

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH

Prúdenie kvapalín a plynov

Učebnica pre študijný program
Obnoviteľné zdroje energie a udržateľná energetika

Dušan Kudelas

Košice 2026

Prúdenie kvapalín a plynov

Vysokoškolská učebnica

Autor: Dušan Kudelas

Recenzenti: **[Doplniť: mená recenzentov]**

Vydavateľ: Technická univerzita v Košiciach

Rok vydania: 2026

Rozsah: **[Doplniť: počet strán]**

ISBN: **[Doplniť: ISBN]**

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

Predhovor

Učebnica je určená študentom bakalárskeho študijného programu *Obnoviteľné zdroje energie a udržateľná energetika*. Pokrýva obsah predmetu *Prúdenie kvapalín a plynov* a pripravuje študenta na nadväzujúce predmety zamerané na prenos tepla, hydraulické a tepelné stroje, vodnú a veternú energetiku, tepelné siete a numerické modelovanie prúdenia.

Mechanika tekutín sa v klasických učebniciach [1–5] vykladá prevažne z pohľadu strojárstva alebo stavebníctva. V tejto knihe sa sústredíme na otázky, ktoré energetik v praxi rieši najčastejšie:

- koľko energie treba na to, aby tekutina prúdila daným systémom,
- koľko energie možno z prúdiacej tekutiny získať,
- ako ovplyvnia vlastnosti média, geometria a spôsob regulácie účinnosť celého zariadenia.

Štruktúra učebnice

Učebnica má štyri časti. *Prvá časť* (kap. 1 až 3) zavádza pojem tekutiny, jej fyzikálne vlastnosti a hydrostatiku. *Druhá časť* (kap. 4 až 7) buduje tri bilančné zákony – zachovania hmotnosti, energie a hybnosti –, ktoré tvoria jadro celého predmetu. *Tretia časť* (kap. 8 až 12) sa venuje reálnym tekutinám, turbulencii a výpočtu tlakových strát v potrubiach a sieťach. *Štvrtá časť* (kap. 13 až 15) aplikuje získané poznatky na čerpadlá, vodné turbíny, prúdenie plynov a ventilátory. Kapitoly nadväzujú v poradí, v akom sú zaradené; kapitoly štvrtej časti možno pri obmedzenom rozsahu predmetu preberať aj selektívne.

Ako pracovať s učebnicou

Každá kapitola sa začína rámčekom *Výstup kapitoly*. Uvádza, čo má študent po preštudovaní kapitoly vedieť urobiť. V texte sú zaradené tieto typy rámčeka:

- **Príklad** – riešený výpočtový príklad s komentárom postupu,
- **Aplikácia v OZE** – prepojenie látky s konkrétnym zariadením obnoviteľnej energetiky,
- **Na zamyslenie** – motivačná otázka, na ktorú odpovedá ďalší text,
- **Pozor – častá chyba** – typické omyly pri výpočtoch a interpretácii,
- **Projektová úloha** – rozsiahlejšie zadanie na samostatnú prácu alebo prácu v tíme.

Na konci kapitoly je zhrnutie, kontrolné otázky a úlohy na precvičenie s výsledkami.

Veličiny sa zapisujú v sústave SI. Desatinnou značkou je čiarka. Zoznam použitých symbolov obsahuje príl. A. Tabuľky fyzikálnych vlastností vody, vzduchu a teplonosných kvapalín sú v príl. B. Odkazy na literatúru sa uvádzajú v hranatých zátvorkách, napr. [1], a úplný zoznam literatúry je na konci knihy.

Väčšina výpočtových príkladov sa dá riešiť kalkulačkou. Pri iteračných úlohách (Colebrookova rovnica, potrubné siete, pracovné body strojov) odporúčame tabuľkový procesor alebo jazyk Python; ukážka riešenia siete je v kap. 12. Skripty, ktorými boli vypočítané údaje pre grafy, sú k dispozícii spolu so zdrojovými súbormi učebnice.

Autor

Obsah

Predhovor	iii
I Základy	1
1 Úvod do prúdenia kvapalín a plynov	3
1.1 Tekutiny v energetických systémoch	4
1.2 Kvapaliny a plyny ako pracovné médiá	5
1.3 Systém, kontrolný objem a hranica systému	7
1.4 Základné veličiny mechaniky tekutín	7
1.5 Pole tlaku, rýchlosti, hustoty a teploty	8
1.6 Ustálené a neustálené deje	9
1.7 Jednorozmerné, dvojrozmerné a trojrozmerné modely	10
1.8 Modelovanie reálneho zariadenia	11
1.9 Mechanika tekutín a energetická účinnosť	12
1.10 Aplikácie v OZE	12
Zhrnutie kapitoly	16
Kontrolné otázky	17
Úlohy na precvičenie	17
2 Fyzikálne vlastnosti tekutín	19
2.1 Hustota a merný objem	19
2.2 Relatívna hustota	21
2.3 Stlačiteľnosť a objemový modul pružnosti	22
2.4 Dynamická viskozita	23
2.5 Kinematická viskozita	24
2.6 Newtonov zákon viskozity	25
2.7 Newtonovské a neneutronovské tekutiny	26
2.8 Povrchové napätie a kapilarita	26

2.9	Tlak nasýtených pár	27
2.10	Závislosť vlastností od teploty a tlaku	28
2.11	Vlastnosti vody, vzduchu a teplonosných médií	29
2.12	Nemrznúce zmesi a teplonosné kvapaliny v OZE	29
	Zhrnutie kapitoly	32
	Kontrolné otázky	32
	Úlohy na precvičenie	33
3	Tlak a hydrostatika	35
3.1	Definícia tlaku	35
3.2	Absolútny, atmosférický a pretlakový tlak	36
3.3	Hydrostatická rovnica	37
3.4	Zmena tlaku s hĺbkou	37
3.5	Manometre a meranie tlaku	39
3.6	Pascalov zákon	40
3.7	Hydrostatická sila na rovinnú plochu	41
3.8	Poloha pôsobiska tlakovej sily	42
3.9	Hydrostatická sila na zakrivenú plochu	43
3.10	Archimedov zákon a vztlak	44
3.11	Tlak v nádržiach a zásobníkoch	45
3.12	Hydrostatika vo vodnej energetike	46
	Zhrnutie kapitoly	48
	Kontrolné otázky	48
	Úlohy na precvičenie	49
II	Kinematika a bilančné zákony	51
4	Kinematika prúdenia	53
4.1	Eulerovský a lagrangeovský opis	53
4.2	Rýchlostné pole	55
4.3	Prúdnice, trajektórie a dráhy častíc	55
4.4	Ustálené a neustálené prúdenie	56
4.5	Rovnomerné a nerovnomerné prúdenie	56
4.6	Jednorozmerná aproximácia	57
4.7	Objemový prietok	58
4.8	Hmotnostný prietok	58

4.9	Stredná prierezová rýchlosť	59
4.10	Rýchlostné profily	59
4.11	Základy rotácie a vírivosti	62
	Zhrnutie kapitoly	63
	Kontrolné otázky	64
	Úlohy na precvičenie	64
5	Zákon zachovania hmotnosti	65
5.1	Fyzikálny význam zachovania hmotnosti	65
5.2	Kontrolný objem	66
5.3	Všeobecná hmotnostná bilancia	66
5.4	Ustálené prúdenie	67
5.5	Nestlačiteľná tekutina	68
5.6	Rovnica kontinuity v potrubí	68
5.7	Rozdeľovanie a spájanie prúdov	69
5.8	Akumulácia hmotnosti	71
5.9	Plnenie a vyprázdňovanie zásobníkov	71
5.10	Hmotnostná bilancia energetických zariadení	72
	Zhrnutie kapitoly	74
	Kontrolné otázky	75
	Úlohy na precvičenie	75
6	Energia prúdiacej tekutiny a Bernoulliho rovnica	77
6.1	Formy energie tekutiny	77
6.2	Tlaková, kinetická a potenciálna energia	78
6.3	Energia na jednotku hmotnosti a jednotku tiaže	78
6.4	Mechanická energetická bilancia	79
6.5	Bernoulliho rovnica	80
6.6	Predpoklady Bernoulliho rovnice	81
6.7	Fyzikálna interpretácia jednotlivých členov	81
6.8	Statický, dynamický a celkový tlak	82
6.9	Energetická a piezometrická výška	82
6.10	Čerpadlo v energetickej rovnici	83
6.11	Turbína v energetickej rovnici	84
6.12	Energetické straty	84
6.13	Čiara energetickej výšky (EGL)	85
6.14	Piezometrická čiara (HGL)	85

6.15	Výtok z nádrže	86
6.16	Venturiho trubica a meranie prietoku	87
6.17	Rozšírená energetická rovnica pre technické systémy	88
6.18	Aplikácia v OZE: solárny termický okruh	88
	Zhrnutie kapitoly	89
	Kontrolné otázky	90
	Úlohy na precvičenie	90
7	Zákon zachovania hybnosti	93
7.1	Hybnosť tekutiny	93
7.2	Impulz sily	94
7.3	Bilancia hybnosti kontrolného objemu	94
7.4	Jednorozmerná rovnica hybnosti	95
7.5	Reakcia prúdu na potrubie	96
7.6	Sily v kolenách potrubia	96
7.7	Dýzy a prúdy kvapaliny	97
7.8	Náraz prúdu na dosku	98
7.9	Zmena smeru prúdu na lopatke	99
7.10	Moment hybnosti – základná myšlienka	100
7.11	Väzba na hydraulické turbíny	101
	Zhrnutie kapitoly	102
	Kontrolné otázky	102
	Úlohy na precvičenie	103
III	Reálne tekutiny a prúdenie v potrubiach	105
8	Reálne tekutiny a viskózne prúdenie	107
8.1	Ideálna a reálna tekutina	107
8.2	Viskozita a šmykové napätie	108
8.3	Newtonov zákon viskozity	109
8.4	Rýchlostný gradient	109
8.5	Prúdenie medzi doskami	109
8.6	Couettovo prúdenie	110
8.7	Poiseuilleovo prúdenie	111
8.8	Viskózna disipácia energie	112
8.9	Okrajová podmienka ulpievania (no-slip)	113

8.10	Diferenciálna bilancia hybnosti – fyzikálny význam	114
8.11	Navierove–Stokesove rovnice	114
8.12	Interpretácia členov Navierových–Stokesových rovníc	115
8.13	Kedy možno jednotlivé členy zanedbať	115
	Zhrnutie kapitoly	116
	Kontrolné otázky	117
	Úlohy na precvičenie	117
9	Laminárne a turbulentné prúdenie	119
9.1	Reynoldsov experiment	120
9.2	Reynoldsovo číslo	121
9.3	Laminárne prúdenie	122
9.4	Prechodová oblasť	122
9.5	Turbulentné prúdenie	123
9.6	Fluktuácie rýchlosti	125
9.7	Časová stredná hodnota a Reynoldsov rozklad	126
9.8	Turbulentné miešanie	127
9.9	Rýchlostný profil pri stene	129
9.10	Hydrodynamická medzná vrstva v potrubí	132
9.11	Hydraulicky hladké a drsné povrchy	133
9.12	Energetické dôsledky turbulencie	134
	Zhrnutie kapitoly	136
	Kontrolné otázky	136
	Úlohy na precvičenie	137
10	Prúdenie v potrubíach a tlakové straty	139
10.1	Geometria potrubného systému	140
10.2	Hydraulický priemer	140
10.3	Plne vyvinuté prúdenie	141
10.4	Tlakový gradient v potrubí	142
10.5	Darcyho–Weisbachova rovnica	143
10.6	Darcyho súčiniteľ trenia λ	143
10.7	Laminárne prúdenie: $\lambda = 64/Re$	144
10.8	Relatívna drsnosť	144
10.9	Colebrookova–Whiteova rovnica	144
10.10	Moodyho diagram	146
10.11	Explicitné aproximácie súčiniteľa trenia	146

10.12	Výpočet tlakovej straty	147
10.13	Výpočet stratovej výšky	149
10.14	Potrebný čerpací výkon	149
10.15	Návrh priemeru potrubia	150
10.16	Ekonomická rýchlosť prúdenia	151
10.17	Vplyv priemeru na energetickú spotrebu	152
10.18	Aplikácia v OZE: potrubie tepelného systému	153
	Zhrnutie kapitoly	154
	Kontrolné otázky	154
	Úlohy na precvičenie	155
11	Miestne hydraulické odpory	157
11.1	Mechanizmus miestnej straty	158
11.2	Súčiniteľ miestneho odporu ζ	158
11.3	Náhle rozšírenie	159
11.4	Náhle zúženie	160
11.5	Vstup a výstup z potrubia	160
11.6	Kolená	162
11.7	T-kusy a odbočky	162
11.8	Ventily a armatúry	163
11.9	Metóda ekvivalentnej dĺžky	164
11.10	Súčet miestnych a dĺžkových strát	165
11.11	Praktické údaje výrobcov	165
11.12	Kedy miestne odpory nemožno zanedbať	166
	Zhrnutie kapitoly	167
	Kontrolné otázky	167
	Úlohy na precvičenie	168
12	Potrubné siete	169
12.1	Potrubia v sérii	170
12.2	Paralelné potrubia	170
12.3	Uzlová bilancia prietoku	171
12.4	Tlakové pomery v sieti	172
12.5	Charakteristika potrubného systému	173
12.6	Rozvetvené siete	173
12.7	Iteračné riešenie siete	175
12.8	Základy Hardyho Crossovej metódy	175

