieho kritéria F je väčšia ako 3,22, testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0,05$. To znamená, že efektívnosť vyučovacích metód A, B a C nie je rovnaká. V ďalšom nás bude zaujímať, ktoré metódy majú rozdielnú efektívnosť. Na testovanie kontrastov použijeme Duncanov test. Priemerné počty bodov pre jednotlivé skupiny usporiadame podľa veľkosti:

$$\bar{x}_3 = 14,4; \quad \bar{x}_2 = 13,2; \quad \bar{x}_1 = 11.$$

Vypočítame

$$\sqrt{\frac{s_r^2}{n}} = \sqrt{\frac{6,24}{15}} = 0,645.$$

V tabuľke č. 12.13 vyhľadáme kritické hodnoty Duncanovho testu $D_{0,05}$ pre dané p pri reziduálnom počte stupňov voľnosti $45 - 3 = 42$ a zapíšeme ich do tabuľky 7.5. V tabuľke sú zapísané aj vypočítané príslušné kritické hodnoty $D_{p,\alpha}$, pomocou ktorých budeme testovať štatistickú významnosť rozdielov medzi aritmetickými priemerami.

Tabuľka 7.5.

p	$D_{0,05}$	$D_{p,\alpha} = D_{0,05} \cdot \sqrt{\frac{s_r^2}{n}}$
2	2,857	1,84
3	3,004	1,94

Testujme rozdiely:

Pre $\bar{x}_3 - \bar{x}_1$ dostávame:

$p = 3$; $D_{p,\alpha} = 1,94$. Keďže $|\bar{x}_3 - \bar{x}_1| = 3,4 > 1,94$, diferencia je signifikantná.

Pre $\bar{x}_3 - \bar{x}_2$ dostávame:

$p = 2$; $D_{p,\alpha} = 1,84$. Keďže $|\bar{x}_3 - \bar{x}_2| = 1,2 < 1,84$, diferencia nie je signifikantná.

Pre $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$ dostávame:

$p = 2$; $D_{p,\alpha} = 1,84$. Keďže $|\bar{x}_2 - \bar{x}_1| = 2,2 > 1,84$, diferencia je signifikantná.

Testovaním bolo ukázané, že vyučovacie metódy B a C sú efektívnejšie ako metóda A.

7.1.2 Jednofaktorová analýza rozptylu pre nevyvážený model

Ak sú hodnoty pozorovaného znaku X roztriedené do k skupín s nerovnakým počtom pozorovaní, hovoríme o nevyváženom modeli. Počet pozorovaní v každej skupine označíme n_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Pre celkový

počet pozorovaní platí: $N = \sum_{i=1}^k n_i$. Podobne ako pri vyváženom modeli

testujeme hypotézu $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ oproti hypotéze H_1 : „nie všetky μ_i sa rovnajú“.

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku F . Pre výpočet jej hodnoty zostavíme tzv. *tabuľku analýzy rozptylu pre nevyvážený pokus*, ktorá má vo všeobecnosti nasledujúci tvar:

Tabuľka 7.6.

Variabilita	Počet stupňov voľnosti	Súčet štvorcov	Rozptyl	Hodnota štatistiky F
Celkove	$N - 1$	$S_c = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{S^2}{N}$		$F = \frac{s_k^2}{s_r^2}$
Medzi skupinami	$k - 1$	$S_k = \sum_{i=1}^k \frac{S_i^2}{n_i} - \frac{S^2}{N}$	$s_k^2 = \frac{S_k}{k - 1}$	
Reziduálna (vo vnútri skupín)	$N - k$	$S_r = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^k \frac{S_i^2}{n_i}$	$s_r^2 = \frac{S_r}{N - k}$	

Celkovú variabilitu S_c , ktorá je vyjadrená celkovým súčtom štvorcov odchýlok, sme taktiež rozdelili na dve zložky S_k a S_r . Platí

$$S_c = S_k + S_r.$$

Testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti α , ak hodnota testovacieho kritéria F prekročí hodnotu $F_\alpha(k-1; N-k)$, kde $F_\alpha(k-1; N-k)$ je kritická hodnota F -rozdelenia. Pre zvolenú hladinu významnosti α a počet stupňov voľnosti $(k-1; N-k)$ ju nájdeme v tabuľke č. 12.5.

Ak zamietneme testovanú hypotézu $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ v prospech alternatívnej hypotézy H_1 , ktorá znamená, že nie všetky stredné hodnoty sú rovnaké, budeme zisťovať, ktoré súbory majú štatisticky významne odlišné stredné hodnoty. Použijeme Duncanov test. Testovanou hypotézou bude hypotéza H_0 , že rozdiely medzi strednými hodnotami i -teho a j -teho súboru nie sú signifikantné. Testovacie kritérium Duncanovho testu má pre nevyvážený model nasledujúci tvar:

$$D_p = \frac{|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right) \cdot s_r^2}}, \quad p = 2, 3, \dots, k,$$

kde s_r^2 je reziduálny rozptyl.

Testovanú hypotézu H_0 zamietneme na hladine významnosti α , ak hodnota testovacieho kritéria D_p prekročí hodnotu D_α , kde D_α je kritická hodnota Duncanovho testu. Pre dané p , zvolené α a pre reziduálny počet stupňov voľnosti $N-k$ ju nájdeme v tabuľke č. 12.13.

Príklad 7.2 Boli použité tri vyučovacie metódy A, B a C. Náhodne bolo vybratých 30 žiakov, ktorých sme rozdelili do troch skupín. V prvej skupine bola použitá metóda A, v druhej metóda B a v tretej metóda C. Po odučení učiva žiaci písali záverečný test, ktorý bol hodnotený bodmi. Pretože počas experimentu 5 žiakov ochorelo, záverečný test písalo len 25 žiakov. Počty bodov zo záverečného testu spolu s ďalšími pomocnými výpočtami sú uvedené tabuľke 7.7. Treba zistiť, či vyučovacie metódy A, B a C sú rovnako efektívne.

