

## 8 NEPARAMETRICKÉ TESTY

Najčastejším predpokladom obvykle používaných parametrických štatistických metód (ako je napríklad  $t$ -test, analýza rozptylu, intervalové odhady a testy v regresnej analýze) je predpoklad o normálnom rozdelení základného súboru. Ak by sme použili pri štatistickom vyhodnocovaní výsledkov výskumu parametrický test a neboli by splnené predpoklady jeho použitia (napr. predpoklad o normálnom rozdelení základného súboru), mohli by sme dostať skreslené závery.

Pri veľkých rozsahoch výberového súboru mnohé parametrické testy nebývajú citlivé na nedodržanie predpokladu o normálnom rozdelení. Pri zdôvodnení tejto skutočnosti sa môžeme oprieť o zákony veľkých čísel a centrálné limitné vety. V praxi sa však často stretávame s výbermi s pomerne malými rozsahmi pochádzajúcimi zo základných súborov, ktorých rozdelenie nie je normálne. Okrem toho v niektorých prípadoch (napríklad, ak máme k dispozícii len kvalitatívne údaje alebo poradia), sú parametrické metódy celkom nepoužiteľné. V takýchto prípadoch je vhodné použiť niektorú z neparametrických metód. Neparametrické metódy požadujú splnenie menej prísnych predpokladov ako parametrické metódy. Pri použití neparametrického testu vystačíme s menším počtom informácií ako pri zodpovedajúcom parametrickom teste. Tým je však aj sila neparametrického testu nižšia ako sila zodpovedajúceho parametrického testu. Neparametrické metódy sú menej citlivé a presné ako metódy parametrické. Platí preto zásada, že dávame prednosť parametrickým testom, samozrejme len vtedy, keď sú splnené všetky predpoklady pre ich použitie.

V tejto kapitole uvedieme najpoužívanejšie neparametrické testy. Sú analógiami parametrických testov zo 6. kapitoly.

### 8.1 Znamienkový test

Znamienkový test umožňuje testovať zhodu mediánu s danou konštantou. Nech  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  je náhodný výber zo spojitého rozdelenia s mediánom  $\tilde{x}$ . Platí teda

$$P(X_i < \tilde{x}) = P(X_i > \tilde{x}) = 1/2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Testujme nulovú hypotézu  $H_0: \tilde{x} = x_0$  oproti alternatívnej hypotéze  $H_1: \tilde{x} \neq x_0$ , kde  $x_0$  je dané číslo. Najskôr sa utvoria rozdiely  $X_1 - x_0, \dots, X_n - x_0$ . Počet rozdielov s kladným znamienkom označme  $Y$ . Ak platí hypotéza  $H_0$ , náhodná premenná  $Y$  má binomické rozdelenie s parametrami  $n$  a  $1/2$ . Hypotézu  $H_0$  zamietneme, ak budú hodnoty premennej  $Y$  príliš malé alebo príliš veľké (t.j. blízke 0 alebo blízke číslu  $n$ ). Pre malé  $n$  sa používajú tabuľky kritických hodnôt znamienkového testu (tab. č. 12.6, kde sa píše  $N$  namiesto  $n$ ). Sú v nich tabelované (pre  $\alpha = 0,05$  a pre  $\alpha = 0,01$ ) kritické hodnoty  $k_1, k_2$ , pre ktoré platí

$$P(Y \leq k_1) \leq \alpha/2, \quad P(Y \geq k_2) \leq \alpha/2.$$

Pritom  $k_1$  je najväčšie a  $k_2$  je najmenšie z čísel, pre ktoré uvedený vzťah platí. Keďže rozdelenie  $Bi(n, 1/2)$  je symetrické, platí  $k_2 = n - k_1$ .

Hypotézu  $H_0$  zamietneme, ak zistíme, že  $Y \leq k_1$  alebo  $Y \geq k_2$ . Hladina testu je nanajvýš rovná  $\alpha$ .

V prípade, že alternatívna hypotéza  $H_1$  má tvar  $\tilde{x} < x_0$ , nulovú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $Y \leq k$ , kde  $k$  je najväčšie číslo také, že  $P(Y \leq k) \leq \alpha$ . Číslo  $k$  určíme pomocou tabuliek hodnôt pravdepodobnostnej funkcie binomického rozdelenia  $Bi(n, 1/2)$  (tabuľka č. 12.22). Ak má alternatívna hypotéza  $H_1$  tvar  $\tilde{x} > x_0$ , nulovú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $Y \geq n - k$ .

Definujme náhodné premenné  $\xi_1, \dots, \xi_n$  tak, že  $\xi_i = 0$  v prípade, že  $X_i - x_0 \leq 0$  a  $\xi_i = 1$  v prípade, že  $X_i - x_0 > 0$ . Potom platí  $Y = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Ak platí hypotéza  $H_0$ , potom  $E(\xi_i) = 1/2$ ,  $D(\xi_i) = 1/4$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$ . Podľa centrálnej limitnej vety má náhodná premenná  $Y$  (ak platí hypotéza  $H_0$ ) asymptoticky normálne rozdelenie  $N(n/2, n/4)$ . Náhodná premenná

$$U = \frac{Y - n/2}{\sqrt{n/4}} = \frac{2Y - n}{\sqrt{n}}$$

má preto za platnosti nulovej hypotézy  $H_0$  asymptoticky normálne normované rozdelenie  $N(0, 1)$ .

V prípade dvojstrannej alternatívnej hypotézy testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $|U| \geq u_\alpha$ , kde  $u_\alpha$  je kritická hodnota normálneho normovaného rozdelenia. V prípade, že alternatívna hypotéza  $H_1$  má tvar  $\tilde{x} > x_0$ , nulovú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $U > u_{2\alpha}$ . Ak má alternatívna hypotéza  $H_1$  tvar  $\tilde{x} < x_0$ , potom nulovú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak platí  $U < -u_{2\alpha}$ . Uvedený postup sa v praxi používa pre  $n \geq 20$ . V praxi sa môže stať, že niektoré rozdiely  $X_i - x_0$  sú rovné 0 (čo má teoreticky nulovú pravdepodobnosť, ale môže to nastať napríklad ako dôsledok zaokrúhľovacích chýb alebo chýb merania). Potom sa tieto hodnoty vynechajú a o ich počet sa zníži číslo  $n$ .

So znamienkovým testom sa často stretávame ako s párovým testom, t.j. namiesto náhodného výberu  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  pracujeme s náhodným výberom  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ . Postupujeme tak, že vytvoríme rozdiely  $Z_i = X_i - Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  a ďalej postupujeme popísaným spôsobom.

**Príklad 8.1** V psychologickom výskume sa testoval vplyv vážnej hudby na koncentráciu žiakov. Každý z deviatich žiakov spravil 5 testov v úplne tichom prostredí a 5 testov, pri ktorých hrala vážna hudba. Priemerný počet dosiahnutých bodov z piatich testov spolu s ďalšími výpočtami je uvedený v tabuľke 8.1.

Tabuľka 8.1.

| $i$   | 1    | 2   | 3   | 4    | 5   | 6    | 7   | 8    | 9    |
|-------|------|-----|-----|------|-----|------|-----|------|------|
| $x_i$ | 10,4 | 9,2 | 7,1 | 10,8 | 7,2 | 4,9  | 8,2 | 4,2  | 10,1 |
| $y_i$ | 6,3  | 5,2 | 5,8 | 1,5  | 6,8 | 7,2  | 5,3 | 5,4  | 7,9  |
| $z_i$ | 4,1  | 4,0 | 1,3 | 9,3  | 0,4 | -2,3 | 2,9 | -1,2 | 2,2  |

$x_i$  označuje priemerný počet bodov, ktorý dosiahol  $i$ -ty žiak v úplne tichom prostredí;

$y_i$  označuje priemerný počet bodov, ktorý dosiahol  $i$ -ty žiak pri počúvaní hudby;

$$z_i = x_i - y_i.$$

*Riešenie.* Pozorovanými znakmi sú znaky  $X$ ,  $Y$ , kde  $X$  označuje priemerný počet bodov z testov písaných v tichom prostredí a  $Y$  označuje priemerný počet bodov z testov písaných pri počúvaní hudby. Budeme testovať hypotézu  $H_0$  o rovnosti mediánov pozorovaných znakov  $X$ ,  $Y$  oproti dvojstrannej alternatívnej hypotéze na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$ . Počet rozdielov s kladnými znamienkami je 7. Podľa tabuliek kritických hodnôt znamienkového testu (tabuľka č. 12.6) pre  $n = 9$  a  $\alpha = 0,05$  je  $k_1 = 1$  a  $k_2 = 8$ . Keďže počet rozdielov s kladnými znamienkami je z intervalu  $(k_1, k_2)$ , testovanú hypotézu  $H_0$  nemôžeme zamietnuť. Nepotvrdilo sa, že by vážna hudba mala vplyv na koncentráciu žiakov. Pozorované rozdiely nie sú štatisticky významné.