12.9	Hydraulické vyvažovanie	176
12.10	Regulačné ventily	177
12.11	Vplyv zmeny prevádzkového stavu	178
12.12	Tepelné a distribučné siete	179
12.13	Digitálny výpočet potrubnej siete	180
	Zhrnutie kapitoly	181
	Kontrolné otázky	181
	Úlohy na precvičenie	182
IV	Hydraulické stroje a energetické systémy	183
13	Čerpadlá a čerpace systémy	185
13.1	Úloha čerpadla v energetickom systéme	186
13.2	Základné druhy čerpadiel	186
13.3	Odstredivé čerpadlo	187
13.4	Dopravná výška čerpadla	188
13.5	Charakteristika $H(Q)$	188
13.6	Výkon čerpadla	189
13.7	Hydraulický, mechanický a elektrický výkon	190
13.8	Účinnosť čerpadla	190
13.9	Bod maximálnej účinnosti (BEP)	190
13.10	Čerpadlo a charakteristika systému	191
13.11	Pracovný bod	191
13.12	Čerpadlá zapojené v sérii	192
13.13	Čerpadlá zapojené paralelne	192
13.14	Afinitné zákony	192
13.15	Regulácia škrtením	193
13.16	Regulácia otáčkami	194
13.17	Energetické porovnanie spôsobov regulácie	194
13.18	Kavitácia	195
13.19	NPSH	195
13.20	Výber čerpadla z katalógových údajov	197
13.21	Celoročná spotreba elektrickej energie	198
13.22	Čerpadlá v solárnych a tepelných systémoch	198
	Zhrnutie kapitoly	199
	Kontrolné otázky	200
	Úlohy na precvičenie	200

14	Hydraulické turbíny a malé vodné elektrárne	203
14.1	Vodná energia a hydroenergetický potenciál toku	204
14.2	Hrubý a čistý spád, straty v privádzači	204
14.3	Výkon a účinnosť vodnej elektrárne	205
14.4	Eulerova turbínová rovnica	205
14.5	Rýchlostné trojuholníky	206
14.6	Rovnotlakové a pretlakové turbíny	206
14.7	Peltonova turbína	207
14.8	Francisova turbína	207
14.9	Kaplanova a vrtuľová turbína	208
14.10	Bánkiho turbína a stroje pre malé spády	208
14.11	Merné otáčky a výber typu turbíny	208
14.12	Charakteristiky a účinnosť pri čiastočnom zaťažení	209
14.13	Kavitácia v turbínach a sacia výška	210
14.14	Prúdenie s voľnou hladinou v náhonoch	211
14.15	Prepady a meranie prietoku v tokoch	213
14.16	Čerpadlová prevádzka a prečerpávacie elektrárne	213
14.17	Čiara prekročenia prietokov a ročná výroba MVE	214
	Zhrnutie kapitoly	216
	Kontrolné otázky	216
	Úlohy na precvičenie	217
15	Prúdenie plynov a ventilátory	219
15.1	Rozdiely medzi kvapalinou a plynom	219
15.2	Stavová rovnica ideálneho plynu	220
15.3	Hustota vzduchu	221
15.4	Rýchlosť zvuku	221
15.5	Machovo číslo	222
15.6	Kritérium nestlačiteľného modelu	222
15.7	Energetická rovnica pre prúdenie plynu	222
15.8	Tlakové straty vo vzduchovodoch	223
15.9	Nekruhové kanály vo vzduchotechnike	224
15.10	Ventilátory	225
15.11	Charakteristika ventilátora a systému	226
15.12	Výkon a účinnosť ventilátora	226
15.13	Základy stlačiteľného prúdenia	227

15.14 Prúdenie dýzou – kvalitatívne vysvetlenie	227
15.15 Aplikácie vo vzduchotechnike a energetike	228
Zhrnutie kapitoly	229
Kontrolné otázky	230
Úlohy na precvičenie	230
A Zoznam symbolov	233
B Fyzikálne vlastnosti tekutín	237
Literatúra	239

Časť I

Základy

Kapitola 1

Úvod do prúdenia kvapalín a plynov

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent dokáže identifikovať úlohu mechaniky tekutín v energetickom systéme a zostaviť prvý jednoduchý fyzikálny model: vymedziť systém alebo kontrolný objem, pomenovať potrebné veličiny, zvoliť zjednodušujúce predpoklady a overiť výsledok odhadom rádu veličín.

Kľúčové pojmy

tekutina, kvapalina, plyn, hypotéza kontinua, systém, kontrolný objem, hranica systému, pole veličiny, ustálený a neustálený dej, jednorozmerný model, hydraulický výkon, pomocné energie

Takmer každé zariadenie na využívanie obnoviteľných zdrojov energie pracuje s prúdiacou tekutinou. V slnečnom kolektore prúdi teplotonosná kvapalina, ktorá odvádza teplo z absorbéra. Vodná turbína premieňa energiu vody na mechanickú prácu. Listy veternej turbíny sú obtekané vzduchom. Tepelné čerpadlo odoberá teplo z pôdy prostredníctvom nemrznúcej zmesi a odovzdáva ho vode vo vykurovacom systéme. Bioplynová stanica pracuje s plynom, ktorý treba dopraviť, vyčistiť a spáliť.

V týchto zariadeniach má mechanika tekutín dve úlohy. Popisuje *premenu energie*, napríklad v turbíne alebo v rotore veternej elektrárne. Určuje aj *energiiu, ktorú treba vynaložiť na dopravu tekutiny*, teda príkon čerpadiel a ventilátorov. Druhá úloha sa na prvý pohľad zdá menej dôležitá, v praxi však často rozhoduje o tom, či je zariadenie ekonomicky a energeticky výhodné.

Na zamyslenie

Solárny termický systém rodinného domu dodá počas slnečného dňa niekoľko kilowattov tepla. Obehové čerpadlo má príkon len niekoľko desiatok wattov. Oplatí sa vôbec zaoberať prúdením v takomto okruhu? A čo sa stane, ak projektant zvolí o jednu dimenziu menšie potrubie alebo príliš vysokú koncentráciu glykolu?

Kapitola nemá za cieľ odvodzovať rovnice. Tie sú obsahom ďalších kapitol. Chceme vytvoriť *spoločný jazyk*: pojmy, veličiny a postup, ktorý budeme v celej knihe opakovane používať. Podrobnejší výklad základných pojmov nájde čitateľ v učebniciach [1, 2, 4, 5].

1.1 Tekutiny v energetických systémoch

Energetický systém je súbor zariadení, ktoré energiu získavajú, premieňajú, dopravujú, uchovávajú a odovzdávajú spotrebiteľovi. Tekutina v ňom môže mať tri odlišné úlohy:

1. **Nosič energie (teplonosné médium).** Tekutina prenáša teplo z miesta zisku na miesto spotreby. Príkladmi sú voda v tepelnej sieti, zmes vody a glykolu v solárnom okruhu a vzduch vo vzduchotechnike. Prenesený tepelný tok závisí od hmotnostného prietoku $\dot{m}$ a od rozdielu teplôt ΔT medzi prívodom a spiatočkou:

$$\dot{Q}_t = \dot{m} c_p \Delta T. \quad (1.1)$$

2. **Zdroj mechanickej energie.** Energia prúdiacej vody alebo vzduchu sa v turbíne premieňa na mechanickú prácu a potom na elektrinu. Príkladom je vodná a veterná elektrárňa.
3. **Pracovná látka tepelného obehu.** Tekutina mení skupenstvo a vykonáva termodynamický obeh. Príkladmi sú chladivo v tepelnom čerpadle a vodná para v parnom obehu biomasovej teplárne.

Vo všetkých troch prípadoch treba tekutinu *dopraviť*. Pri prúdení reálnej tekutiny sa časť mechanickej energie nevratne mení na teplo (kap. 8). Túto stratu musí nahradiť čerpadlo alebo ventilátor. Potrebný hydraulický výkon je súčinom objemového prietoku Q a tlakového rozdielu Δp , ktorý musí stroj vytvoriť:

$$P_h = Q \Delta p. \quad (1.2)$$

Elektrický príkon je väčší, pretože čerpadlo, motor a menič majú účinnosť menšiu ako 1:

$$P_{el} = \frac{Q \Delta p}{\eta_c}, \quad \eta_c = \eta_\zeta \eta_{mot} \eta_m. \quad (1.3)$$

Vzťahy (1.2) a (1.3) podrobne odvodíme v kap. 6 a 13. Na tomto mieste stačí vedieť, že spájajú *hydrauliku* (prietok a tlakovú stratu) s *energetikou* (spotrebou elektriny).

Na obr. 1.1 je schéma solárneho termického okruhu na prípravu teplej vody [6]. Číslo v krúžkoch označujú miesta, kde projektant potrebuje poznatky z mechaniky tekutín.

Príklad 1.1 – Prietok a príkon čerpadla v solárnom okruhu

Kolektorové pole odovzdáva teplonosnej kvapaline užitočný tepelný tok $\dot{Q}_t = 10 \text{ kW}$. Teplonosnou kvapalinou je zmes vody a propylénglykolu s hustotou $\rho = 1\,040 \text{ kg/m}^3$ a mernou tepelnou kapacitou $c_p = 3,8 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$. Rozdiel teplôt medzi výstupom a vstupom kolektora je $\Delta T = 8 \text{ K}$. Celková tlaková strata okruhu je $\Delta p = 40 \text{ kPa}$ a celková účinnosť čerpadla aj s motorom je $\eta_c = 0,25$. Určte objemový prietok a elektrický príkon čerpadla. Porovnajte príkon čerpadla s dodávaným teplom.

Riešenie. Z rovnice (1.1) vypočítame hmotnostný prietok:

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_t}{c_p \Delta T} = \frac{10\,000}{3\,800 \cdot 8} = 0,329 \text{ kg/s}.$$

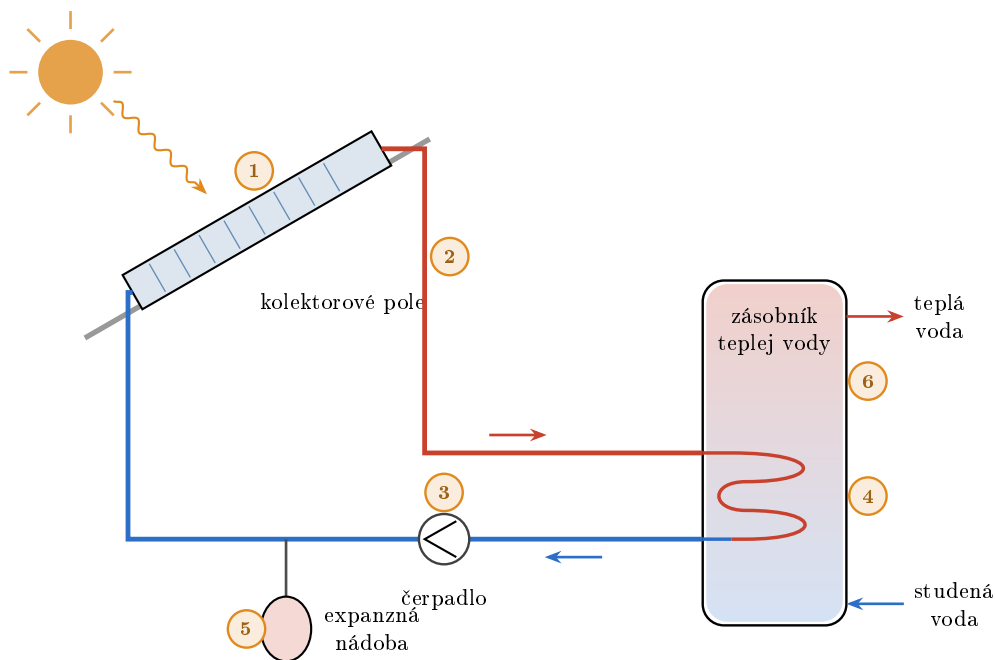
Objemový prietok je

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{0,329}{1040} = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \approx 1,14 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Hydraulický a elektrický výkon vypočítame podľa (1.2) a (1.3):

$$P_h = Q \Delta p = 3,16 \cdot 10^{-4} \cdot 40\,000 = 12,7 \text{ W}, \quad P_{el} = \frac{P_h}{\eta_c} = \frac{12,7}{0,25} \approx 51 \text{ W}.$$

Pomer dodaného tepla a spotrebovanej elektriny je $10\,000/51 \approx 200$. Na prvý pohľad je spotreba čerpadla zanedbateľná. Čerpadlo však beží aj pri slabom slnečnom žiarení, keď kolektor dodáva oveľa menej tepla. Elektrina má navyše vyššiu „hodnotu“ ako nízko teplotné teplo. V odd. 1.9 ukážeme, že pri nevhodne navrhnutom potrubí môže príkon čerpadla stúpnuť niekoľkonásobne. ■



Obr. 1.1. Solárny termický okruh na prípravu teplej vody. Miesta, kde vstupuje mechanika tekutín: (1) rozdelenie prietoku medzi rúrky absorbéra a tlaková strata kolektora [7], (2) tlakové straty v potrubí a armatúrach (kap. 10 a 11), (3) obehové čerpadlo a jeho pracovný bod (kap. 13), (4) prúdenie vo výmenníku, kde režim prúdenia ovplyvňuje prestup tepla (kap. 9), (5) expanzná nádoba a tlakové pomery v okruhu (kap. 3), (6) teplotné vrstvenie v zásobníku, ktoré závisí od hustoty vody (kap. 2).

1.2 Kvapaliny a plyny ako pracovné médiá

Čo je tekutina

Tuhé teleso sa pri pôsobení šmykovej sily deformuje len obmedzene a po odľahčení sa (v pružnej oblasti) vráti do pôvodného tvaru. *Tekutina* je látka, ktorá sa pri pôsobení akokoľvek malého šmykového napätia *trvalo a neustále deformuje*, teda prúdi [1]. Tekutina v pokoji preto nemôže prenášať šmykové napätie. Na steny nádoby pôsobí iba kolmým tlakom. Tento poznatok využijeme v hydrostatike (kap. 3).

Tekutiny delíme na *kvapaliny* a *plyny*. Rozdiely, ktoré sú dôležité pre technickú prax, sumarizuje tab. 1.1.

Opačnú závislosť viskozity od teploty vysvetlíme v kap. 2. Pre prax z nej vyplýva, že *studená* kvapalina má väčšie tlakové straty ako teplá. Pri vzduchu je to naopak.