Riešenie. Pre rozsahy n_1, n_2, n_3 výberových súborov platí $n_1 = 7$, $n_2 = 10$, $n_3 = 8$. Keďže rozsahy výberových súborov nie sú rovnaké, na testovanie hypotézy $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ oproti hypotéze H_1 : „nie všetky μ_i sa rovnajú“ použijeme jednofaktorovú analýzu rozptylu pre nevyvážený pokus. μ_1 označuje priemernú vedomostnú úroveň žiakov vyučovaných metódou A, μ_2 označuje priemernú vedomostnú úroveň žiakov vyučovaných metódou B a μ_3 označuje priemernú vedomostnú úroveň žiakov vyučovaných metódou C.

Tabuľka 7.7.

	Skupina č. i			Súčty
	1	2	3	
	15 15 12 12 12 12 13 20 20 21	21 20 20 21 20 20 21 20 20 21	19 20 21 19 21 21 21 19	$N = n_1 + n_2 + n_3 = 7 + 10 + 8 = 25$
$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$	91	203	161	$S = \sum_{i=1}^3 S_i = 455$
$\bar{x}_i = \frac{S_i}{n_i}$	13	20,3	20,13	-
S_i^2	8 282	41 209	25 921	$\sum_{i=1}^3 S_i^2 = 75 412$
$\frac{S_i^2}{n_i}$	1 183	4 120,9	3 240,12	$\sum_{i=1}^3 \frac{S_i^2}{n_i} = 8 544,02$

Počítajme:

$$\sum_{j=1}^7 x_{1j}^2 = 1\,195; \quad \sum_{j=1}^{10} x_{2j}^2 = 4\,123; \quad \sum_{j=1}^8 x_{3j}^2 = 3\,247;$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 = 1\,195 + 4\,123 + 3\,247 = 8\,565;$$

$$S_c = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{S^2}{N} = 8\,565 - 8\,281 = 284;$$

$$S_k = \sum_{i=1}^3 \frac{S_i^2}{n_i} - \frac{S^2}{N} = 8\,544,02 - 8\,281 = 263,02;$$

$$S_r = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^3 \frac{S_i^2}{n_i} = 8\,565 - 8\,544,02 = 20,97;$$

$$s_k^2 = \frac{S_k}{k-1} = \frac{263,02}{2} = 131,51;$$

$$s_r^2 = \frac{S_r}{N-k} = \frac{20,97}{22} = 0,953.$$

Výsledky zapíšeme do výslednej tabuľky analýzy rozptylu:

Tabuľka 7.8.

Variabilita	Počet stupňov voľnosti	Súčet štvorcov	Rozptyl	Hodnota štatistiky F
Celková	24	284		$F = 137,99$
Medzi skupinami	2	263,02	131,51	
Reziduálna (vo vnútri skupín)	22	20,97	0,953	

Pre zvolenú hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ nájdeme v tabuľke č. 12.5 príslušnú kritickú hodnotu $F_{0,05}(k-1; N-k) = F_{0,05}(2; 22) = 3,4$. Keďže vypočítaná hodnota testovacieho kritéria F je väčšia ako kritická hodnota 3,4, testovanú hypotézu H_0 zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0,05$. To znamená, že efektívnosť vyučovacích metód A, B a C nie je rovnaká.

V ďalšom nás bude zaujímať, ktoré metódy majú rozdielnú efektívnosť. Na testovanie kontrastov použijeme Duncanov test.

Priemerné počty bodov pre jednotlivé skupiny usporiadame podľa veľkosti:

$$\bar{x}_2 = 20,3; \quad \bar{x}_3 = 20,13; \quad \bar{x}_1 = 13.$$

Najskôr budeme testovať štatistickú významnosť rozdielu medzi efektívnosťou metód A a B. Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$D_p = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cdot s_r^2}} = \frac{|13 - 20,3| \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{10}\right) \cdot 0,953}} = 21,46.$$

V tabuľke č. 12.13 pre $p = 1 + 2 = 3$ a pre počet stupňov voľnosti $N - k = 22$ vyhladáme kritickú hodnotu Duncanovho testu $D_{0,05} = 3,089$. Keďže vypočítaná hodnota testovacieho kritéria D_p je väčšia ako kritická hodnota 3,089, rozdiel medzi efektívnosťou vyučovacích metód A a B je signifikantný.

Podobne posúdime rozdiel medzi efektívnosťou metód B a C. Vypočítame $D_p = 0,533$. Pre $p = 2$ a pre počet stupňov voľnosti $N - k = 22$ vyhladáme v tabuľke č.12.13 príslušnú kritickú hodnotu $D_{0,05} = 2,93$. Keďže vypočítaná hodnota testovacieho kritéria D_p je menšia ako 2,93, rozdiel medzi efektívnosťou vyučovacích metód B a C nie je signifikantný.

Nakoniec porovnáme efektívnosť metód A a C. Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria $D_p = 19,952$. V tabuľke č.12.13 pre $p = 2$ a pre počet stupňov voľnosti $N - k = 22$ vyhladáme príslušnú kritickú hodnotu $D_{0,05} = 2,93$. Keďže vypočítaná hodnota testovacieho kritéria D_p je väčšia ako kritická hodnota 2,93, rozdiel medzi efektívnosťou vyučovacích metód A a C je signifikantný.

Testovaním bolo preukázané, že vyučovacie metódy B a C sú efektívnejšie ako metóda A.