**Príklad 8.2** V tabuľke 8.2 sú uvedené priemerné platy niektorých krajín európskej únie v € (zdroj Eurostat). Na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$  testujte hypotézu, že medián priemerných platov krajín európskej únie je väčší ako priemerný plat Slovenska.

Tabuľka 8.2.

| krajina     | priemerný plat |
|-------------|----------------|
| Luxembursko | 3 880,-        |
| Holandsko   | 3 222,-        |
| Nemecko     | 2 951,-        |
| Francúzsko  | 2 935,-        |
| Fínsko      | 2 873,-        |
| Rakúsko     | 2 801,-        |
| Belgicko    | 2 799,-        |
| Taliansko   | 2 346,-        |
| Cyprus      | 1 775,-        |
| Grécko      | 1 710,-        |
| Španielsko  | 1 617,-        |
| Slovinsko   | 1 381,-        |
| Malta       | 1 344,-        |
| Portugalsko | 1 253,-        |
| Slovensko   | 678, -         |

*Riešenie.* Nech  $\tilde{x}$  je medián priemerných platov krajín európskej únie. Budeme testovať znamienkovým testom hypotézu  $H_0: \tilde{x} = 678$  oproti alternatívnej hypotéze  $H_1: \tilde{x} > 678$ . Príslušné výpočty zapíšeme do tabuľky 8.3.

Tabuľka 8.3.

| $i$ | $x_i$ | $x_i - 678$ |
|-----|-------|-------------|
| 1   | 3880  | 3202        |
| 2   | 3222  | 2544        |
| 3   | 2951  | 2273        |
| 4   | 2935  | 2257        |
| 5   | 2873  | 2195        |
| 6   | 2801  | 2123        |
| 7   | 2799  | 2121        |
| 8   | 2346  | 1668        |
| 9   | 1775  | 1097        |
| 10  | 1710  | 1032        |
| 11  | 1617  | 939         |
| 12  | 1381  | 703         |
| 13  | 1344  | 666         |
| 14  | 1253  | 575         |
| 15  | 678   | 0           |

Z tabuľky vidíme, že počet kladných rozdielov  $Y = 14$ . Keďže jeden z rozdielov  $x_i - 678$  je nulový, náhodná premenná  $Y$  má za platnosti nulovej hypotézy  $H_0$  binomické rozdelenie  $Bi(14, 1/2)$ . Pomocou tabuliek hodnôt pravdepodobnostnej funkcie binomického rozdelenia  $Bi(14, 1/2)$  určíme najväčšie číslo  $k$  také, že  $P(Y \leq k) \leq 0,05$ . Platí:

$$P(Y \leq 3) = 0,0001 + 0,0009 + 0,0056 + 0,0222 = 0,0288.$$

Pretože pravdepodobnosť  $P(Y \leq 4) = 0,0288 + 0,0611 = 0,0899$  a táto pravdepodobnosť je väčšia ako 0,05,  $k = 3$ , a teda  $n - k = 11$ . Keďže počet kladných rozdielov je väčší ako 11, na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$  zamietame testovanú hypotézu  $H_0$ . To znamená, že priemerný plat Slovenska je menší ako medián priemerných platov krajín európskej únie.

## 8.2 Wilcoxonov jednovýberový test

Zovšeobecnením znamienkového testu je Wilcoxonov jednovýberový test. Wilcoxonov test na rozdiel od znamienkového testu neberie do úvahy iba znamienka rozdielov, ale aj veľkosť a poradia týchto rozdielov, a preto je jeho sila väčšia ako sila znamienkového testu.

Predpokladajme, že na  $n$  prvkoch výberového súboru pozorujeme dva kvantitatívne znaky  $X, Y$  so spojitými distribučnými funkciami. Nech  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  je postupnosť nameraných hodnôt pozorovaných znakov. Testujeme hypotézu  $H_0$ , že rozdelenia znakov  $X, Y$  sú rovnaké oproti alternatívnej hypotéze  $H_1$ , že nie sú rovnaké. Pri testovaní budeme postupovať nasledovne:

1. Vypočítame rozdiely  $d_i = x_i - y_i$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Absolútne hodnoty rozdielov usporiadame podľa veľkosti do neklesajúcej postupnosti, pričom nulové rozdiely vynecháme.
3. Absolútnej hodnote každého rozdielu priradíme poradie. V prípade, že niektoré hodnoty rozdielov sú rovnaké, budeme postupovať podľa návodu, ktorý je popísaný v 9. kapitole v príklade 9.6. Vypočítame hodnotu testovacej štatistiky  $T = \min(T_+, T_-)$ , kde  $T_+$  je súčet poradí, ktoré sme priradili kladným rozdielom, analogicky  $T_-$  je súčet poradí, ktoré sme priradili záporným rozdielom. Ku zvolenej hladine významnosti  $\alpha = 0,05$  resp.  $\alpha = 0,01$  a počtu nenulových rozdielov  $n$  vyhľadáme v tabuľke č. 12.10 kritickú hodnotu  $w_n(\alpha)$  jednovýberového Wilcoxonovho testu.
4. Vyhodnotíme test nasledujúcim spôsobom. Ak je hodnota testovacieho kritéria  $T$  menšia alebo rovná kritickej hodnote  $w_n(\alpha)$ , zamietame testovanú hypotézu  $H_0$  na hladine významnosti  $\alpha$ .

*Poznámka.* V prípade, že rozsah  $n$  výberového súboru je veľké číslo ( $n > 65$ ), ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$U = \frac{T_+ - \frac{1}{4}n(n+1)}{\sqrt{\frac{1}{24}n(n+1)(2n+1)}},$$

ktorá má za platnosti nulovej hypotézy asymptoticky normálne normované rozdelenie  $N(0, 1)$ . Testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$  v prospech alternatívnej hypotézy  $H_1$ , ak  $|U| \geq u_\alpha$ .

**Príklad 8.3** Pomocou Wilcoxonovho jednovýberového testu budeme riešiť úlohu z príkladu 8.1. Priemerný počet dosiahnutých bodov z piatich testov spolu s ďalšími výpočtami je uvedený v tabuľke 8.4.

Tabuľka 8.4.

| $i$   | 1    | 2   | 3   | 4    | 5   | 6    | 7   | 8    | 9    |
|-------|------|-----|-----|------|-----|------|-----|------|------|
| $x_i$ | 10,4 | 9,2 | 7,1 | 10,8 | 7,2 | 4,9  | 8,2 | 4,2  | 10,1 |
| $y_i$ | 6,3  | 5,2 | 5,8 | 1,5  | 6,8 | 7,2  | 5,3 | 5,4  | 7,9  |
| $d_i$ | 4,1  | 4,0 | 1,3 | 9,3  | 0,4 | -2,3 | 2,9 | -1,2 | 2,2  |
| $R_i$ | 8    | 7   | 3   | 9    | 1   | 5    | 6   | 2    | 4    |

$x_i$  označuje priemerný počet bodov, ktorý dosiahol  $i$ -ty žiak v úplne tichom prostredí;

$y_i$  označuje priemerný počet bodov, ktorý dosiahol  $i$ -ty žiak pri počúvaní hudby;

$d_i = x_i - y_i$ ;

$R_i$  označuje poradie hodnoty  $|d_i|$ .

Pozorovanými znakmi sú znaky  $X, Y$ , kde  $X$  označuje priemerný počet bodov z testov písaných v tichom prostredí a  $Y$  označuje priemerný počet bodov z testov písaných pri počúvaní hudby. Budeme testovať hypotézu  $H_0$ , že pozorované znaky  $X, Y$  majú rovnaké rozdelenie oproti alternatívnej hypotéze  $H_1$ , že rozdelenia pozorovaných znakov sú rozdielne.