Tabuľka 1.1. Porovnanie kvapalín a plynov z hľadiska mechaniky tekutín (orientačné hodnoty pri 20 °C a 101,3 kPa).

Vlastnosť	Kvapalina (voda)	Plyn (vzduch)
hustota	$\approx 998 \text{ kg/m}^3$	$\approx 1,2 \text{ kg/m}^3$
stlačiteľnosť	veľmi malá, v hydraulike ju väčšinou zanedbávame	veľká, hustota sa mení s tlakom a teplotou
voľná hladina	vytvára	nevytvára, vyplňa celý priestor
dynamická viskozita	$\approx 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	$\approx 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
vplyv teploty na viskozitu	s rastúcou teplotou klesá	s rastúcou teplotou rastie
typické rýchlosti v technike	0,3 m/s až 3 m/s	2 m/s až 20 m/s

Hypotéza kontinua

Tekutina sa skladá z molekúl, medzi ktorými je prázdny priestor. Pri technických výpočtoch sa na túto štruktúru nepozierame. Tekutinu považujeme za *kontinuum*, teda za látku, ktorá spojitou vyplňa priestor. Každému bodu potom môžeme priradiť hustotu, tlak, teplotu a rýchlosť. Takýto opis je oprávnený, ak sú charakteristické rozmery úlohy (priemer rúrky, hrúbka lopatky) oveľa väčšie ako stredná voľná dráha molekúl. Napríklad pre kyslík pri tlaku 1 atm a teplote 20 °C je stredná voľná dráha približne $6,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ [1]. V energetických zariadeniach je preto hypotéza kontinua vždy splnená. Porušuje sa napríklad v silne zriedených plynch alebo v nanokanáloch.

Pracovné médiá v OZE

Prehľad tekutín, s ktorými sa v obnoviteľnej energetike stretneme najčastejšie, je v tab. 1.2. Ich vlastnosti podrobnejšie rozoberá kap. 2 a príl. B.

Tabuľka 1.2. Typické pracovné tekutiny v zariadeniach OZE.

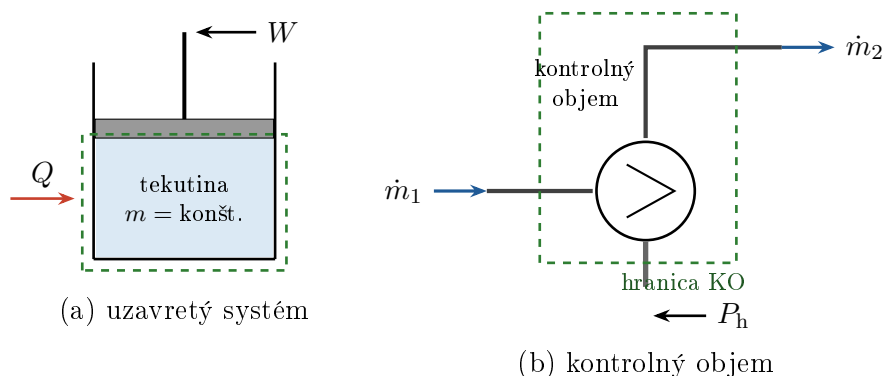
Tekutina	Zariadenie	Typická otázka
voda	vodná elektráreň, tepelná sieť, zásobník	výkon, tlakové straty, tlak v sieti
zmes voda–glykol	solárny okruh, zemný kolektor tepelného čerpadla	viskozita pri nízkej teplote, príkon čerpadla
vzduch	veterná turbína, vzduchové kolektory, vetranie s rekuperáciou	výkon vetra, straty vo vzduchovodoch
chladivo (dvojfázové)	tepelné čerpadlo	prúdenie s varom a kondenzáciou
vodná para	parný obeh biomasovej teplárne	stlačiteľné prúdenie, turbína
bioplyn, zemný plyn, vodík	bioplynová stanica, plynovody	stlačiteľnosť, tlakové straty
geotermálna voda (soľanka)	geotermálny vrt	zmena hustoty s teplotou, korózia
organické pracovné látky	ORC jednotky pri geotermálnych zdrojoch, biomase a odpadovom teple [8]	vlastnosti pár, expandér, výmenníky

1.3 Systém, kontrolný objem a hranica systému

Pred každým výpočtom musíme presne určiť, čo skúmame. V mechanike tekutín na to slúžia dva prístupy (obr. 1.2).

Systém (uzavretý systém) je vymedzené *množstvo hmoty*. Hmotnosť systému je konštantná a jeho hranica sa môže pohybovať a deformovať. Týmto spôsobom sa obvykle opisuje plyn vo valci s piestom v termodynamike.

Kontrolný objem (KO) je vymedzená *oblasť priestoru*. Tekutina cez jeho hranicu voľne vteká a vyteká. Hranica kontrolného objemu sa nazýva *kontrolná plocha*. Takmer všetky technické zariadenia s prúdiacou tekutinou (čerpadlo, turbína, výmenník, úsek potrubia) opisujeme pomocou kontrolného objemu.



Obr. 1.2. (a) Uzavretý systém: hmotnosť je konštantná a cez hranicu prechádza len teplo Q a práca W . (b) Kontrolný objem okolo čerpadla: tekutina cez hranicu vteká ($\dot{m}_1$) aj vyteká ($\dot{m}_2$) a hriadeľom sa privádza výkon P_h .

Všetky zákony zachovania (hmotnosti, hybnosti a energie) budeme pre kontrolný objem zapisovať v rovnakom tvare:

$$\underbrace{\frac{dB_{KO}}{dt}}_{\text{akumulácia}} = \underbrace{\sum \dot{B}_{\text{vstup}}}_{\text{prítok}} - \underbrace{\sum \dot{B}_{\text{vstup}}}_{\text{odtok}} + \underbrace{\dot{B}_{\text{zdroj}}}_{\text{vznik (zánik)}}, \quad (1.4)$$

kde B je bilancovaná veličina (hmotnosť, hybnosť alebo energia) a $\dot{B}$ je jej tok. Rovnica (1.4) hovorí len to, že nič sa nestratí bez stopy: to, čo do objemu vtečie a nevytečie, sa v ňom nahromadí. Hmotnosť nevzniká ani nezánika, preto pri bilancii hmotnosti je zdrojový člen nulový (kap. 5). Pri bilancii hybnosti hrajú úlohu „zdroja“ vonkajšie sily (kap. 7). Pri bilancii mechanickej energie sú to práca čerpadla alebo turbíny a straty (kap. 6).

Pozor – častá chyba

Najčastejšou príčinou chybného výsledku nie je chyba vo výpočte, ale nejasne zvolená hranica kontrolného objemu. Hranicu vždy zakreslite do schémy. Vstupné a výstupné prierezy voľte kolmo na smer prúdenia a tam, kde poznáte tlak, rýchlosť alebo výšku. Príkladom je voľná hladina v nádrži alebo výstup do atmosféry.

1.4 Základné veličiny mechaniky tekutín

V celej knihe používame Medzinárodnú sústavu jednotiek SI. Tab. 1.3 obsahuje veličiny, ktoré sa vyskytujú takmer v každom výpočte. Úplný zoznam symbolov je v príl. A.

Tabuľka 1.3. Základné veličiny mechaniky tekutín.

Veličina	Symbol	Jednotka SI	Poznámka
hustota	ρ	kg/m^3	$\rho = m/V$
tlak	p	$\text{Pa} = \text{N/m}^2$	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
rýchlosť	$v, \mathbf{v}$	m/s	vektor
objemový prietok	Q	m^3/s	$Q = A v$
hmotnostný prietok	$\dot{m}$	kg/s	$\dot{m} = \rho Q$
teplota	T, t	$\text{K}, ^\circ\text{C}$	$T = t + 273,15$
dynamická viskozita	μ	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	
kinematická viskozita	ν	m^2/s	$\nu = \mu/\rho$
výška, spád	h, H	m	energia na jednotku tiaže
výkon	P	W	

V hydraulike sa tlak často vyjadruje ako *výška stĺpca kvapaliny*. Je to výška, ktorú by stĺpec kvapaliny s hustotou ρ dosiahol pôsobením tlaku p :

$$h = \frac{p}{\rho g}. \quad (1.5)$$

Takýto zápis má fyzikálny význam energie na jednotku tiaže ($\text{J/N} = \text{m}$). Umožňuje priamo porovnávať tlak, rýchlosť a geodetickú výšku (kap. 6). Výrobcovia čerpadiel preto uvádzajú dopravnú výšku v metroch a hydroenergetici hovoria o spáde v metroch.

Príklad 1.2 – Tlak v okruhu ako výška vodného stĺpca

Manometer v kotolni ukazuje pretlak $p_e = 2,5 \text{ bar}$. Atmosférický tlak je $p_a = 101,3 \text{ kPa}$. Určte absolútny tlak a pretlak vyjadrený ako výška vodného stĺpca ($\rho = 998 \text{ kg/m}^3$).

Riešenie. Absolútny tlak je $p = p_a + p_e = 101,3 + 250 = 351,3 \text{ kPa}$. Pretlak vyjadrený výškou vodného stĺpca je

$$h = \frac{p_e}{\rho g} = \frac{250\,000}{998 \cdot 9,81} = 25,5 \text{ m}.$$

Pretlak 1 bar teda zodpovedá približne 10 m vodného stĺpca. Toto číslo je dobré si zapamätať. Ak je najvyšší bod vykurovacej sústavy 12 m nad manometrom, je v ňom pretlak len asi 1,3 bar. ■

Pozor – častá chyba

Vo vzorcoch sa používa *absolútny* tlak vždy, keď tlak vystupuje v stavovej rovnici plynu alebo keď ho porovnávame s tlakom nasýtených pár (kavitácia). Pri rozdieloch tlakov a tlakových stratách je jedno, či počítame s absolútnym tlakom alebo s pretlakom.

1.5 Pole tlaku, rýchlosti, hustoty a teploty

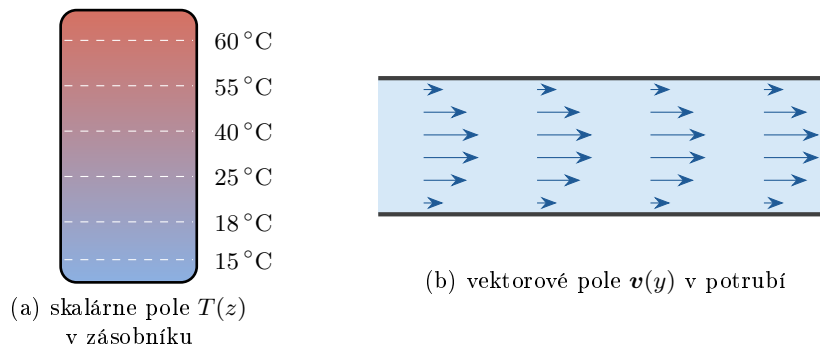
Na základe hypotézy kontinua má každá veličina v každom bode priestoru a v každom okamihu určitú hodnotu. Takéto rozloženie nazývame *pole*.

- *Skalárne pole* priradzuje bodu jedno číslo, napr. tlak $p(x, y, z, t)$, hustotu $\rho(x, y, z, t)$ alebo teplotu $T(x, y, z, t)$.
- *Vektorové pole* priradzuje bodu vektor, napr. rýchlosť $\mathbf{v}(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z)$.

Rýchlosť tekutiny sa v priereze potrubia mení. Pri stene je nulová, pretože tekutina na stene ulpieva (kap. 8), a najväčšia je v osi potrubia (obr. 1.5a). V inžinierskych výpočtoch nás však zaujíma najmä *prietok* a *stredná prierezová rýchlosť* $v = Q/A$. V kap. 4 presne vysvetlíme, ako súvisí s lokálnou rýchlosťou.

Príklady skalárneho a vektorového poľa sú na obr. 1.3.

Pole teploty ovplyvňuje pole rýchlosti prostredníctvom vlastností média. S teplotou sa mení hustota aj viskozita. V zásobníku teplej vody má teplá voda menšiu hustotu ako studená, preto zostáva hore a vytvára teplotné vrstvy (miesto 6 na obr. 1.1). Vo veternej energetike rastie rýchlosť vetra s výškou nad terénom (obr. 1.9). Pole rýchlosti preto ovplyvňuje, v akej výške sa oplatí umiestniť rotor.



Obr. 1.3. (a) Skalárne pole teploty v zásobníku s teplotným vrstvením, (b) vektorové pole rýchlosti v potrubí: rýchlosť sa mení od nuly pri stene po maximum v osi.

1.6 Ustálené a neustálené deje

Dej je *ustálený* (stacionárny), ak sa veličiny v danom bode priestoru s časom nemenia:

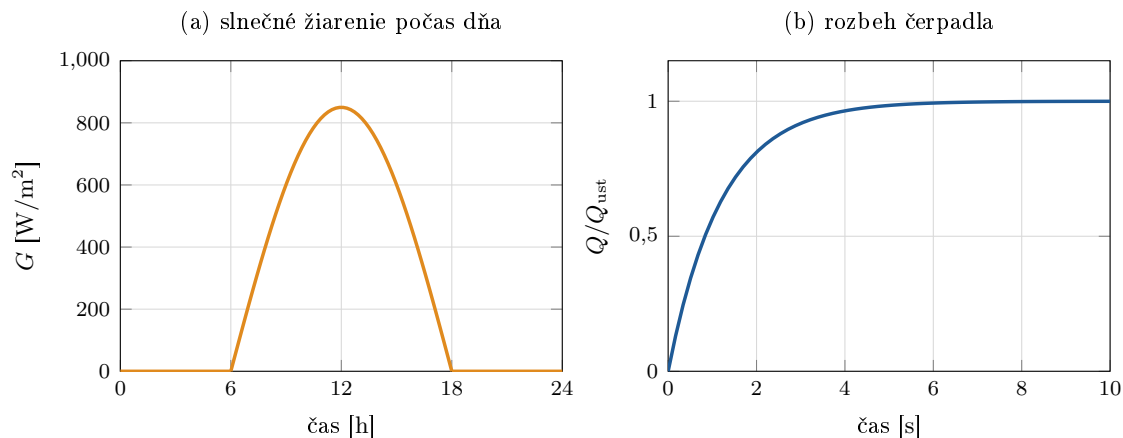
$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

Ustálený neznamená nehybný. Tekutina sa pohybuje, ale v každom bode má stále rovnakú rýchlosť. V opačnom prípade hovoríme o *neustálenom* (nestacionárnom) deji.