Pomocou výsledkov uvedených v tabuľke vypočítame hodnoty charakteristík  $T_+, T_-$ :

$$T_+ = 8 + 7 + 3 + 9 + 1 + 6 + 4 = 38; \quad T_- = 5 + 2 = 7.$$

Hodnota testovacieho kritéria  $T = \min(T_+, T_-) = 7$ . Ku zvolenej hladine významnosti  $\alpha = 0,05$  a počtu nenulových rozdielov  $n = 9$  vyhladáme v tabuľke č. 12.10 kritickú hodnotu  $w_9(0,05) = 5$ . Keďže platí  $T > 5$ , testovanú hypotézu  $H_0$  nemôžeme na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$  zamietnuť. Ani Wilcoxonovým testom sa nepotvrdilo, že by vážna hudba mala vplyv na koncentráciu žiakov.

### 8.3 Wilcoxonov dvojvýberový test

Wilcoxonov dvojvýberový test je neparametrickou analógiou dvojvýberového  $t$ -testu. Nech  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  a  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  sú dva nezávislé náhodné výbery z dvoch spojitých rozdelení. Máme overiť nulovú hypotézu  $H_0$ , že oba výbery pochádzajú z toho istého základného súboru, čiže hypotézu, že distribučné funkcie oboch rozdelení sú rovnaké. Alternatívnou hypotézou je hypotéza, že distribučné funkcie oboch rozdelení sú rôzne.

Pri testovaní budeme postupovať nasledovne: Všetkých  $m + n$  výberových hodnôt usporiadame do neklesajúcej postupnosti, ktorá bude tvoriť tzv. združený výberový súbor. Jednotlivým hodnotám združeného výberového súboru priradíme poradia. Zistíme súčet poradií hodnôt  $x_1, x_2, \dots, x_m$  a označíme ho  $T_1$ . Analogicky  $T_2$  bude označovať súčet poradií hodnôt  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Vypočítame hodnoty charakteristík

$$U_1 = m \cdot n + \frac{m(m+1)}{2} - T_1, \quad U_2 = m \cdot n + \frac{n(n+1)}{2} - T_2.$$

Platí vzťah  $U_1 + U_2 = m \cdot n$ , ktorý môže poslúžiť na kontrolu výpočtu.

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku  $U_0 = \min(U_1, U_2)$ . Hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $U_0 \leq U_\alpha$ , kde  $U_\alpha$  sú kritické hodnoty Wilcoxonovho dvojvýberového testu. Pre dané rozsahy  $m, n$  výberových súborov a hladinu významnosti  $\alpha = 0,05$  resp.  $\alpha = 0,01$  sú uvedené v tabuľke č. 12.9.



Ak sú rozsahy  $m, n$  veľké čísla ( $m > 30, n > 20$ ), ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$U = \frac{U_1 - \frac{1}{2}m \cdot n}{\sqrt{\frac{m \cdot n}{12}(m + n + 1)}},$$

ktorá má za platnosti testovanej hypotézy asymptoticky normálne normované rozdelenie  $N(0, 1)$ . Testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$  v prospech alternatívnej hypotézy, ak  $|U| \geq u_\alpha$ .

*Poznámka.* V literatúre a v niektorých štatistických programoch môžeme Wilcoxonov dvojvýberový test nájsť tiež pod názvom Mannov – Whitneyho test.

V nasledujúcich príkladoch budeme ilustrovať použitie Wilcoxonovho dvojvýberového testu pri vyhodnocovaní výsledkov vo výskume z oblasti živočíšnej výroby a v ekolologickom výskume.

**Príklad 8.4** Pozoroval sa vplyv kobaltu na zvýšenie hmotnosti králikov. Pokus sa realizoval na dvoch skupinách zvierat - pokusnej a kontrolnej. Začiatočná hmotnosť sa pohybovala v hraniciach 500 až 600 gramov. Pokus trval 8 týždňov. Obe skupiny dostávali rovnaké množstvo potravy, ale pokusné králiky dostávali denne navyše 0,06 g chloristanu kobaltnatého na jeden kg hmotnosti. Hmotnosť králikov kontrolnej skupiny (v gramoch) po uplynutí 8 týždňov bola nasledovná: 560, 580, 600, 420, 530, 490, 580, 470. Hmotnosť králikov pokusnej skupiny (v gramoch) po uplynutí 8 týždňov bola nasledovná: 692, 700, 621, 640, 561, 680, 630. Treba overiť, či prídavok kobaltu zvyšuje hmotnosť.

*Riešenie.* Pozorovanými znakmi sú znaky  $X, Y$ , kde  $X$  označuje hmotnosť králikov kŕmených potravou bez prídavku kobaltu a  $Y$  označuje hmotnosť králikov kŕmených potravou s prídavkom kobaltu. Znaky  $X, Y$  sú navzájom nezávislé.

Keďže rozsahy výberových súborov sú malé, nemôžeme predpokladať normalitu rozdelenia. Preto použijeme dvojvýberový Wilcoxonov test. Budeme testovať hypotézu  $H_0$ , že pozorované znaky majú rovnaké rozdelenie.

Všetky namerané hodnoty usporiadame do neklesajúcej postupnosti, čím dostaneme združený výberový súbor. Hodnotám združeného výberu priradíme poradové čísla. Rovnakým hodnotám priradíme to isté poradie. Vypočítame ho ako aritmetický priemer poradí, ktoré by boli týmto hodnotám priradené, keby neboli rovnaké. Príslušné poradia sú uvedené v tabuľke 8.5. Pomocou výsledkov z tabuľky 8.5 vypočítame hodnoty charakteristík  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ :

$$T_1 = 1+2+3+4+5+7,5+7,5+9 = 39; T_2 = 6+10+11+12+13+14+15 = 81;$$

$$U_1 = m \cdot n + \frac{m(m+1)}{2} - T_1 = 8 \cdot 7 + \frac{8 \cdot 9}{2} - 39 = 53;$$

$$U_2 = m \cdot n + \frac{n(n+1)}{2} - T_2 = 8 \cdot 7 + \frac{7 \cdot 8}{2} - 81 = 3.$$

Tabuľka 8.5.

| Združený výber | Poradia združeného výberu | Poradia 1. výberu | Poradia 2. výberu |
|----------------|---------------------------|-------------------|-------------------|
| 420            | 1                         | 1                 | -                 |
| 470            | 2                         | 2                 | -                 |
| 490            | 3                         | 3                 | -                 |
| 530            | 4                         | 4                 | -                 |
| 560            | 5                         | 5                 | -                 |
| 561            | 6                         | -                 | 6                 |
| 580            | 7,5                       | 7,5               | -                 |
| 580            | 7,5                       | 7,5               | -                 |
| 600            | 9                         | 9                 | -                 |
| 621            | 10                        | -                 | 10                |
| 630            | 11                        | -                 | 11                |
| 640            | 12                        | -                 | 12                |
| 680            | 13                        | -                 | 13                |
| 692            | 14                        | -                 | 14                |
| 700            | 15                        | -                 | 15                |

Hodnota testovacieho kritéria  $U_0 = \min(U_1, U_2) = 3$ . V tabuľke č. 12.9 nájdeme pre  $m = 8$ ,  $n = 7$  a  $\alpha = 0,05$  kritickú hodnotu  $U_{0,05} = 10$ .

Keďže pre hodnotu testovacieho kritéria  $U_0$  platí  $U_0 < 10$ , zamietame testovanú hypotézu  $H_0$  na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$  v prospech alternatívnej hypotézy. To znamená, že prídavok kobaltu zvyšuje hmotnosť králikov.

**Príklad 8.5** V rámci ekologického výskumu sa sleduje množstvo olova v dvoch vodných tokoch. Z prvého vodného toku bolo odobratých 6 vzoriek vody a z druhého vodného toku 5 vzoriek vody s týmito nameranými hodnotami olova (v  $\mu\text{g}/\text{l}$ ) v 1. vodnom toku: 0,62; 0,54; 0,55; 0,60; 0,53; 0,58 a s týmito nameranými hodnotami olova (v  $\mu\text{g}/\text{l}$ ) v 2. vodnom toku: 0,52; 0,56; 0,49; 0,50; 0,51. Treba porovnať množstvo olova v týchto dvoch vodných tokoch.

*Riešenie.* Uvedené hodnoty sú realizáciami dvoch nezávislých náhodných výberov z dvoch spojitých rozdelení. Budeme testovať hypotézu  $H_0$ , že distribučné funkcie oboch rozdelení sú rovnaké.

Usporiadame namerané hodnoty oboch výberov do neklesajúcej postupnosti – združeného výberu a priradíme im poradia. Príslušné poradia zapíšeme do tabuľky 8. 6.

Tabuľka 8.6.

| Združený výber | Poradia združeného výberu | Poradia 1. výberu | Poradia 2. výberu |
|----------------|---------------------------|-------------------|-------------------|
| 0,49           | 1                         | -                 | 1                 |
| 0,50           | 2                         | -                 | 2                 |
| 0,51           | 3                         | -                 | 3                 |
| 0,52           | 4                         | -                 | 4                 |
| 0,53           | 5                         | 5                 | -                 |
| 0,54           | 6                         | 6                 | -                 |
| 0,55           | 7                         | 7                 | -                 |
| 0,56           | 8                         | -                 | 8                 |
| 0,58           | 9                         | 9                 | -                 |
| 0,60           | 10                        | 10                | -                 |
| 0,62           | 11                        | 11                | -                 |

Určíme súčty poradí hodnôt prvého a druhého výberu:

$$T_1 = 5+6+7+9+10+11 = 48; \quad T_2 = 1+2+3+4+8 = 18.$$

Vypočítame hodnoty charakteristík  $U_1, U_2$ :

$$U_1 = m \cdot n + \frac{m(m+1)}{2} - T_1 = 6 \cdot 5 + \frac{6 \cdot 7}{2} - 48 = 3;$$

$$U_2 = m \cdot n + \frac{n(n+1)}{2} - T_2 = 6 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 6}{2} - 18 = 27.$$

Hodnota testovacieho kritéria  $U_0 = \min(U_1, U_2) = 3$ . V tabuľke č. 12.9 nájdeme pre  $m = 6$ ,  $n = 5$  a  $\alpha = 0,01$  kritickú hodnotu  $U_{0,01} = 1$ . Keďže hodnota testovacieho kritéria  $U_0$  je väčšia ako kritická hodnota 1, testovanú hypotézu  $H_0$  nemôžeme na hladine významnosti  $\alpha = 0,01$  zamietnuť. To znamená, že množstvo olova v sledovaných vodných tokoch nie je štatisticky významne rozdielne.

#### 8.4 Kruskalov-Wallisov test

Kruskalov-Wallisov test je priamym zovšeobecnením Wilcoxonovho dvojvýberového testu pre prípad  $k$  nezávislých výberových súborov ( $k \geq 3$ ). Je neparametrickou obdobou jednofaktorovej analýzy rozptylu.

Majme  $k$  nezávislých výberových súborov. Nech prvý výberový súbor má rozsah  $n_1$ , druhý  $n_2$ , ...,  $k$ -ty  $n_k$ . Predpokladajme, že každý výber pochádza z rozdelenia so spojitou distribučnou funkciou. Budeme testovať hypotézu  $H_0$ , že všetky výbery pochádzajú z toho istého rozdelenia oproti alternatívnej hypotéze, že tomu tak nie je.

Označme  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ . Všetkých  $n$  nameraných hodnôt zoradíme do neklesajúcej postupnosti a určíme poradie každej hodnoty. Súčet poradí hodnôt  $i$ -teho výberového súboru označíme  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Pretože musí platiť  $T_1 + T_2 + \dots + T_k = \frac{n(n+1)}{2}$ , môžeme tento vzťah použiť na kontrolu výpočtu hodnôt charakteristík  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$K = \frac{12}{n(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1),$$

ktorá má za platnosti testovanej hypotézy  $H_0$  asymptoticky  $\chi^2$ -rozdelenie s  $k - 1$  stupňami voľnosti.

Testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak pre hodnotu testovacieho kritéria  $K$  platí  $K \geq \chi_\alpha^2(k-1)$ , kde  $\chi_\alpha^2(k-1)$  sú kritické hodnoty  $\chi^2$ -rozdelenia. Sú uvedené v tabuľke č. 12.4.

Keďže štatistika  $K$  má asymptoticky  $\chi^2$ -rozdelenie, uvedený vzťah môžeme použiť len v prípade, že výberové súbory majú veľké rozsahy ( $n_i \geq 5$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ) a ak  $k \geq 4$ . Ak pre niektoré  $i$  je  $n_i \leq 5$  alebo ak  $k = 3$ , hodnotu testovacieho kritéria  $K$  porovnáme s kritickou hodnotou  $K_\alpha$  Kruskalovho-Wallisovho testu. Testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $K \geq K_\alpha$ . Kritické hodnoty  $K_\alpha$  sú uvedené v tabuľke č. 12.20.

Ak sa v postupnosti získaných údajov vyskytnú zhodné hodnoty, ktorým sa priraduje priemerné poradie, je potrebné hodnotu testovacieho kritéria  $K$  deliť tzv. korekčným faktorom. Jeho hodnotu vypočítame podľa nasledujúceho vzťahu:

$$f = 1 - \frac{\sum_{i=1}^p (t_i^3 - t_i)}{n^3 - n},$$

kde  $p$  je počet tried s rovnakým poradím,  $t_i$  je počet poradí v  $i$ -tej triede. Testovacia štatistika bude mať potom nasledujúci tvar:

$$K_{opr.} = \frac{K}{f}.$$

*Poznámka.* Ak zamietneme testovanú hypotézu  $H_0$  v prospech alternatívnej hypotézy  $H_1$ , ktorá znamená, že výbery nepochádzajú z toho istého rozdelenia, ostáva nezodpovedaná otázka, ktoré výbery sa od seba štatisticky významne líšia. V analýze rozptylu sa na zodpovedanie tejto otázky používa Duncanov test, Tukeyho alebo Scheffeho metóda. Ak má

$k$  výberov rovnaký rozsah, t.j. ak  $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ , môžeme použiť aj Neményiho metódu. Duncanov test je popísaný v 7. kapitole. Pri Kruskalovom-Wallisovom teste sa pri testovaní kontrastov postupuje nasledujúcim spôsobom.

Pre každú dvojicu porovnávaných súborov vypočítame priemerné poradie

$$\bar{T}_i = \frac{T_i}{n_i} \quad \text{a} \quad \bar{T}_j = \frac{T_j}{n_j}.$$

Testovacím kritériom nulovej hypotézy  $H_0$ , že rozdelenia  $i$ -teho a  $j$ -teho súboru sú rovnaké, je absolútna hodnota rozdielu ich priemerných poradí:

$$D = |\bar{T}_i - \bar{T}_j|.$$

Pri malých rozsahoch výberových súborov testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $D > C$ , kde

$$C = \sqrt{K_\alpha \cdot \frac{n(n+1)}{12} \cdot \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}.$$

$K_\alpha$  je kritická hodnota Kruskalovho-Wallisovho testu. Pri väčších rozsahoch sa použije aproximácia  $K_\alpha \doteq \chi_\alpha^2(k-1)$ , kde  $\chi_\alpha^2(k-1)$  je kritická hodnota  $\chi^2$ -rozdelenia s  $k-1$  stupňami voľnosti,  $k$  je počet porovnávaných súborov. Čiže distribučné funkcie  $i$ -teho a  $j$ -teho súboru sa od seba signifikantne líšia, ak

$$D > \sqrt{\chi_\alpha^2(k-1) \cdot \frac{n(n+1)}{12} \cdot \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}.$$

Ak je rozsah výberových súborov rovnaký, teda ak  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = m$  (takže ide o vyvážené triedenie), môžeme použiť tiež Neményiho metódu. Testovacím kritériom nulovej hypotézy  $H_0$ , že rozdelenia  $i$ -teho a  $j$ -teho súboru sú rovnaké, je štatistika  $|T_i - T_j|$ . Pre

menšie hodnoty  $m$  a  $k$  sú kritické hodnoty testovacieho kritéria Neményiho metódy tabelované (tabuľka č. 12.16). Pri väčších hodnotách testovaných hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak

$$|\bar{T}_i - \bar{T}_j| > q_{k,\infty}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{12} k(km+1)},$$

kde  $q_{k,\infty}(\alpha)$  je kritická hodnota rozpätia  $k$  nezávislých náhodných premenných s rozdelením  $N(0, 1)$ . Je definovaná nasledujúcim spôsobom. Ak  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  je náhodný výber z normálneho rozdelenia  $N(0, 1)$  a  $R = X_{(k)} - X_{(1)}$  je jeho rozpätie, potom  $q_{k,\infty}(\alpha)$  je číslo definované podmienkou  $P(R \geq q_{k,\infty}(\alpha)) = \alpha$ . Kritické hodnoty  $q_{k,\infty}(\alpha)$  nájdeme pre  $\alpha = 0,05$  a  $\alpha = 0,01$  v tabuľke č. 12.21. Aj keď pri vyváženom triedení je možné použiť obe metódy, uprednostňuje sa Neményiho metóda, pretože je citlivejšia.