Skutočné zariadenia OZE pracujú prakticky vždy v neustálenom režime. Slnečné žiarenie sa mení počas dňa, rýchlosť vetra kolíše v sekundách až hodinách [9] a prietok rieky sa mení podľa ročného obdobia. Napriek tomu väčšinu výpočtov robíme ako *kvázistacionárne*. Neustálený dej nahradíme postupnosťou ustálených stavov. Takýto postup je oprávnený, ak sa okrajové podmienky menia pomaly v porovnaní s časom, za ktorý sa prúdenie v zariadení ustáli. Obehové čerpadlo solárneho okruhu sa po zmene otáčok ustáli za niekoľko sekúnd, kým intenzita žiarenia sa mení v minútach až hodinách (obr. 1.4).

Neustálené javy však nemôžeme zanedbať pri rýchlych zmenách, napríklad:

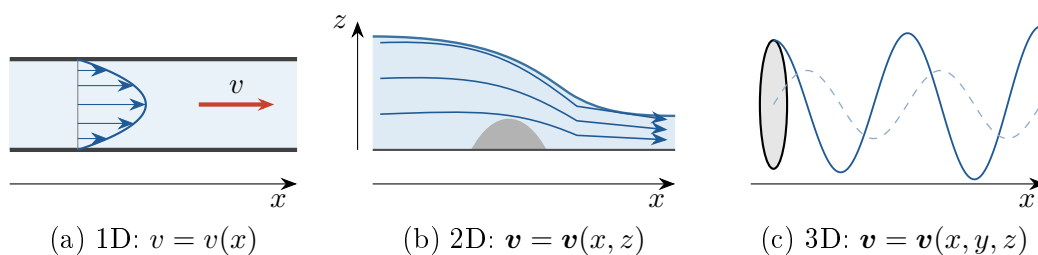
- pri náhlom uzavretí ventilu alebo odstavení turbíny, keď vzniká tlaková vlna (hydraulický ráz),
- pri nábehu a dobehu čerpadiel,
- pri plnení a vyprázdňovaní zásobníkov (kap. 5),
- pri turbulentnom prúdení, kde rýchlosť v bode neustále kolíše (kap. 9).



Obr. 1.4. Porovnanie časových škál: (a) intenzita slnečného žiarenia sa mení počas hodín, (b) prúdenie v okruhu sa po zmene otáčok čerpadla ustáli za niekoľko sekúnd. Preto možno okruh počítať kvázistacionárne.

1.7 Jednorozmerné, dvojrozmerné a trojrozmerné modely

Skutočné prúdenie je vždy trojrozmerné. Počet rozmerov modelu je *rozhodnutie modelára* a závisí od toho, akú informáciu potrebujeme (obr. 1.5).



Obr. 1.5. Počet rozmerov modelu: (a) jednorozmerný model potrubia so strednou rýchlosťou v , (b) dvojrozmerný model prúdenia cez prepad v pozdĺžnom reze, (c) trojrozmerný model úplavu za rotorom veternej turbíny.

Jednorozmerný (1D) model pracuje so strednými hodnotami veličín v priereze, ktoré sa menia len pozdĺž jednej súradnice (dĺžky potrubia alebo prúdnice). Na tomto modeli stojí takmer celá technická hydraulika: rovnica kontinuity, Bernoulliho rovnica, výpočet tlakových strát aj potrubných sietí. Je jednoduchý a pri dobre zvolených empirických súčiniteľoch (trenie, miestne straty) aj prekvapivo presný.

Dvojrozmerný (2D) model je vhodný, ak sa veličiny výrazne menia v dvoch smeroch a v treťom smere je prúdenie približne rovnaké. Takto možno opísať prúdenie cez dlhý prepad, obtekanie profilu lopatky v priereze alebo prúdenie v plytkej nádrži. V hydraulike otvorených korýt sa bežne kombinujú 1D modely toku s 2D modelmi inundačných území [10].

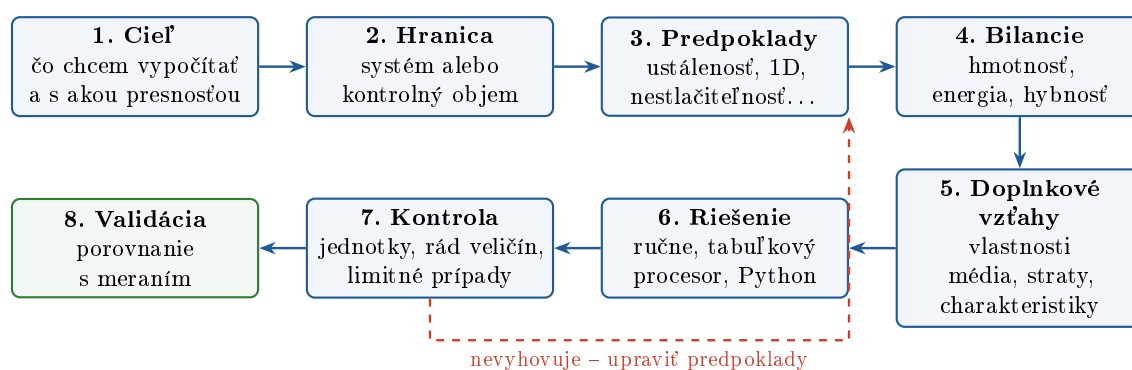
Trojrozmerný (3D) model je nevyhnutný pri zložitej geometrii a pri úlohách, v ktorých nás zaujíma lokálne rozloženie rýchlostí. Príkladmi sú obtekanie listu veternej turbíny, prúdenie v obežnom kolese čerpadla alebo vetranie budovy. Takéto úlohy sa riešia numericky, metódami CFD (*Computational Fluid Dynamics*) [11]. Aj pri malých vodných turbínach sa dnes 3D simulácie bežne používajú. Výsledok však citlivo závisí od zvoleného modelu turbulencie [12, 13].

V tejto učebnici budeme pracovať prevažne s 1D modelmi. Viacrozmerné modely využijeme najmä na vysvetlenie fyzikálnej podstaty javov, ktoré potom do 1D modelu vnášame cez

empirické súčinitele.

1.8 Modelovanie reálneho zariadenia

Fyzikálny model je zjednodušený obraz skutočnosti, ktorý zachytáva podstatné javy a zanedbáva nepodstatné. Rovnaké zariadenie môžeme modelovať rôzne podrobne podľa toho, na čo model potrebujeme. Pri zostavovaní modelu budeme v celej knihe postupovať podľa schémy na obr. 1.6.



Obr. 1.6. Postup tvorby a overenia fyzikálneho modelu. Ak kontrola alebo porovnanie s meraním nevyhovuje, treba sa vrátiť k predpokladom.

Jednotlivé kroky:

1. **Cieľ.** Formulujeme otázku, napr. „aký výkon musí mať čerpadlo?“ alebo „koľko elektriny vyrobí turbína za rok?“. Určíme aj potrebnú presnosť. Predbežný návrh znesie chybu 20 %, pri garančnom meraní je neprípustná.
2. **Hranica.** Vyznačíme systém alebo kontrolný objem a jeho vstupy a výstupy (odd. 1.3).
3. **Predpoklady.** Rozhodneme, či je dej ustálený, či stačí 1D model, či je tekutina nestlačiteľná a či sa mení teplota. Predpoklady vždy zapíšeme. Neskôr ich musíme overiť.
4. **Bilancie.** Zapišeme zákony zachovania hmotnosti, energie, prípadne hybnosti v tvare (1.4).
5. **Doplnkové vzťahy.** Bilancie samotné nestačia. Potrebujeme vlastnosti média (hustota, viskozita), vzťahy pre straty (súčiniteľ trenia, miestne odpory) a charakteristiky strojov (krivka čerpadla).
6. **Riešenie.** Jednoduché úlohy riešime ručne, zložitejšie (iterácie, siete, ročné simulácie) v tabuľkovom procesore alebo v Pythone.
7. **Kontrola.** Overíme rozmerovú správnosť, rád výsledku a správanie v limitných prípadoch (napr. pri nulovom prietoku musí byť nulová aj tlaková strata).
8. **Validácia.** Ak je to možné, porovnáme výsledok s meraním alebo s údajmi výrobcu. Metódy merania tlaku, rýchlosti a prietoku opisujú [5, 14].

Poznámka

Model nie je „správny“ alebo „nesprávny“. Je *vhodný* alebo *nevhodný* na daný účel. 1D model potrubnej siete s presnosťou 10 % je pre návrh čerpadla lepší ako 3D model CFD, ktorého príprava trvá týždeň a výsledok sa od 1D modelu líši o 3 %.

1.9 Mechanika tekutín a energetická účinnosť

Čerpadlá a ventilátory v budovách, v priemysle, v tepelných sieťach a v zariadeniach OZE sú v prevádzke tisíce hodín ročne. Ich spotreba elektriny preto patrí medzi významné položky prevádzkových nákladov [15]. V energetickej bilancii zariadení OZE sa označuje ako spotreba *pomocných energií*. Znižuje čistý prínos zariadenia, napríklad čistú výrobu tepla solárneho systému alebo sezónny výkonový faktor tepelného čerpadla.

Príkon, ktorý treba na dopravu tekutiny, veľmi citlivo reaguje na prietok a rozmery potrubia. V kap. 10 ukážeme, že pri turbulentnom prúdení v danom potrubí je tlaková strata približne úmerná druhej mocnine prietoku. Z rovnice (1.2) potom vyplýva:

$$\Delta p \sim Q^2 \implies P_h = Q \Delta p \sim Q^3. \quad (1.7)$$

Závislosť tretej mocniny (obr. 1.7) je jedným z najdôležitejších kvalitatívnych poznatkov celého predmetu:

- zníženie prietoku o 20 % zníži hydraulický výkon takmer na polovicu ($0,8^3 \approx 0,51$),
- zdvojnásobenie prietoku v tom istom potrubí zvýši hydraulický výkon osemnásobne.

Podobne silno vplýva priemer potrubia. Pri konštantnom prietoku je tlaková strata v turbulentnej oblasti približne úmerná D^{-5} (kap. 10). Zmenšenie priemeru o jednu menovitú svetlosť, napr. z DN 25 na DN 20, preto môže tlakovú stratu viac ako zdvojnásobiť.

Príklad 1.3 – Úspora zníženým prietokom

Obehové čerpadlo tepelnej siete pracuje v menovitom stave s hydraulickým výkonom $P_{h,0} = 4,0 \text{ kW}$. V prechodnom období stačí prietok $Q = 0,8 Q_0$. Sieť je uzavretá (bez statickej výšky) a jej tlaková strata je úmerná Q^2 . Aký hydraulický výkon je potrebný pri zníženom prietoku, ak sa prietok zníži zmenou otáčok čerpadla?

Riešenie. Podľa (1.7) je

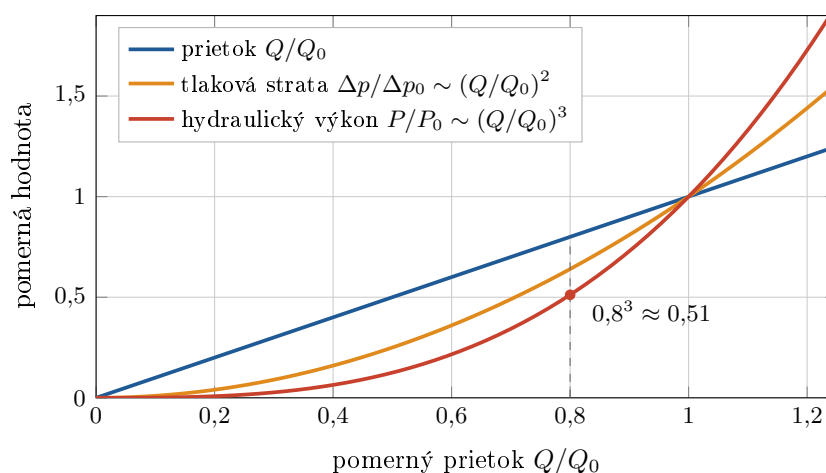
$$P_h = P_{h,0} \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^3 = 4,0 \cdot 0,8^3 = 2,05 \text{ kW}.$$

Hydraulický výkon klesne takmer o polovicu, hoci prietok klesol len o pätinu. Ak by sa prietok znížil privretím ventilu (škrtením) pri nezmenených otáčkach, čerpadlo by muselo prekonávať aj dodatočnú stratu na ventile a úspora by bola oveľa menšia. Spôsoby regulácie podrobne porovnáme v kap. 13. ■

Mechanika tekutín teda neslúži len na výpočet „či to potečie“. Je nástrojom na *znižovanie spotreby energie*: pomáha správne dimenzovať potrubie, voliť rýchlosť prúdenia, vyvažovať sieť a regulovať čerpadlá.

1.10 Aplikácie v OZE

Na záver kapitoly prejdeme hlavné technológie obnoviteľnej energetiky a ukážeme, ktoré časti tejto učebnice sú pre ne dôležité. Prehľad technológií poskytujú napr. [16–18].



Obr. 1.7. Pomerná tlaková strata a pomerný hydraulický výkon v závislosti od pomerného prietoku pre potrubný systém bez statickej výšky a s kvadratickou charakteristikou.

Vodná elektráreň

Vodná elektráreň využíva rozdiel polôh hladín hornej a dolnej vody (obr. 1.8). Výkon elektrárne je

$$P = \eta \rho g Q H, \quad (1.8)$$

kde Q je prietok turbínou, H je spád a η je celková účinnosť (straty v privádzači, turbíne, prevoze a generátore) [16, 19, 20]. Rovnica (1.8) je špeciálnym prípadom energetickej rovnice z kap. 6. Presné určenie čistého spádu, výber turbíny [21] a výpočet ročnej výroby sú obsahom kap. 14. Pri riečnych elektrárnach je súčasťou stupňa často hať. Jej hydraulický návrh je podrobne spracovaný v [22, 23].

Príklad 1.4 – Výkon malej vodnej elektrárne

Malá vodná elektráreň na rieke má spád $H = 6$ m a prietok turbínou $Q = 2$ m³/s. Celková účinnosť je $\eta = 0,82$. Určte elektrický výkon.

Riešenie. Podľa (1.8):

$$P = 0,82 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 6 = 96\,500 \text{ W} \approx 97 \text{ kW}.$$

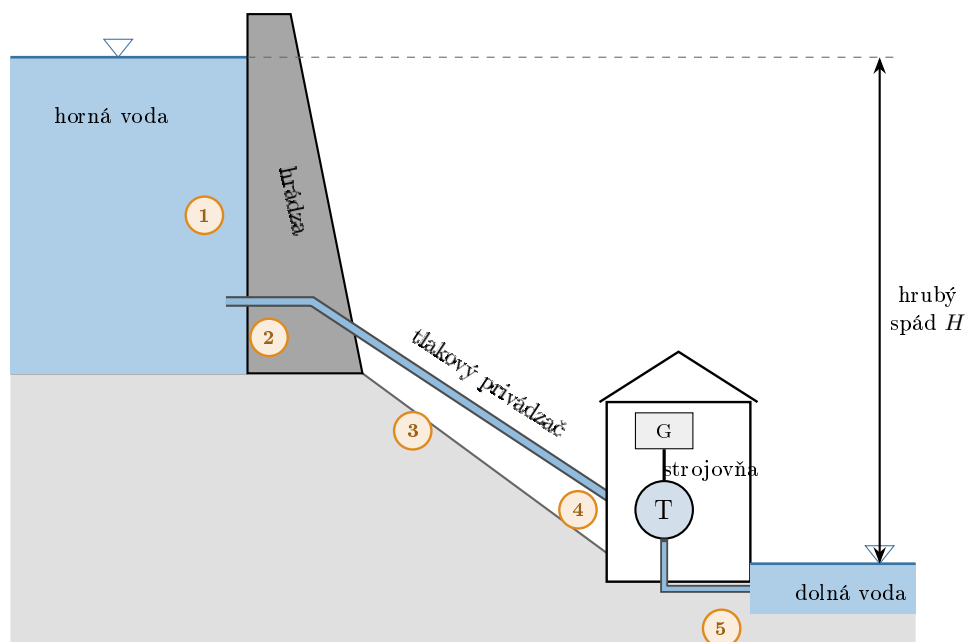
Pre porovnanie: rovnaký výkon by pri spáde 60 m dosiahla turbína s desaťkrát menším prietokom. Pri nízkom spáde sú preto potrebné veľké prietoky, a teda aj rozmerné stroje a objekty. ■

Veterná elektráreň

Veterná turbína odoberá časť kinetickej energie vzduchu, ktorý prúdi plochou rotora A . Výkon je

$$P = c_P \frac{1}{2} \rho A v_1^3, \quad (1.9)$$

kde v_1 je rýchlosť nenarušeného vetra a c_P je súčiniteľ výkonu [16, 24, 25]. Teoretická horná hranica súčiniteľa výkonu, tzv. Betzov limit, je $16/27 \approx 0,593$. Moderné veľké turbíny dosahujú hodnoty c_P okolo 0,45 až 0,50 [25]. Závislosť od tretej mocniny rýchlosti vysvetľuje, prečo je pri výbere lokality taký dôležitý presný odhad rýchlosti vetra. Vzduch prúdiaci cez rotor sa spomaľuje ($v_1 > v_2 > v_3$) a prúdová trubica sa preto rozširuje (obr. 1.9). Tento jav je



Obr. 1.8. Schéma malej vodnej elektrárne. Mechanika tekutín vstupuje: (1) pri výpočte hydrostatického zaťaženia hrádze a uzáverov (kap. 3), (2) na vtoku do privádzača, kde vzniká miestna strata (kap. 11), (3) v tlakovom privádzači, kde vznikajú straty trením (kap. 10), (4) v turbíne, kde sa mení hybnosť a moment hybnosti prúdu (kap. 7 a 14), (5) v savke, kde sa spätne získava kinetická energia a hrozí kavitácia (kap. 14).

dôsledkom zákona zachovania hmotnosti (kap. 5). Silu pôsobiacu na rotor určíme zo zákona zachovania hybnosti (kap. 7).

Príklad 1.5 – Citlivosť výkonu na rýchlosť vetra

Veterná turbína má priemer rotora $D = 80$ m a súčiniteľ výkonu $c_P = 0,45$. Hustota vzduchu je $\rho = 1,225$ kg/m³, čo je hodnota štandardnej atmosféry na úrovni mora [26]. Porovnajte výkon pri rýchlostiach vetra 6 m/s a 7 m/s.

Riešenie. Plocha rotora je $A = \pi D^2/4 = 5\,027$ m². Podľa (1.9):

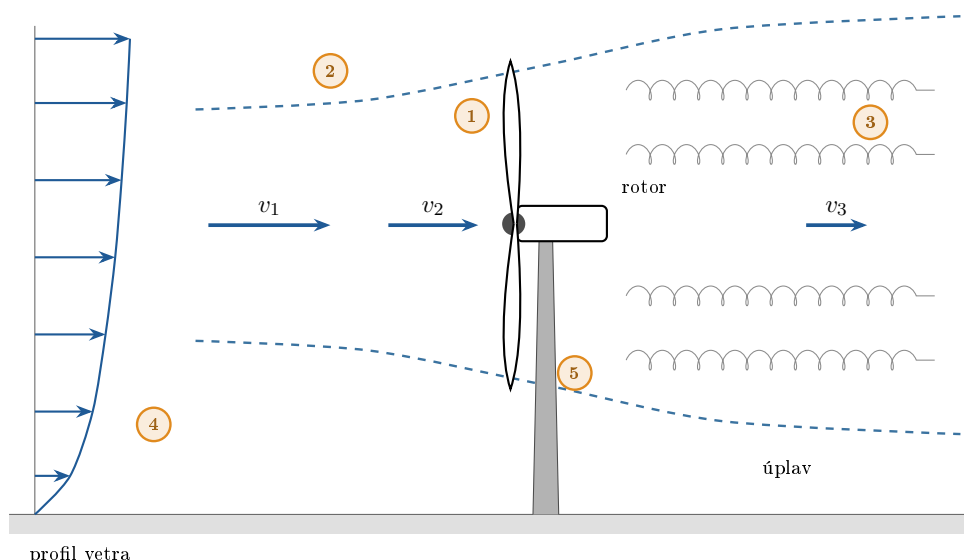
$$P_6 = 0,45 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 5027 \cdot 6^3 = 299 \text{ kW}, \quad P_7 = 0,45 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 5027 \cdot 7^3 = 475 \text{ kW}.$$

Rýchlosť vetra je vyššia o 17 %, výkon však vzrastie o 59 % ($(7/6)^3 = 1,59$). V praxi výkon turbíny obmedzuje aj jej menovitý výkon a regulácia. Vzťah (1.9) preto platí len pod menovitou rýchlosťou vetra. ■

Tepelné čerpadlo a tepelné siete

Tepelné čerpadlo zem–voda (obr. 1.10) odoberá teplo z horniny prostredníctvom zemného kolektora alebo vrtu, v ktorom cirkuluje nemrznúca zmes. Teplo odovzdáva vode vo vykurovacom systéme. Z hľadiska mechaniky tekutín tu riešime tri okruhy: primárny okruh so zmesou voda–glykol (dlhé potrubie, nízka teplota, a teda vysoká viskozita), okruh chladiva (dvojfázové prúdenie) a vykurovací okruh. Pri vykurovacom okruhu je dôležité hydraulické vyváženie, aby každá vetva podlahového vykurovania dostala potrebný prietok (kap. 12).

Rovnaké úlohy riešime vo väčšom meradle v *tepelných sieťach* (centralizované zásobovanie teplom). Tam sa teplo z biomasových kotolní, solárnych polí, tepelných čerpadiel alebo odpadového tepla dopravuje potrubím k tisíckam odberateľov [29]. Prikon čerpadiel, tlakové



Obr. 1.9. Veterná turbína v prúde vzduchu. Mechanika tekutín vstupuje: (1) pri obtekaní profilu listu, na ktorom vzniká vztlaková sila, (2) v prúdovej trubici, kde sa uplatňuje bilancia hmotnosti a hybnosti (kap. 5 a 7), (3) v turbulentnom úplave za rotorom, ktorý ovplyvňuje ďalšie turbíny vo veternom parku (kap. 9; inžinierske modely úplavu pozri [27]), (4) v medznej vrstve atmosféry, v ktorej rýchlosť vetra rastie s výškou, (5) pri zaťažení stožiara vetrom a pri chladení gondoly.

pomery v sieti a hydraulické vyváženie sú hlavnou témou kap. 12 a 13.

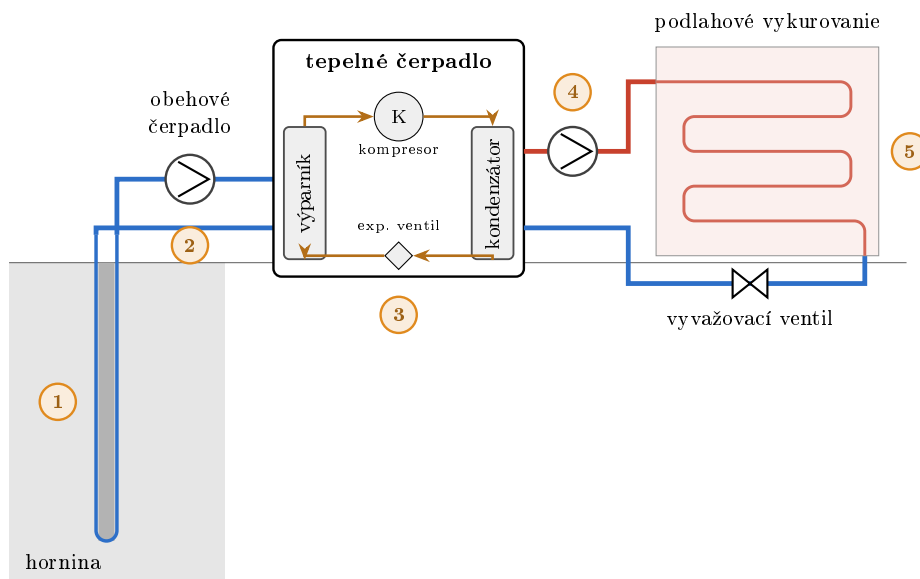
Ďalšie aplikácie

- **Vzduchové solárne kolektory a vetranie s rekuperáciou.** Riešime tlakové straty vo vzduchovodoch a výber ventilátora (kap. 15).
- **Bioplynové stanice.** Miešanie substrátu (nenewtonovská kvapalina, kap. 2), doprava bioplynu a tlakové straty v plynovodoch (kap. 15).
- **Geotermálna energia.** Tlakové pomery vo vrte s kvapalinou, ktorej hustota sa mení s teplotou (kap. 3), a čerpanie geotermálnej vody (kap. 13).
- **Akumulácia energie.** Prečerpávacie vodné elektrárne (kap. 14) a veľkoobjemové zásobníky tepla s teplotným vrstvením.

Tab. 1.4 zhrňa, ktoré kapitoly učebnice sú kľúčové pre jednotlivé technológie.

Tabuľka 1.4. Mapa učebnice: význam kapitol pre technológie OZE (● kľúčová, ○ doplňujúca).

Technológia	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
solárny termický systém	●	○	○	●	●		○	○	●	●	○	●		
vodná elektráreň			●	○	●	●		○	●	●		○	●	
veterná elektráreň	○		●	●	●	●	○	●						●
tepelné čerpadlo	●			●	●			○	●	●	●	●		○
tepelná sieť	●	●		●	●			○	●	●	●	●		
bioplyn, vzduchotechnika	●			○	●		○		○	○				●



Obr. 1.10. Tepelné čerpadlo zem–voda. Mechanika tekutín vstupuje: (1) v zemnom vrte, kde tlakové straty závisia od viskozity zmesi voda–glykol (kap. 2 a 10) a kde prúdenie určuje aj prenos tepla s horninou [28], (2) pri obehovom čerpadle primárneho okruhu, ktorého príkon znižuje výkonový faktor (kap. 13), (3) v okruhu chladiča, kde prebieha dvojfázové prúdenie, (4) pri obehovom čerpadle vykurovacieho okruhu, (5) v podlahovom vykurovaní, kde treba hydraulicky vyvážiť vetvy (kap. 12).

Aplikácia v OZE: odpoveď na úvodnú otázku

Obehové čerpadlo solárneho systému má síce malý príkon, ale jeho hydraulický výkon rastie s tretou mocninou prietoku a pri konštantnom prietoku približne s piatou mocninou prevrátenej hodnoty priemeru potrubia. Zmena koncentrácie glykolu mení viskozitu a tým aj tlakové straty, najmä pri nízkych teplotách. Nevhodný návrh okruhu preto môže príkon čerpadla znásobiť a čistý energetický prínos systému citeľne znížiť. Všetky tieto vplyvy budeme vedieť vyčíslieť po preštudovaní kap. 2, 6, 10 a 13.