**Príklad 8.6** V rámci pedagogického výskumu sa porovnávala úroveň vedomostí z matematiky u žiakov šiesteho ročníka na štyroch rôznych školách. V každej škole bola vybraná skupina žiakov, ktorí písali ten istý vedomostný test z matematiky. Výsledky testu boli hodnotené počtom bodov. Sú uvedené v tabuľke 8.7. Do tabuľky sme zaradili aj poradie žiakov, ktoré im boli pridelené na základe výsledkov testu, pričom žiakovi s najmenším počtom bodov bolo priradené najnižšie poradie.

Tabuľka 8.7.

| ZŠ I. |         | ZŠ II. |         | ZŠ III. |         | ZŠ IV. |         |
|-------|---------|--------|---------|---------|---------|--------|---------|
| body  | poradia | body   | poradia | body    | poradia | body   | poradia |
| 32    | 27,5    | 26     | 18      | 49      | 34,5    | 33     | 29      |
| 35    | 30      | 27     | 20      | 23      | 11,5    | 26     | 18      |
| 24    | 13      | 30     | 24,5    | 25      | 15      | 21     | 10      |
| 17    | 6       | 20     | 8       | 28      | 22      | 25     | 15      |
| 10    | 1,5     | 20     | 8       | 20      | 8       | 39     | 31,5    |
| 49    | 34,5    | 40     | 33      | 26      | 18      | 13     | 4       |
| 39    | 31,5    | 13     | 4       | 30      | 24,5    | 31     | 26      |
| 23    | 11,5    | 13     | 4       | 10      | 1,5     |        |         |
| 25    | 15      |        |         | 28      | 22      |        |         |
|       |         |        |         | 28      | 22      |        |         |
|       |         |        |         | 32      | 27,5    |        |         |

*Riešenie.* Testujeme hypotézu  $H_0$ , že úroveň vedomostí z matematiky u žiakov šiesteho ročníka na štyroch rôznych školách je rovnaká. Vypočítame súčty poradí  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) v jednotlivých skupinách :

$$T_1 = 170,5; \quad T_2 = 119,5; \quad T_3 = 206,5; \quad T_4 = 133,5$$

a určíme ich druhé mocniny:

$$T_1^2 = 29\,070,25; \quad T_2^2 = 14\,280,25; \quad T_3^2 = 42\,642,25; \quad T_4^2 = 17\,822,25.$$

Ďalej vypočítame

$$\frac{T_1^2}{n_1} = \frac{29\,070,25}{9} = 3\,230,02; \quad \frac{T_2^2}{n_2} = \frac{14\,280,25}{8} = 1\,785,03;$$

$$\frac{T_3^2}{n_3} = \frac{42\,642,25}{11} = 3\,876,57; \quad \frac{T_4^2}{n_4} = \frac{17\,822,25}{7} = 2\,546,04$$

a hodnotu testovacieho kritéria:

$$K = \frac{12}{n(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1) =$$

$$= \frac{12}{35 \cdot 36} (3230,02 + 1785,03 + 3876,57 + 2546,04) - 3 \cdot 36 = 0,6577.$$

Máme 11 tried s rovnakým poradím, teda  $p = 11$ , pričom  $t_1 = t_4 = t_8 = t_9 = t_{10} = t_{11} = 2$ ;  $t_2 = t_3 = t_5 = t_6 = t_7 = 3$ .

Hodnota korekčného faktora je

$$f = 1 - \frac{\sum_{i=1}^p (t_i^3 - t_i)}{n^3 - n} = 1 - 0,03641 = 0,96359,$$

čiže

$$K_{opr.} = \frac{K}{f} = \frac{0,6577}{0,96359} = 0,668255.$$

Počet stupňov voľnosti je  $4 - 1 = 3$ . V tabuľke č. 12.4 pre zvolenú hladinu významnosti  $\alpha = 0,05$  nájdeme kritickú hodnotu  $\chi_{0,05}^2(3) = 7,81$ .



Keďže hodnota testovacieho kritéria  $K_{opr.}$  neprekračuje kritickú hodnotu 7,81, testovanú hypotézu  $H_0$  nemôžeme na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$  zamietnuť. To znamená, že úroveň vedomostí z matematiky žiakov šiesteho ročníka na štyroch vybraných školách je rovnaká. Pozorované rozdiely nie sú štatisticky významné.

**Príklad 8.7** ([8]) Spoločnosť porovnávala finančné náklady na reklamu v štyroch veľkých vydavateľstvách časopisov. V každom vydavateľstve bolo náhodne vybraných 7 časopisov a boli zistené náklady na ich reklamu v tisícoch korún. Údaje sú uvedené v tabuľke 8.8. Treba overiť, či medzi týmito štyrmi nakladateľstvami sú rozdiely v nákladoch na reklamu.

Tabuľka 8.8.

| Vydavateľstvo A |            | Vydavateľstvo B |           | Vydavateľstvo C |           | Vydavateľstvo D |           |
|-----------------|------------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|
| náklady         | poradia    | náklady         | poradia   | náklady         | poradia   | náklady         | poradia   |
| 57              | 9          | 81              | 23        | 35              | 1         | 73              | 21        |
| 65              | 16         | 72              | 20        | 42              | 4         | 85              | 25        |
| 50              | 7          | 64              | 15        | 58              | 10        | 92              | 27        |
| 45              | 5          | 55              | 8         | 59              | 11        | 68              | 18        |
| 70              | 19         | 90              | 26        | 46              | 6         | 82              | 24        |
| 62              | 14         | 38              | 2,5       | 60              | 12        | 94              | 28        |
| 38              | <u>2,5</u> | 75              | <u>22</u> | 61              | <u>13</u> | 66              | <u>17</u> |
| $T_1=72,5$      |            | $T_2=116,5$     |           | $T_3=57$        |           | $T_4=160$       |           |

*Riešenie.* V tabuľke 8.8 sú k jednotlivým hodnotám priradené ich poradia a vypočítané súčty poradí  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) v jednotlivých skupinách. Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria  $K$ :

$$K = \frac{12}{n(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1) = \frac{12}{28 \cdot 29} \left( \frac{72,5^2}{7} + \frac{116,5^2}{7} + \frac{57^2}{7} + \frac{160^2}{7} \right) - 3 \cdot 29 = 13,656.$$

Určíme korekčný faktor. Keďže  $p = 1$  a  $t_1 = 2$ , dostávame:

$$f = 1 - \frac{2^3 - 2}{28^3 - 28} = 0,9997 \text{ a } K_{opr.} = \frac{K}{f} = \frac{13,656}{0,9997} = 13,660.$$

Počet stupňov voľnosti je  $4 - 1 = 3$ . V tabuľke č. 12.4 pre zvolenú hladinu významnosti  $\alpha = 0,05$  nájdeme kritickú hodnotu  $\chi^2_{0,05}(3) = 7,81$ . Keďže pre hodnotu testovacieho kritéria platí  $K_{opr.} > 7,81$ , zamietame testovanú hypotézu  $H_0$  na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$ . To znamená, že výška nákladov na reklamu je u uvažovaných nakladateľstiev rozdielna.

V ďalšom nás bude zaujímať, ktoré vydavateľstvá sa navzájom líšia v nákladoch na reklamu. To je predmetom ďalšej analýzy, v ktorej použijeme Tukeyho metódu.

Porovnáme  $i$ -ty a  $j$ -ty súbor pre každé  $i, j$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ ,  $i \neq j$ . Pre každú dvojicu porovnávaných súborov vypočítame priemerné poradie

$$\bar{T}_i = \frac{T_i}{n_i} \quad \text{a} \quad \bar{T}_j = \frac{T_j}{n_j}.$$

Priemerné poradie výberových súborov sú:

$$\bar{T}_1 = 10,36; \quad \bar{T}_2 = 16,64; \quad \bar{T}_3 = 8,14; \quad \bar{T}_4 = 22,86.$$

Testovacím kritériom nulovej hypotézy  $H_0$ , že rozdelenia súborov  $i$  a  $j$  sú rovnaké, je absolútna hodnota rozdielu ich priemerných poradí:

$$D = |\bar{T}_i - \bar{T}_j|.$$

Testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $D > C$ ,

$$\text{kde } C = \sqrt{\chi^2_{1-\alpha}(k-1) \cdot \frac{n(n+1)}{12} \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}.$$

Keďže  $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 7$ , pre každú dvojicu súborov je kritická hodnota  $C$  rovnaká:

$$C = \sqrt{7,81 \cdot \frac{28 \cdot 29}{12} \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \right)} = 12,29.$$

Hodnotu  $\chi^2_{\alpha}(k-1) = \chi^2_{0,05}(3) = 7,81$  sme vyhľadali v tabuľke č.12.4.

Vypočítame hodnoty testovacieho kritéria  $D$  pre každú dvojicu súborov:

$$\text{vydavateľstvo A – vydavateľstvo B: } D = |10,36 - 16,64| = 6,28$$

$$\text{vydavateľstvo A – vydavateľstvo C: } D = |10,36 - 8,14| = 2,22$$

$$\text{vydavateľstvo A – vydavateľstvo D: } D = |10,36 - 22,86| = 12,5 \quad *$$

$$\text{vydavateľstvo B – vydavateľstvo C: } D = |16,64 - 8,14| = 8,5$$

$$\text{vydavateľstvo B – vydavateľstvo D: } D = |16,64 - 22,86| = 6,22$$

$$\text{vydavateľstvo C – vydavateľstvo D: } D = |8,14 - 22,86| = 14,72 \quad *$$

Vypočítané hodnoty testovacieho kritéria  $D$  sme porovnali s kritickou hodnotou  $C$ . Testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$  v dvoch prípadoch, označili sme ich \*. Štatisticky významné rozdiely vo výške nákladov na reklamu sú medzi vydavateľstvami A a D a vydavateľstvami C a D.

## 8.5 Friedmanov test

V analýze rozptylu sme porovnávali stredné hodnoty niekoľkých základných súborov. Predpokladali sme, že ich rozdelenia sú aspoň približne normálne. V prípade, že podmienka normality nie je splnená a výberové súbory sú navzájom nezávislé, pre porovnanie súborov použijeme Kruskalov-Wallisov test. Na porovnávanie niekoľkých základných súborov na základe závislých výberových súborov, pričom nie je splnená podmienka normality, je vhodnou metódou Friedmanov test. Friedmanov test je zovšeobecnením Wilcoxonovho jednovýberového testu a je analógiou analýzy rozptylu dvojného triedenia s jedným pozorovaním v každej podtriade.

Nech  $X_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$ ) sú náhodné premenné so spojitými distribučnými funkciami. Chceme testovať hypotézu  $H_0$ , že distribučné funkcie premenných  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}$  sú totožné. V praxi ide o tzv. *model náhodných blokov*. Skúma sa vplyv  $k$  ošetrení, ktoré sú aplikované na  $n$  blokoch. Treba rozhodnúť, či ošetrenia prinášajú rovnaký efekt. Ak nemajú rovnaký efekt, treba ďalej určiť, ktoré ošetrenia sa od seba líšia. Často nejde samozrejme o ošetrovanie v pravom slova zmysle, ale

jednoducho je nejaká veličina zaznamenávaná na každom sledovanom objekte v  $k$  časových okamihoch.

Friedmanov test spočíva v tom, že sa pozorovania na každom bloku usporiadajú zvlášť a určí sa poradie  $T_{ij}$  hodnoty  $x_{ij}$  v rámci  $i$ -teho bloku. Platí vzťah  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k T_{ij} = \frac{nk(k+1)}{2}$ , ktorý môže slúžiť ako kontrola výpočtu. Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku

$$Q = \frac{12}{nk(k+1)} \cdot \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n T_{ij} \right)^2 - 3n(k+1),$$

ktorá má za platnosti hypotézy  $H_0$  asymptoticky  $\chi^2$ -rozdelenie s  $k-1$  stupňami voľnosti. Testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak pre hodnotu testovacieho kritéria platí  $Q \geq \chi_{\alpha}^2(k-1)$ , kde  $\chi_{\alpha}^2(k-1)$  sú kritické hodnoty  $\chi^2$ -rozdelenia. Sú uvedené v tabuľke č. 12.4. Keďže štatistika  $Q$  má asymptoticky  $\chi^2$ -rozdelenie, predchádzajúci vzťah môžeme použiť len v prípade, že výbery majú veľký rozsah ( $n > 20$ ). Pre malé hodnoty  $n$  a  $k$  ( $n \leq 20$ ,  $k \leq 12$ ) hodnotu testovacieho kritéria  $Q$  porovnáme s kritickou hodnotou  $Q_{\alpha}$  Friedmanovho testu. Kritické hodnoty  $Q_{\alpha}$  Friedmanovho testu sú pre  $\alpha = 0,05$  a  $\alpha = 0,01$  uvedené v tabuľke č. 12.15. Testovanú hypotézu  $H_0$  zamietame na hladine významnosti  $\alpha$ , ak  $Q \geq Q_{\alpha}$ .

*Poznámka.* Ak zamietneme testovanú hypotézu  $H_0$  v prospech alternatívnej hypotézy  $H_1$ , ktorá znamená, že ošetrenia neprinášajú rovnaký efekt, ostáva nezodpovedaná otázka, ktoré výbery sa od seba štatisticky významne líšia. Na porovnávanie rozdielov medzi jednotlivými súbormi použijeme Neményiho metódu mnohonásobného porovnávania pri Friedmanovom teste. Pri použití tejto metódy budeme postupovať

nasledovne. Označíme  $\sum_{i=1}^n T_{ij} = T_{.j}$  a vytvoríme tabuľku absolútnych hodnôt rozdielov súčtov poradí  $|T_{.j} - T_{.m}|$  pre  $j < m$ . Ak je niektorá z vypočítaných absolútnych hodnôt väčšia ako kritická tabuľková hodnota pre mnohonásobné porovnávanie pre Friedmanov test (tabuľka č. 12.16),

testovanú hypotézu, že  $j$ -te a  $m$ -te ošetrovanie má rovnaký efekt, zamietneme na zvolenej hladine významnosti  $\alpha$ .

Asymptoticky sú kritické hodnoty pre tieto mnohonásobné porovnávania dané vzťahom

$$q_{k,\infty}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{12}nk(k+1)},$$

kde  $q_{k,\infty}(\alpha)$  je kritická hodnota rozpätia  $k$  nezávislých náhodných premenných s rozdelením  $N(0, 1)$ . Nájdeme ju pre  $\alpha = 0,05$  a  $\alpha = 0,01$  v tabuľke č. 12.21.

**Príklad 8.8** ([2]) Bol sledovaný vplyv troch preparátov A, B a C na zrážanie krvi. U desiatich osôb bol meraný tzv. trombinový čas (ozn. K). Meral sa u každej osoby najskôr pred zahájením pokusu a potom po každej aplikácii preparátu, a to s dostatočným časovým odstupom, aby dozneli účinky predchádzajúceho preparátu. Namerané hodnoty trombinového času u 10 sledovaných osôb sú uvedené v tabuľke 8.9. Treba zistiť, či vplyv všetkých troch preparátov na zrážanie krvi je rovnaký.

Tabuľka 8.9.

| Osoba | Preparát |      |      |      |
|-------|----------|------|------|------|
|       | K        | A    | B    | C    |
| 1     | 11,3     | 11,2 | 11,4 | 11,0 |
| 2     | 11,9     | 12,1 | 11,8 | 9,5  |
| 3     | 11,8     | 13,2 | 12,0 | 11,1 |
| 4     | 12,1     | 12,8 | 12,0 | 12,5 |
| 5     | 11,2     | 13,5 | 11,5 | 8,4  |
| 6     | 11,3     | 12,5 | 11,5 | 9,0  |
| 7     | 10,8     | 10,7 | 10,9 | 9,7  |
| 8     | 12,0     | 13,8 | 11,6 | 12,2 |
| 9     | 11,5     | 12,9 | 11,3 | 10,3 |
| 10    | 11,7     | 11,9 | 11,3 | 8,2  |

**Riešenie.** Pozorovaným znakom  $X$  je trombinový čas. Namerané hodnoty  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ;  $j = 1, 2, 3, 4$ ) znaku  $X$  sú uvedené v tabuľke 9.9. Testujeme hypotézu  $H_0$ : „použitie preparáty na zrážanie krvi prinášajú rovnaký efekt“ oproti alternatívnej hypotéze  $H_1$ : „efekt preparátov je rozdielny“.

Budeme postupovať nasledovne: hodnotám v každom bloku priradíme poradie  $T_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ;  $j = 1, 2, 3, 4$ ). Zistené poradia zapíšeme do tabuľky 8.10.