Zhrnutie kapitoly

- Tekutina je látka, ktorá sa pri pôsobení šmykového napätia neustále deformuje. Kvapaliny sú prakticky nestlačiteľné, plyny sú stlačiteľné.
- V energetických systémoch je tekutina nosičom energie, zdrojom mechanickej energie alebo pracovnou látkou obehu. Jej doprava vždy vyžaduje energiu.
- Zariadenia s prúdiacou tekutinou opisujeme pomocou kontrolného objemu. Všetky bilancie majú tvar „akumulácia = prítok – odtok + zdroj“.
- Tlak možno vyjadriť ako výšku stĺpca kvapaliny $h = p/(\rho g)$. Pretlak 1 bar zodpovedá približne 10 m vodného stĺpca.
- Väčšinu technických úloh riešime ako ustálené (kvázistacionárne) a jednorozmerné. Tieto predpoklady treba vždy overiť.
- Hydraulický výkon je $P_h = Q \Delta p$. V systéme s kvadratickou charakteristikou rastie s tretou mocninou prietoku.
- Výkon vodnej elektrárne je $P = \eta \rho g Q H$, výkon veternej turbíny je $P = c_P \frac{1}{2} \rho A v^3$.

Kontrolné otázky

1. Čím sa tekutina odlišuje od tuhej látky? Prečo tekutina v pokoji nemôže prenášať šmykové napätie?
2. Kedy je oprávnené používať hypotézu kontinua? Uveďte príklad, keď neplatí.
3. Vysvetlite rozdiel medzi uzavretým systémom a kontrolným objemom. Ktorý prístup použijete pri výpočte čerpadla a prečo?
4. Zapište všeobecný tvar bilančnej rovnice pre kontrolný objem a vysvetlite význam jednotlivých členov.
5. Prečo sa v hydraulike tlak často vyjadruje v metroch? Aký je fyzikálny význam tejto výšky?
6. Znamená ustálené prúdenie, že tekutina je v pokoji? Uveďte príklad neustáleného deja v zariadení OZE, ktorý nemožno riešiť ako kvázistacionárny.
7. Kedy postačuje jednorozmerný model a kedy je nutný trojrozmerný model?
8. Prečo zníženie prietoku o 20 % zníži hydraulický výkon takmer na polovicu? Za akých predpokladov to platí?
9. Ako sa mení výkon veternej turbíny pri zvýšení rýchlosti vetra o 10 %?
10. Pomenujte aspoň tri miesta v solárnom termickom okruhu, kde projektant potrebuje poznatky z mechaniky tekutín.

Úlohy na precvičenie

1. Solárny okruh s vodou ($\rho = 985 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 4,18 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$) má prenášať tepelný tok 6 kW pri rozdieli teplôt 10 K. Určte hmotnostný a objemový prietok. [0,144 kg/s; 0,525 m³/h]
2. Najvyšší bod vykurovacej sústavy je 15 m nad manometrom (pozri obr. 3.5). V najvyššom bode má byť pretlak aspoň 0,5 bar. Aký minimálny pretlak musí ukazovať manometer? ($\rho = 990 \text{ kg/m}^3$) [1,96 bar]
3. Čerpadlo dopravuje 12 m³/h vody s tlakovým rozdielom 150 kPa. Celková účinnosť je 0,55. Určte hydraulický výkon, elektrický príkon a ročnú spotrebu elektriny pri 5 000 h prevádzky. [500 W; 909 W; 4 545 kW · h]
4. V sieti z predchádzajúcej úlohy (bez statickej výšky) sa prietok zvýši na 15 m³/h. Pri akom hydraulickom výkone bude čerpadlo pracovať, ak sa účinnosť nezmení? [977 W]
5. Malá vodná elektráreň má spád 25 m a celkovú účinnosť 0,78. Aký prietok je potrebný na dosiahnutie elektrického výkonu 250 kW? [1,31 m³/s]
6. Veterná turbína s priemerom rotora 120 m a $c_P = 0,47$ pracuje pri rýchlosti vetra 8 m/s ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$). Určte výkon. Aký by bol výkon v horskej lokalite s hustotou vzduchu 1,10 kg/m³? [1,67 MW; 1,50 MW]
7. Pre zvolené zariadenie OZE (napr. tepelné čerpadlo vzduch–voda, vzduchový solárny kolektor, bioplynová stanica) nakreslite schému a vyznačte v nej miesta, kde vstupuje mechanika tekutín, podobne ako na obr. 1.1. Pre každé miesto uveďte, ktorá veličina je rozhodujúca.

Kapitola 2

Fyzikálne vlastnosti tekutín

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent vyberie fyzikálne vlastnosti média potrebné pre daný výpočet, určí ich hodnotu pri prevádzkovej teplote a tlaku a posúdi ich vplyv na prúdenie. Vie vysvetliť, prečo zvýšenie koncentrácie glykolu zvýši tlakové straty a spotrebu čerpadla.

Kľúčové pojmy

hustota, merný objem, relatívna hustota, objemový modul pružnosti, stlačiteľnosť, teplotná rozťažnosť, dynamická a kinematická viskozita, Newtonov zákon viskozity, nenewtonovská tekutina, povrchové napätie, kapilarita, tlak nasýtených pár, nemrznúca zmes

Každý výpočet prúdenia potrebuje vlastností média. Bez hustoty nevypočítame hmotnostný prietok ani hydrostatický tlak. Bez viskozity neurčíme režim prúdenia ani tlakové straty. Bez tlaku nasýtených pár nevieme posúdiť, či v čerpadle alebo v turbíne vznikne kavitácia.

Vlastnosti tekutín nie sú konštanty. Menia sa s teplotou, v prípade plynov aj s tlakom, a pri zmesiach s ich zložením. V zariadeniach OZE sa teplota média mení vo veľkom rozsahu. V solárnom kolektore to môže byť od -20°C až 150°C , v zemnom vrte tepelného čerpadla od -5°C až 15°C . Voľba správnych hodnôt je preto súčasťou návrhu, nie iba formalitou. Kapitola vychádza z [1, 5]. Hodnoty vlastností vody, vzduchu a zmesi voda–glykol sú zhrnuté v príl. B.

Na zamyslenie

Solárny okruh naplnený vodou pracuje bez problémov. Po doplnení nemrznúcej zmesi so 40 % propylénglykolu však čerpadlo nedosahuje pôvodný prietok a kolektory sa prehrievajú. Čo sa zmenilo? Hustota zmesi je len o niekoľko percent väčšia ako hustota vody. Ktorá vlastnosť je teda za problém zodpovedná?

2.1 Hustota a merný objem

Hustota je hmotnosť tekutiny v jednotke objemu. V bode kontinua ju definujeme limitou

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \delta V} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad [\text{kg}/\text{m}^3], \quad (2.1)$$

kde δV je najmenší objem, ktorý ešte obsahuje dostatočný počet molekúl na to, aby bola hodnota nezávislá od jeho veľkosti (hypotéza kontinua, odd. 1.2). Pre homogénnu tekutinu platí jednoducho $\rho = m/V$.

Prevrátenou hodnotou hustoty je *merný objem*

$$v = \frac{1}{\rho} \quad [\text{m}^3/\text{kg}]. \quad (2.2)$$

Merný objem sa používa najmä v termodynamike. V mechanike tekutín pracujeme prevažne s hustotou. Merný objem má rovnaké písmeno ako rýchlosť, preto ho v tejto knihe používame len výnimočne.

Súčinn hustoty a tiažového zrýchlenia sa nazýva *merná tiaž* $\gamma = \rho g$ [N/m³]. Vyjadruje tiaž jednotkového objemu tekutiny a využijeme ju v hydrostatike (kap. 3).

Orientačné hodnoty hustoty niektorých tekutín sú v tab. 2.1. Rozdiel medzi kvapalinami a plynmi je približne tri rády.

Tabuľka 2.1. Hustota vybraných tekutín pri tlaku 101,3 kPa [1, 26, 30].

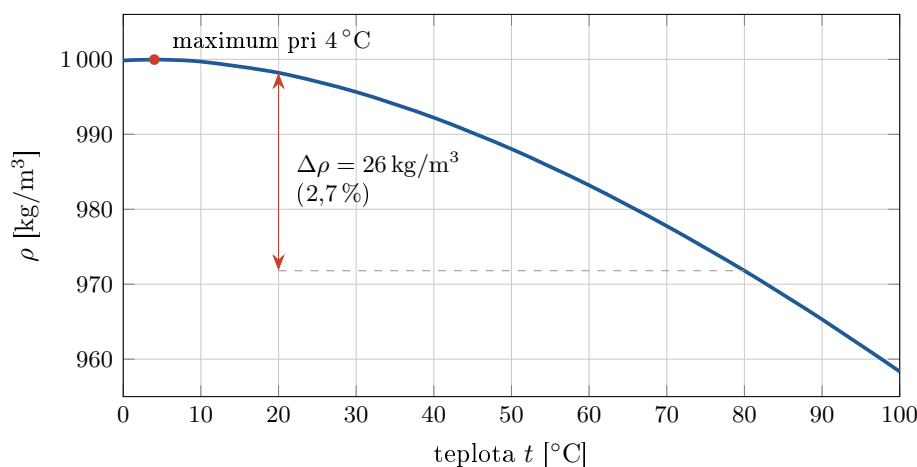
Tekutina	t [°C]	ρ [kg/m ³]
voda	20	998,0
voda	80	971,8
zmes voda–propylénglykol 40 % obj.	40	1 026,5
ortuť	20	13 600
vzduch	20	1,204
vzduch (štandardná atmosféra, hladina mora)	15	1,225

Hustota kvapalín

Hustota kvapalín závisí najmä od teploty. Od tlaku závisí len veľmi málo (odd. 2.3). Vplyv teploty vyjadruje *súčiniteľ objemovej rozťažnosti*

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx -\frac{\Delta \rho / \rho}{\Delta T} \quad [1/\text{K}]. \quad (2.3)$$

Pre vodu pri 20 °C je $\beta \approx 0,2 \cdot 10^{-3}/\text{K}$, pri 80 °C už približne $0,65 \cdot 10^{-3}/\text{K}$ [1]. Voda má najväčšiu hustotu pri teplote asi 4 °C. Pod touto teplotou je súčiniteľ β záporný (obr. 2.1).



Obr. 2.1. Hustota vody v závislosti od teploty pri atmosférickom tlaku [1, 31]. Pri ohreve z 20 °C na 80 °C klesne hustota o 2,7 %.

Pre energetiku má teplotná závislosť hustoty dva dôležité dôsledky:

- **Objem kvapaliny v uzavretom okruhu sa pri ohreve zväčšuje.** Túto zmenu musí zachytiť expanzná nádoba (pr. 2.1).
- **Teplejšia kvapalina je ľahšia.** Stúpa nahor a vytvára teplotné vrstvenie v zásobníkoch. Ak je rozdiel hustôt v okruhu dostatočne veľký, vzniká samotížna cirkulácia (termosifón).

Príklad 2.1 – Zmena objemu vody v okruhu

Solárny okruh obsahuje 1 000 L vody. Pri napúšťaní má voda teplotu 20 °C, v prevádzke sa ohreje na 80 °C. O koľko sa zväčší jej objem?

Riešenie. Hmotnosť vody sa nemení, preto $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$. S hodnotami z tab. 2.1:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) = 1000 \left(\frac{998,0}{971,8} - 1 \right) = 27 \text{ L.}$$

Objem vzrastie o 2,7 %. Ak by táto voda nemala kam uniknúť, tlak v okruhu by prudko vzrástol (pr. 2.3). Pri nemrznúcich zmesiach je rozťažnosť ešte o niečo väčšia. V solárnych systémoch treba navyše počítat s odparením kvapaliny z kolektora pri stagnácii. ■

Hustota plynov

Hustota plynov sa výrazne mení s tlakom aj s teplotou. Pri tlakoch a teplotách bežných v energetike sa väčšina plynov správa ako *ideálny plyn*:

$$p = \rho r T \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p}{r T}, \quad (2.4)$$

kde p je *absolútny* tlak, T je termodynamická teplota a $r = R/M$ je merná plynová konštanta. Univerzálna plynová konštanta je $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ a M je molárna hmotnosť. Pre suchý vzduch je $r = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. Podrobnejšie sa prúdeniu plynov venuje kap. 15.

Pre veternú energetiku je dôležité, že hustota vzduchu klesá s nadmorskou výškou. Podľa štandardnej atmosféry [26] má vzduch na úrovni mora hustotu $1,225 \text{ kg}/\text{m}^3$, vo výške 1 000 m približne $1,112 \text{ kg}/\text{m}^3$ a vo výške 2 000 m približne $1,007 \text{ kg}/\text{m}^3$. Výkon veternej turbíny je podľa (1.9) priamo úmerný hustote. Pri rovnakej rýchlosti vetra preto turbína v nadmorskej výške 1 000 m vyrobí asi o 9 % menej energie ako na úrovni mora.

2.2 Relatívna hustota

Relatívna hustota je pomer hustoty látky a hustoty zvolenej referenčnej látky pri určených podmienkach:

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}} \quad [-]. \quad (2.5)$$

Pre kvapaliny je referenčnou látkou voda pri 4 °C ($\rho_{\text{ref}} = 1 000 \text{ kg}/\text{m}^3$), pre plyny suchý vzduch pri rovnakom tlaku a teplote. V anglickej literatúre sa pre kvapaliny používa pojem *specific gravity* (SG) [1].

Pre plyny pri rovnakom tlaku a teplote vyplýva z (2.4) jednoduchý vzťah

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{vzduch}}} = \frac{M}{M_{\text{vzduch}}}, \quad M_{\text{vzduch}} = 28,97 \text{ g/mol}. \quad (2.6)$$

Plyn s $d < 1$ je ľahší ako vzduch a pri úniku stúpa nahor. Plyn s $d > 1$ sa hromadí pri zemi a v šachtách. Tento rozdiel je dôležitý pre bezpečnosť bioplynových staníc a pre umiestnenie detektorov plynu.