Tabuľka 8.10.

| Osoba    | Preparát |    |    |    |
|----------|----------|----|----|----|
|          | K        | A  | B  | C  |
| 1        | 3        | 2  | 4  | 1  |
| 2        | 3        | 4  | 2  | 1  |
| 3        | 2        | 4  | 3  | 1  |
| 4        | 2        | 4  | 1  | 3  |
| 5        | 2        | 4  | 3  | 1  |
| 6        | 2        | 4  | 3  | 1  |
| 7        | 3        | 2  | 4  | 1  |
| 8        | 2        | 4  | 1  | 3  |
| 9        | 3        | 4  | 2  | 1  |
| 10       | 3        | 4  | 2  | 1  |
| $\Sigma$ | 25       | 36 | 25 | 14 |

V poslednom riadku tabuľky sú zapísané súčty poradí, ktoré budú potrebné pri výpočte hodnoty testovacieho kritéria:

$$T_{.j} = \sum_{i=1}^{10} T_{ij}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Vypočítame hodnotu testovacieho kritéria:

$$Q = \frac{12}{nk(k+1)} \cdot \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n T_{ij} \right)^2 - 3n(k+1) = \frac{12}{10 \cdot 4 \cdot 5} (25^2 + 36^2 + 25^2 + 14^2) - 3 \cdot 10 \cdot 5 = 14,52.$$

V tabuľke č. 12.15 pre zvolenú hladinu významnosti  $\alpha = 0,05$ ,  $n = 10$  a pre  $k = 4$  nájdeme kritickú hodnotu  $Q_\alpha = 7,67$ . Keďže hodnota testovacieho kritéria  $Q$  je väčšia ako kritická hodnota 7,67, na hladine významnosti  $\alpha = 0,05$  zamietame testovanú hypotézu  $H_0$ . To znamená, že použité preparáty majú rozdielny vplyv na zrážanie krvi.

V ďalšom nás bude zaujímať, ktoré preparáty majú rozdielny účinok. To je predmetom ďalšej analýzy, v ktorej použijeme Neményiho

metódu. Postupujeme nasledovne. Vytvoríme tabuľku 8.11 absolútnych hodnôt rozdielov súčtov poradí  $|T_{.j} - T_{.m}|$  pre  $j < m$ , kde  $T_{.j} = \sum_{i=1}^{10} T_{ij}$ .

Tabuľka 8.11.

| $j$ | $m$ |    |     |
|-----|-----|----|-----|
|     | 2   | 3  | 4   |
| 1   | 11  | 0  | 11  |
| 2   |     | 11 | 22* |
| 3   |     |    | 11  |

Príslušnú kritickú hodnotu pre  $n = 10$ ,  $k = 4$  a  $\alpha = 0,05$  vyhladáme v tabuľke č. 12.16. Táto hodnota je 14,8. Hodnoty z tabuľky 8.11 porovnáme s kritickou hodnotou. Dostávame záver, že štatisticky významne sa odlišujú účinky druhého a štvrtého preparátu, t.j. účinky preparátov A a C.

## 8.6 Testy dobrej zhody

Pri testovaní významnosti rozdielov medzi priemermi a pri testovaní významnosti rozdielov medzi rozptylmi sme testovali zhodu parametrov základných súborov. V tejto časti uvedieme testy významnosti pre overovanie zhody v širšom zmysle. Neobmedzíme sa iba na prípad testovania zhody rozptylov alebo stredných hodnôt základných súborov, ale budeme testovať *zhodu rozdelení*.

Budeme testovať, či náhodný výber pochádza z určitého základného súboru, či dva výbery pochádzajú z toho istého základného súboru resp., či určitý teoretický základný súbor môže byť modelom pre daný výberový súbor. Pre tieto účely boli vytvorené viaceré testy, tzv. testy dobrej zhody, z ktorých uvedieme  $\chi^2$ - test dobrej zhody, Kolmogorovov-Smirnovov test pre jeden výber a Kolmogorovov-Smirnovov test pre dva nezávislé výbery.

Ako ukazuje vypočítaná hodnota korelačného koeficienta  $r \doteq 0,83$ , existuje vysoký stupeň zhody medzi známami z matematiky a fyziky v skupine 34 žiakov.

**b) Koeficient poradovej korelácie (ozn.  $R$ )**

V pedagogických, psychologických a sociologických výskumoch sa často stretávame s poradovými (ordinálnymi) kvalitatívnymi znakmi. O poradovom kvalitatívnom znaku hovoríme vtedy, ak znak  $X$  priradil prvkom štatistického súboru poradia. Predpokladajme, že na prvkoch súboru s rozsahom  $n$  pozorujeme dva ordinálne znaky  $X$  a  $Y$ . Nech znak  $X$  priradil prvkom súboru poradia  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a znak  $Y$  poradia  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Stupeň závislosti medzi znakmi  $X$  a  $Y$  sa vyjadruje pomocou Spearmanovho koeficienta poradovej korelácie. Je definovaný vzťahom:

$$(9.4) \quad R = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad \text{kde}$$

$$d_i = x_i - y_i \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n.$$

Koeficient poradovej korelácie  $R$  nadobúda hodnoty z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  a interpretácia jeho hodnôt je rovnaká ako interpretácia hodnôt korelačného koeficienta  $r$ . Výpočet koeficienta poradovej korelácie budeme ilustrovať na nasledujúcom príklade.

**Príklad 9.5** V chemickom krúžku určitej základnej školy učiteľ chémie posudzuje žiakov formou poradia podľa toho, aké majú schopnosti uspieť na chemickej olympiáde. To isté robí aj triedny učiteľ. Chceme zistiť, či sa zhoduje posudok učiteľa chémie a posudok triedneho učiteľa.

*Riešenie.* Pozorovanými znakmi sú ordinálne znaky  $X$  a  $Y$ , kde  $X$  označuje posudok učiteľa chémie a  $Y$  posudok triedneho učiteľa. V tabuľke 9.8 sú uvedené poradia žiakov a príslušné výpočty.



Tabuľka 9.8.

| Žiak $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $d_i$ | $d_i^2$ |
|----------|-------|-------|-------|---------|
| 1        | 1     | 3     | -2    | 4       |
| 2        | 2     | 4     | -2    | 4       |
| 3        | 3     | 1     | 2     | 4       |
| 4        | 4     | 2     | 2     | 4       |
| 5        | 5     | 9     | -4    | 16      |
| 6        | 6     | 5     | 1     | 1       |
| 7        | 7     | 7     | 0     | 0       |
| 8        | 8     | 6     | 2     | 4       |
| 9        | 9     | 8     | 1     | 1       |
| $\Sigma$ | 45    | 45    | 0     | 38      |

Koeficient poradovej korelácie vypočítame dosadením údajov z tabuľky do vzťahu (9.4):

$$R = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 38}{9 \cdot (81 - 1)} = 1 - \frac{19}{60} \doteq 0,68.$$

Hodnota koeficienta poradovej korelácie vyjadruje, že medzi posudkom učiteľa chémie a posudkom triedneho učiteľa je význačný stupeň zhody.

*Poznámka.* Znaky  $X$  a  $Y$  z predchádzajúceho príkladu sú tzv. *ordinálne škálované znaky*. Kvantitatívne znaky sa nazývajú aj *metricky škálované znaky*. Ak potrebujeme vypočítať koreláciu medzi metricky škálovaným znakom a znakom ordinálnym, je potrebné metricky škálovaný znak upraviť. Nameraným hodnotám metricky škálovaného znaku priradíme poradia. Postup ukážeme na príklade 9.6.

**Príklad 9.6** Deväti žiaci sa zúčastnili športovej súťaže vo viacboji. Počas súťaže nazbierali nasledovné trestné body: Marek dostal 1 bod, Peter a Fero po štyri body, Lenka 7 bodov, Karol a Janko po 8 bodov, Pavol a Igor 9 bodov a Dušan 11 bodov. Usporiadajte žiakov (prideľte im poradové čísla) podľa počtu získaných trestných bodov.