Príklad 2.2 – Relatívna hustota bioplynu

Bioplyn obsahuje 60 % metánu ($M = 16,04 \text{ g/mol}$) a 40 % oxidu uhličitého ($M = 44,01 \text{ g/mol}$) v objemových (molárnych) zlomkoch. Určte jeho relatívnu hustotu vzhľadom na vzduch a hustotu pri 15°C a $101,325 \text{ kPa}$.

Riešenie. Molárna hmotnosť zmesi je váženým priemerom: $M = 0,6 \cdot 16,04 + 0,4 \cdot 44,01 = 27,2 \text{ g/mol}$. Relatívna hustota podľa (2.6) je $d = 27,2/28,97 = 0,94$. Hustota podľa (2.4) je

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{101\,325 \cdot 0,0272}{8,314 \cdot 288,15} = 1,15 \text{ kg/m}^3.$$

Bioplyn je teda len o málo ľahší ako vzduch. Čistý metán ($d = 0,55$) rýchlo stúpa, čistý oxid uhličitý ($d = 1,52$) klesá k zemi. ■

2.3 Stlačiteľnosť a objemový modul pružnosti

Pri zvýšení tlaku sa objem tekutiny zmenší. Mieru tohto javu vyjadruje *objemový modul pružnosti* K . Je analógiou Youngovho modulu pružnosti tuhých látok [1]:

$$K = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \approx -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho/\rho} \quad [\text{Pa}]. \quad (2.7)$$

Záporné znamienko zabezpečuje, že $K > 0$, lebo pri raste tlaku sa objem znižuje. Prevrátená hodnota $1/K$ sa nazýva *súčiniteľ stlačiteľnosti*.

Veľký modul K znamená, že na malú zmenu objemu treba veľkú zmenu tlaku. Pre vodu je $K \approx 2,1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$. Na zmenšenie objemu vody o 1 % treba zvýšiť tlak približne o 21 MPa (asi 210 atm) [1]. Preto kvapaliny v hydraulických výpočtoch považujeme za *nestlačiteľné* ($\rho = \text{konšt.}$).

Pre ideálny plyn pri konštantnej teplote z (2.4) vyplýva $(\partial p / \partial \rho)_T = rT = p/\rho$, a teda

$$K_{\text{ideálny plyn}} = p. \quad (2.8)$$

Objemový modul vzduchu pri atmosférickom tlaku je teda približne 0,1 MPa, dvadsaťtisíkrát menej ako modul vody. Napriek tomu možno aj prúdenie plynov často počítať ako nestlačiteľné. Rozhoduje totiž, ako veľmi sa pri prúdení mení tlak, a teda aj hustota (kap. 15).

Rýchlosť zvuku

Stlačiteľnosť určuje rýchlosť, ktorou sa v tekutine šíria tlakové vlny. Pre kvapaliny platí

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (2.9)$$

Pre vodu je $a = \sqrt{2,1 \cdot 10^9 / 998} \approx 1\,450 \text{ m/s}$. Takou rýchlosťou sa v potrubí šíri tlaková vlna po rýchlom uzavretí ventilu alebo po odstavení turbíny. Vzniká tzv. *hydraulický ráz*, pri ktorom môže tlak prekročiť prevádzkovú hodnotu mnohonásobne [32]. Pružnosť stien potrubia skutočnú rýchlosť šírenia vlny znižuje.

Príklad 2.3 – Ohrev kvapaliny v uzavretom objeme

Úplne zaplnený úsek potrubia solárneho okruhu je z oboch strán uzavretý ventilmi. Voda v ňom sa ohreje o 10 K. Odhadnite nárast tlaku, ak potrubie považujeme za dokonale tuhé.

Uvažujte $\beta = 0,3 \cdot 10^{-3}/\text{K}$ a $K = 2,1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$.

Riešenie. Objem uzavretej vody sa nemôže zmeniť. Rozťažnosť spôsobená ohrevom ($\Delta V/V = \beta \Delta T$) sa preto musí kompenzovať stlačením ($\Delta V/V = -\Delta p/K$). Odtiaľ

$$\Delta p = K \beta \Delta T = 2,1 \cdot 10^9 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 6,3 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 63 \text{ bar}.$$

Skutočné potrubie sa mierne rozopne, takže nárast bude menší. Stále však ide o desiatky barov. Preto sa úseky okruhu, ktoré možno uzavrieť, musia vybaviť poistným ventilom alebo musia zostať spojené s expanznou nádobou. ■

2.4 Dynamická viskozita

Viskozita je vlastnosť tekutiny, ktorá vyjadruje jej odpor proti vzájomnému posúvaniu susedných vrstiev, teda vnútorné trenie [1, 33]. Vďaka viskozite sa pohyb jednej vrstvy prenáša na susedné vrstvy. Tá istá vlastnosť spôsobuje, že sa pri prúdení mechanická energia mení na teplo. Viskozita je preto hlavnou príčinou tlakových strát (kap. 8 a 10).

Mieru vnútorného trenia vyjadruje *dynamická viskozita* μ (v literatúre aj η). Presne ju zadefinujeme Newtonovým zákonom viskozity v odd. 2.6. Jednotkou je $\text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. V technickej praxi sa často používa $\text{mPa} \cdot \text{s}$, čo zodpovedá staršej jednotke centipoise (cP). Voda pri 20°C má viskozitu práve $1,0 \text{ mPa} \cdot \text{s}$.

Závislosť viskozity od teploty

Viskozita kvapalín a plynov sa s teplotou mení *opačne*:

- V **kvapalinách** sú molekuly blízko seba a viskozitu spôsobujú najmä medzimolekulové súdržné sily. S rastúcou teplotou majú molekuly viac energie, ľahšie tieto sily prekonávajú a viskozita *klesá*.
- V **plynoch** sú medzimolekulové sily zanedbateľné. Hybnosť medzi vrstvami prenášajú molekuly, ktoré sa náhodne presúvajú z jednej vrstvy do druhej. S rastúcou teplotou sa pohybujú rýchlejšie a viskozita *rastie*.

Pre vodu v rozsahu 0°C až 370°C s chybou do 2,5 % platí empirický vzťah [1]

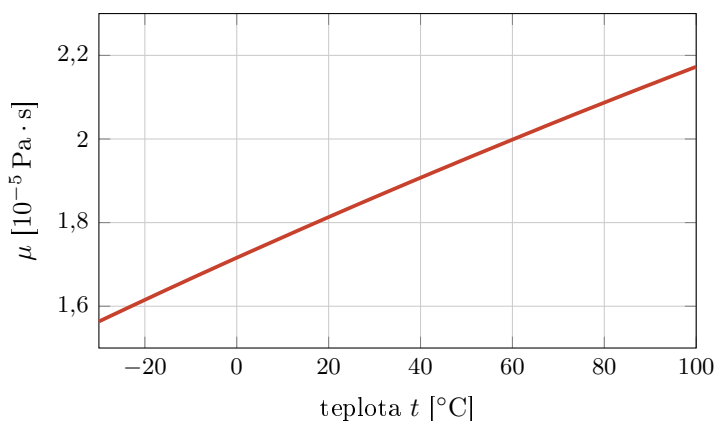
$$\mu = a \cdot 10^{b/(T-c)}, \quad a = 2,414 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad b = 247,8 \text{ K}, \quad c = 140 \text{ K}. \quad (2.10)$$

Pre plyny sa používa Sutherlandov vzťah

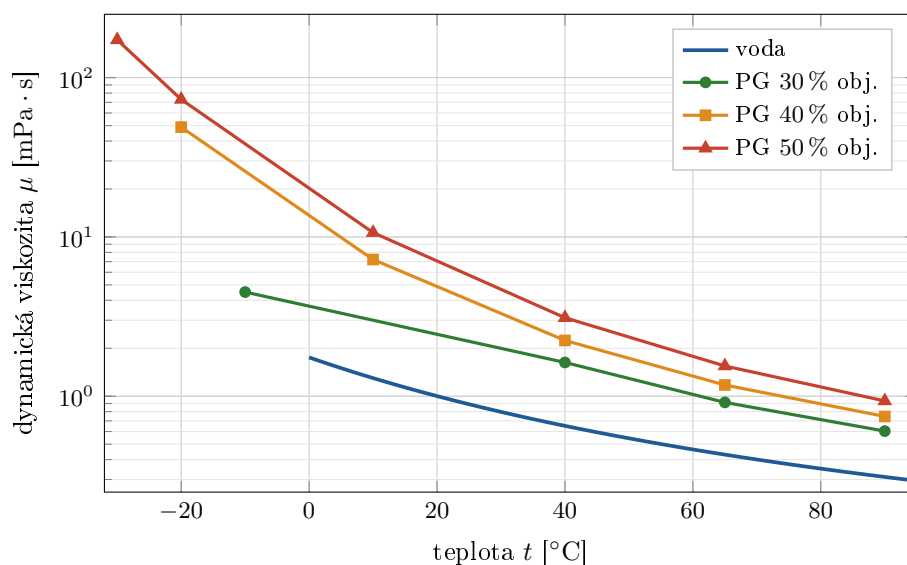
$$\mu = \frac{a T^{1/2}}{1 + b/T}, \quad (2.11)$$

ktorý pre vzduch s konštantami $a = 1,458 \cdot 10^{-6} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}^{0,5})$ a $b = 110,4 \text{ K}$ vychádza zo štandardnej atmosféry [1, 26]. Pri nízkych a stredných tlakoch viskozita plynov od tlaku prakticky nezávisí. Pribeh viskozity vzduchu ukazuje obr. 2.2.

Viskozita vody medzi 10°C a 80°C klesne takmer štvornásobne (z $1,307$ na $0,355 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, tab. B.1). Viskozita zmesi voda–glykol sa mení ešte výraznejšie (obr. 2.3). Pri -20°C je viskozita zmesi so 40 % propylénglykolu asi dvadsaťkrát väčšia ako pri 40°C [30].



Obr. 2.2. Dynamická viskozita vzduchu podľa Sutherlandovho vzťahu (2.11). Na rozdiel od kvapalín s teplotou rastie.



Obr. 2.3. Dynamická viskozita vody podľa (2.10) a zmesí voda–propylénglykol (PG) s rôznou objemovou koncentráciou podľa údajov výrobcu [30]. Zvislá os je logaritmická.

2.5 Kinematická viskozita

V mnohých vzťahoch mechaniky tekutín sa viskozita vyskytuje vo forme podielu s hustotou. Tento podiel sa nazýva *kinematická viskozita*:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [\text{m}^2/\text{s}]. \quad (2.12)$$

V praxi sa používa aj jednotka mm^2/s , čo zodpovedá staršej jednotke centistokes (cSt). Pre vodu pri 20°C je $\nu \approx 1,0 \text{ mm}^2/\text{s}$.

Kinematická viskozita je najdôležitejšou vlastnosťou pre určenie *režimu prúdenia*. Vystupuje v Reynoldsovom čísle

$$Re = \frac{v D}{\nu}, \quad (2.13)$$

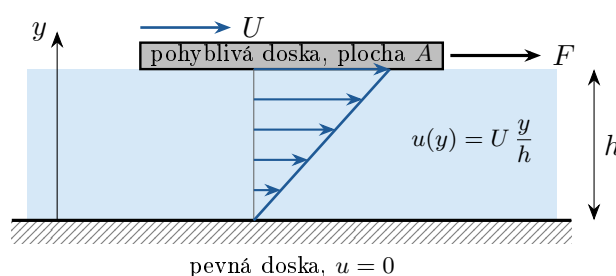
ktorým sa podrobne zaoberá kap. 9.

Pozor – častá chyba

Vzduch má menšiu dynamickú viskozitu ako voda (asi $55\times$ pri 20°C), ale *väčšiu* kinematickú viskozitu (asi $15\times$), pretože jeho hustota je takmer tisíckrát menšia. Kinematická viskozita plynov závisí aj od tlaku, lebo od tlaku závisí ich hustota. Pri výpočte ν plynu pri inom ako atmosférickom tlaku preto nemožno priamo použiť tabuľkovú hodnotu (tab. B.2).

2.6 Newtonov zákon viskozity

Uvažujme vrstvu tekutiny s hrúbkou h medzi dvoma rovnobežnými doskami (obr. 2.4). Spodná doska je nehybná. Horná doska s plochou A sa pohybuje konštantnou rýchlosťou U . Tekutina ulpieva na oboch doskách, preto má pri spodnej doske nulovú rýchlosť a pri hornej rýchlosť U . Pri malej hrúbke vrstvy je rozloženie rýchlosti medzi doskami lineárne.



Obr. 2.4. Tekutina medzi pevnou a pohyblivou doskou. Na udržanie pohybu hornej dosky je potrebná sila F , ktorá prekonáva viskózne šmykové napätie.

Experimenty ukazujú, že na udržanie pohybu dosky je potrebná sila, ktorá je úmerná ploche a rýchlosti a nepriamo úmerná hrúbke vrstvy: $F = \mu AU/h$. Šmykové napätie $\tau = F/A$ je teda úmerné gradientu rýchlosti. Tento poznatok platí aj pre zakrivený rýchlostný profil v každom bode, ak nahradíme podiel U/h deriváciou. Dostávame *Newtonov zákon viskozity*:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (2.14)$$

Tekutiny, pre ktoré je μ pri danej teplote a tlaku konštantná, teda nezávisí od rýchlosti deformácie, nazývame *newtonovské*. Patria k nim voda, vzduch, všetky plyny, väčšina olejov aj zmesi voda–glykol.

V tejto kapitole zákon zavádzame ako materiálový vzťah. V kap. 8 ho použijeme na výpočet rýchlostných profilov a tlakových strát pri laminárnom prúdení.

Príklad 2.4 – Sila na klznú dosku

Doska s plochou $0,5\text{ m}^2$ sa posúva rýchlosťou 1 m/s po olejovom filme hrúbky 1 mm . Olej má dynamickú viskozitu $0,1\text{ Pa}\cdot\text{s}$. Akou silou treba dosku ťahať a aký výkon sa pritom mení na teplo?