*Riešenie.* Sledovaným znakom  $X$  je počet trestných bodov. Žiakom pridelieme poradové čísla. Hodnoty znaku  $X$  a príslušné poradia zapíšeme do nasledujúcej tabuľky:

Tabuľka 9.9.

| Žiak  | Počet bodov | Poradie |
|-------|-------------|---------|
| Marek | 1           | 1       |
| Peter | 4           | 2,5     |
| Fero  | 4           | 2,5     |
| Lenka | 7           | 4       |
| Karol | 8           | 5,5     |
| Janko | 8           | 5,5     |
| Pavol | 9           | 7,5     |
| Igor  | 9           | 7,5     |
| Dušan | 11          | 9       |

Marek mal najmenej trestných bodov, dostal poradové číslo 1. Pretože Peter a Fero dostali rovnaký počet trestných bodov, nevieme, ktorému z nich máme pridať 2. a ktorému 3. miesto. V takýchto prípadoch (pri rovnosti hodnôt znaku) sa obom štatistickým jednotkám pridelí to isté poradie. Vypočítame ho ako aritmetický priemer poradií, ktoré by sme obom žiakom priradili, keby nemali rovnaký počet trestných bodov. Peter a Fero dostanú teda poradie  $\frac{2+3}{2} = 2,5$ . Keďže sme už „vyčerpali“ poradia 1. - 3., Lenke, ktorá dostala 7 trestných bodov, sme priradili poradové číslo 4. Karol a Janko majú rovnaký počet trestných bodov, preto im priradíme rovnaké poradové čísla, ktoré dostaneme ako aritmetický priemer príslušných poradových čísel:  $\frac{5+6}{2} = 5,5$ . Pavol a Igor majú rovnaký počet trestných bodov, budú mať poradia 7,5. Dušan, ktorý má najväčší počet trestných bodov, bude mať poradie 9.

Ak sú niektoré hodnoty znaku  $X$  resp. znaku  $Y$  rovnaké, doporučuje sa používať korigovaný výberový Spearmanov korelačný koeficient, ktorý je definovaný nasledujúcim vzťahom:

$$R^* = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1) - T_x - T_y}, \quad \text{kde}$$

$$T_x = \frac{1}{2} \sum (t_x^3 - t_x), \quad T_y = \frac{1}{2} \sum (t_y^3 - t_y),$$

pričom  $t_x$  je počet rovnakých hodnôt náhodnej premennej  $X$  a analogicky,  $t_y$  je počet rovnako veľkých hodnôt náhodnej premennej  $Y$ .

**Príklad 9.7** Tréner a triedny učiteľ hodnotia schopnosť vybraných študentov športového gymnázia uspieť v blížiacей sa športovej súťaži formou poradia. Na prvé miesto sa uvedie študent s najlepšimi predpokladmi uspieť na športovej súťaži. Tréner zostavil takéto poradie vybraných študentov: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Triedny učiteľ určil nasledovné poradie študentov: E, D, B, C, I, A, C, F, H, J.

V športovej súťaži potom študenti dostali nasledovné bodové hodnotenie: študent A dostal 48 bodov, študent B 36, študent C 36, študent D 32, študent E 32, študent F 31, študent G 29, študent H 29, študent I 29 a študent J 11 bodov. a) Vypočítajte stupeň zhody posudzujúcich; b) Porovnajte správnosť prognóz trénera a triedneho učiteľa.

*Riešenie.*

a) Stupeň zhody posudzujúcich posúdime na základe hodnoty koeficienta poradovej korelácie medzi znakmi  $X, Y$ , kde  $X$  je hodnotenie študentov trénerom a  $Y$  je hodnotenie študentov triednym učiteľom. Poradia a príslušné výpočty sú zapísané v tabuľke 9.10.

*Tabuľka 9.10.*

| Študent  | Hodnotenie |                   | $d_i$ | $d_i^2$ |
|----------|------------|-------------------|-------|---------|
|          | trénerom   | triednym učiteľom |       |         |
| A        | 1          | 6                 | -5    | 25      |
| B        | 2          | 3                 | -1    | 1       |
| C        | 3          | 7                 | -4    | 16      |
| D        | 4          | 2                 | 2     | 4       |
| E        | 5          | 1                 | 4     | 16      |
| F        | 6          | 8                 | -2    | 4       |
| G        | 7          | 4                 | 3     | 9       |
| H        | 8          | 9                 | -1    | 1       |
| I        | 9          | 5                 | 4     | 16      |
| J        | 10         | 10                | 0     | 0       |
| $\Sigma$ | 55         | 55                | 0     | 92      |

$$R_{X,Y} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{10} d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 92}{10 \cdot (100 - 1)} \doteq 0,44.$$

Na základe vypočítanej hodnoty koeficienta poradovej korelácie  $R_{X,Y} \doteq 0,44$  môžeme povedať, že medzi hodnotením študentov trénerom a triednym učiteľom je mierna zhoda.

b) Najskôr vypočítame koreláciu medzi prognózou trénera a výsledkami, ktoré študenti dosiahli na športovej súťaži. Keďže bodové hodnotenie, ktoré študenti dostali na športovej súťaži, je kvantitatívny znak (označme ho  $Z$ ), musíme jeho hodnoty transformovať na poradia. Príslušné výpočty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 9.11.

| Študent  | Prognóza trénera<br>(poradia) | Hodnotenie na<br>súťaži |         | $d_i$ | $d_i^2$ |
|----------|-------------------------------|-------------------------|---------|-------|---------|
|          |                               | body                    | poradia |       |         |
| A        | 1                             | 48                      | 1       | 0     | 0       |
| B        | 2                             | 36                      | 2,5     | -0,5  | 0,25    |
| C        | 3                             | 36                      | 2,5     | 0,5   | 0,25    |
| D        | 4                             | 32                      | 4,5     | -0,5  | 0,25    |
| E        | 5                             | 32                      | 4,5     | 0,5   | 0,25    |
| F        | 6                             | 31                      | 6       | 0     | 0       |
| G        | 7                             | 29                      | 8       | -1    | 1       |
| H        | 8                             | 29                      | 8       | 0     | 0       |
| I        | 9                             | 29                      | 8       | 1     | 1       |
| J        | 10                            | 11                      | 10      | 0     | 0       |
| $\Sigma$ | 55                            | -                       | -       | 0     | 3       |

Vypočítajme hodnotu koeficienta poradovej korelácie medzi znakmi  $X$  a  $Z$ , t.j. medzi prognózou trénera a výsledkami študentov na súťaži. Keďže niektoré hodnoty znaku  $Z$  sú rovnaké, budeme počítať hodnotu korigovaného výberového Spearmanovho korelačného koeficienta:

$$T_x = 0, \quad T_z = \frac{1}{2} \sum (t_z^3 - t_z) = \frac{1}{2} (2^3 - 2 + 2^3 - 2 + 3^3 - 3) = 18,$$

$$R_{X,Z}^* = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{10} d_i^2}{n(n^2 - 1) - T_x - T_z} = 1 - \frac{6 \cdot 3}{10 \cdot (100 - 1) - 18} \doteq 0,981.$$

Pomocou tabuľky 9.12 vypočítame koreláciu medzi prognózou triedneho učiteľa o športových výkonoch študentov a výsledkami, ktoré študenti skutočne dosiahli na športovej súťaži.

Tabuľka 9.12.

| Študent  | Prognóza učiteľa<br>(poradia) | Hodnotenie na<br>súťaži |         | $d_i$ | $d_i^2$ |
|----------|-------------------------------|-------------------------|---------|-------|---------|
|          |                               | body                    | poradia |       |         |
| A        | 6                             | 48                      | 1       | 5     | 25      |
| B        | 3                             | 36                      | 2,5     | 0,5   | 0,25    |
| C        | 7                             | 36                      | 2,5     | 4,5   | 20,25   |
| D        | 2                             | 32                      | 4,5     | -2,5  | 6,25    |
| E        | 1                             | 32                      | 4,5     | -3,5  | 12,25   |
| F        | 8                             | 31                      | 6       | 2     | 4       |
| G        | 4                             | 29                      | 8       | -4    | 16      |
| H        | 9                             | 29                      | 8       | 1     | 1       |
| I        | 5                             | 29                      | 8       | -3    | 9       |
| J        | 10                            | 11                      | 10      | 0     | 0       |
| $\Sigma$ | 55                            | -                       | -       | 0     | 94,00   |

$$R_{Y,Z}^* = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{10} d_i^2}{n(n^2 - 1) - T_y - T_z} = 1 - \frac{6 \cdot 94}{10 \cdot (100 - 1) - 18} \doteq 0,42.$$

Na základe výsledkov vidíme, že tréner odhadol športové výkony študentov na športovom podujatí oveľa presnejšie ( $R_{X,Z}^* \doteq 0,98$ ), ako ich odhadol triedny profesor ( $R_{Y,Z}^* \doteq 0,42$ ).