Riešenie. Pri lineárnom profile je $du/dy = U/h = 1/0,001 = 1\,000/\text{s}$. Šmykové napätie je $\tau = 0,1 \cdot 1000 = 100\text{ Pa}$ a sila

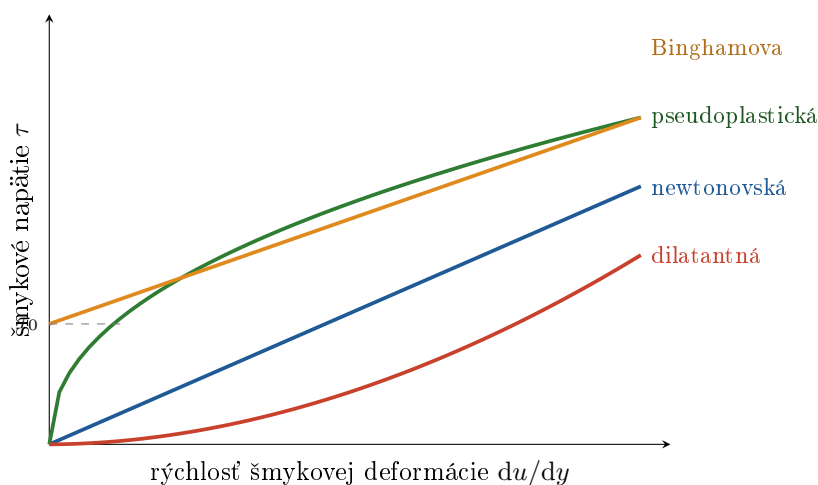
$$F = \tau A = 100 \cdot 0,5 = 50\text{ N}.$$

Výkon $P = FU = 50\text{ W}$ sa celý mení na teplo v olejovom filme. Je to najjednoduchší príklad *viskózneho* *disipácie* energie, ktorá je fyzikálnou podstatou tlakových strát (kap. 8). ■

2.7 Newtonovské a nenewtonovské tekutiny

Pri niektorých látkach nie je šmykové napätie úmerné rýchlosti deformácie. Takéto tekutiny nazývame *nenewtonovské* [1, 33]. Ich správanie opisujú *tokové krivky* (obr. 2.5):

- **Pseudoplastické** tekutiny sú pri rýchlejšej deformácii „redšie“. Zdanlivá viskozita s rastúcou rýchlosťou deformácie klesá. Patria k nim roztoky polymérov, farby a mnohé biologické suspenzie.
- **Dilatantné** tekutiny sú pri rýchlejšej deformácii „hustejšie“. Príkladom je koncentrovaná suspenzia škrobu vo vode.
- **Binghamove** (plastické) tekutiny začnú tiecť až po prekročení medze tečenia τ_0 . Príkladmi sú zubná pasta, čerstvý betón a hustý kal.



Obr. 2.5. Tokové krivky newtonovskej a nenewtonovských tekutín.

Často používaným modelom je *mocninový zákon*

$$\tau = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n, \quad (2.15)$$

kde k je súčiniteľ konzistencie a n je index toku. Pre $n < 1$ ide o pseudoplastickú, pre $n > 1$ o dilatantnú a pre $n = 1$ o newtonovskú tekutinu s $k = \mu$.

Aplikácia v OZE: bioplynové stanice

Substrát v anaeróbnom fermentore aj digestát sú suspenzie s vysokým obsahom sušiny. Správajú sa ako pseudoplastické tekutiny, často s medzou tečenia. Ich zdanlivá viskozita môže byť o niekoľko rádov vyššia ako viskozita vody a výrazne závisí od obsahu sušiny. Pri návrhu miešadiel a čerpadiel substrátu preto nemožno použiť vzťahy platné pre vodu. Nesprávny odhad reologických vlastností vedie k poddimenzovanému pohonu alebo k vzniku nepremiešaných zón vo fermentore.

2.8 Povrchové napätie a kapilarita

Molekuly vo vnútri kvapaliny sú priťahované susednými molekulami zo všetkých strán rovnako. Na molekuly na povrchu pôsobí výsledná sila smerom dovnútra. Povrch kvapaliny sa preto správa ako napnutá blana. Túto vlastnosť vyjadruje *povrchové napätie* σ [N/m]. Je to sila

pôsobiaci na jednotku dĺžky myslenej čiary na povrchu. Pre vodu v styku so vzduchom je $\sigma = 0,073 \text{ N/m}$ pri 20°C a s rastúcou teplotou klesá [1].

Dôsledkom povrchového napätia je *kapilarita*. V úzkej trubici kvapalina, ktorá zmáča stenu (voda na skle), vystúpi nad okolitú hladinu (kapilárna elevácia). Kvapalina, ktorá stenu nezmáča (ortuť), naopak klesne pod hladinu (kapilárna depresia, obr. 2.6). Z rovnováhy tiaže stĺpca a zvislej zložky sily povrchového napätia vyplýva výška kapilárneho vztlínania:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R}, \quad (2.16)$$

kde R je polomer trubice a θ je kontaktný (zmáčací) uhol. Pre vodu a čisté sklo je $\theta \approx 0^\circ$.

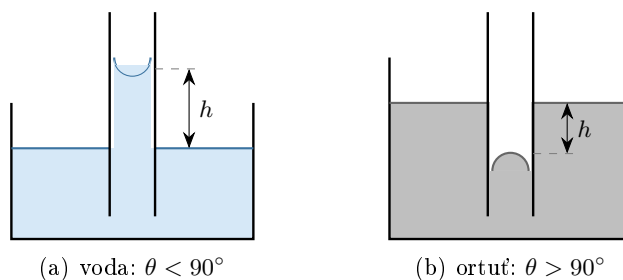
Príklad 2.5 – Chyba odčítania na trubicovom manometri

Aká je kapilárna elevácia vody pri 20°C v sklenej trubici s vnútorným priemerom 1 mm?

Riešenie. Podľa (2.16) s $\theta = 0^\circ$ a $R = 0,5 \text{ mm}$:

$$h = \frac{2 \cdot 0,073 \cdot 1}{998 \cdot 9,81 \cdot 0,0005} = 0,030 \text{ m} = 30 \text{ mm}.$$

Chyba 30 mm vodného stĺpca zodpovedá asi 290 Pa. Pri meraní malých tlakových rozdielov je to neprijateľné. Trubicové manometre preto majú priemer aspoň niekoľko milimetrov a obe ramená rovnaký priemer, aby sa kapilárne javy navzájom vyrušili (kap. 3). ■



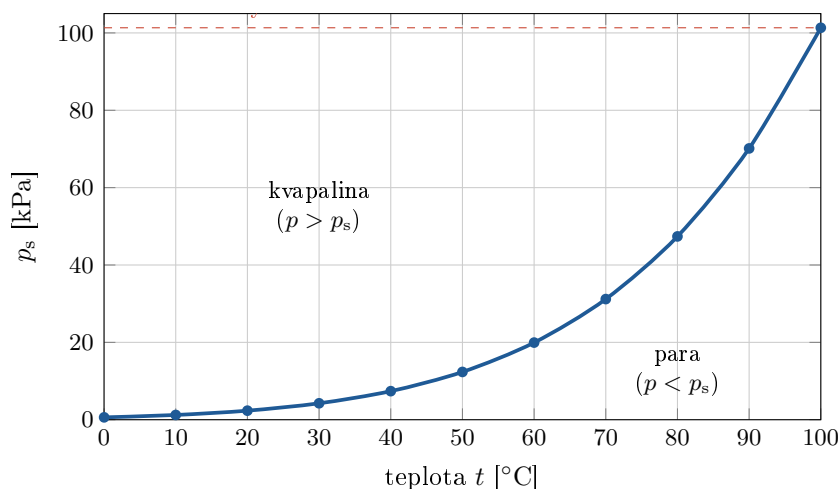
Obr. 2.6. Kapilarita: (a) elevácia zmáčavej kvapaliny, (b) depresia nezmáčavej kvapaliny.

V energetike sa kapilarita využíva v *tepelných trubicach* (*heat pipes*). Používajú sa napríklad vo vákuových trubicových slnečných kolektoroch. Pracovná látka sa odparí v ohrievanej časti, kondenzuje v chladenej časti a do výparníka sa vracia gravitáciou alebo kapilárnym vztlínaním v porézne upravenej stene. Povrchové napätie ďalej ovplyvňuje tvorbu bublín pri vare a kavitácii a odlučovanie vzduchu z vykurovacích sústav.

2.9 Tlak nasýtených pár

Nad hladinou kvapaliny v uzavretej nádobe sa ustáli rovnováha medzi molekulami, ktoré sa odparujú, a molekulami, ktoré kondenzujú. Tlak pary v tomto stave sa nazýva *tlak nasýtených pár* p_s . Závisí len od teploty (obr. 2.7, tab. B.1).

Ak absolútny tlak v kvapaline klesne na hodnotu p_s , kvapalina začne vriť. Rovnaký jav poznáme z bežného života: pri atmosférickom tlaku $101,3 \text{ kPa}$ voda vriť pri 100°C , na vysokej hore pri nižšej teplote. V prúdiacej kvapaline môže tlak lokálne klesnúť pod p_s aj pri nízkej teplote, napríklad na sacej strane lopatiek čerpadla alebo v savke turbíny. Vzniknú parné bubliny, ktoré sa v oblasti vyššieho tlaku prudko zrútia. Tento jav sa nazýva *kavitácia*. Spôsobuje hluk, vibrácie, pokles účinnosti a eróziu materiálu [33, 34]. Podrobne sa ním zaoberáme v kap. 13 a 14.



Obr. 2.7. Tlak nasýtených pár vody v závislosti od teploty [1].

Príklad 2.6 – Riziko kavitácie na sacej strane čerpadla

Čerpadlo nasáva vodu s teplotou 60 °C. Na vstupe do obežného kola klesne absolútny tlak na 25 kPa. Hrozí kavitácia? Ako sa situácia zmení pri teplote vody 70 °C?

Riešenie. Podľa tab. B.1 je pri 60 °C $p_s = 19,94$ kPa. Tlak 25 kPa je vyšší, rezerva je však len asi 5 kPa. Tlak v obežnom kole je navyše lokálne ešte nižší ako na vstupe. Pri 70 °C je $p_s = 31,19$ kPa, teda viac ako tlak na vstupe, a kavitácia nastane s istotou. Čerpadlá pre teplú vodu sa preto umiestňujú tak, aby na ich sacej strane bol dostatočný pretlak. Najčastejšie sa zaraďujú do chladnejšej vetvy okruhu (spiatočky). ■

V uzavretých okruhoch OZE má tlak nasýtených pár ešte jeden význam. Ak slnečný kolektor neodoberá teplo, napríklad pri výpadku čerpadla alebo pri nabitom zásobníku, jeho teplota stúpne na *stagnačnú teplotu*, ktorá môže byť výrazne nad 100 °C. Teplonosná kvapalina sa v kolektore odparí vtedy, keď jej teplota prekročí teplotu varu pri tlaku v okruhu. Návrh prevádzkového tlaku a expanznej nádoby preto vychádza z krivky tlaku nasýtených pár.

2.10 Závislosť vlastností od teploty a tlaku

Tab. 2.2 sumarizuje, ako sa menia vlastnosti tekutín s teplotou a tlakom. Tabuľku odporúčame používať ako kontrolný zoznam pri každom výpočte.

Tabuľka 2.2. Kvalitatívna závislosť vlastností od teploty a tlaku ($\uparrow$ rastie, $\downarrow$ klesá, $\approx$ prakticky nezávisí).

Vlastnosť	kvapaliny		plyny	
	$T \uparrow$	$p \uparrow$	$T \uparrow$	$p \uparrow$
hustota ρ	$\downarrow$ (mierne)	$\approx$	$\downarrow (\sim 1/T)$	$\uparrow (\sim p)$
dynamická viskozita μ	$\downarrow$ (výrazne)	$\approx$	$\uparrow$	$\approx$
kinematická viskozita ν	$\downarrow$ (výrazne)	$\approx$	$\uparrow$	$\downarrow (\sim 1/p)$
povrchové napätie σ	$\downarrow$	$\approx$	–	–
tlak nasýtených pár p_s	$\uparrow$ (výrazne)	–	–	–

Pri výpočtoch zariadení OZE odporúčame:

1. **Vlastnosti volíme pri skutočnej prevádzkovej teplote.** Pri väčšom rozdieli teplôt medzi vstupom a výstupom zariadenia použijeme strednú teplotu.
2. **Posudzujeme najnepriaznivejší stav.** Pri návrhu čerpadla pre okruh s nemrznúcou zmesou je rozhodujúca najnižšia prevádzková teplota, pri ktorej je viskozita najväčšia. Pri posudzovaní kavitácie je rozhodujúca najvyššia teplota, pri ktorej je najväčší tlak nasýtených pár.
3. **Pri plynoch vždy pracujeme s absolútnym tlakom a teplotou v kelvinoch.**
4. **Hodnoty pre zmesi a technické kvapaliny preberáme z údajov výrobcu.** Závisia od konkrétneho zloženia vrátane inhibítorov korózie.

Pre výpočty v tabuľkovom procesore alebo v Pythone je vhodné tabuľkové hodnoty interpolovať alebo použiť aproximačné vzťahy, napríklad (2.10) a (2.11). Presné stavové rovnice vody sú spracované v medzinárodnej formulácii IAPWS [31].

2.11 Vlastnosti vody, vzduchu a teplonosných médií

Voda

Voda je najdôležitejšou pracovnou tekutinou energetiky. Má vysokú mernú tepelnú kapacitu (asi $4,18 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$), nízku viskozitu, je netoxická a lacná. Jej nevýhodami sú bod tuhnutia 0°C , pri ktorom sa objem pri zamrznutí zväčší asi o 9 % a potrubie môže prasknúť, a pomerne nízka teplota varu pri atmosférickom tlaku. Vlastnosti vody na medzi sýtosti sú v tab. B.1. Prírodná voda v tokoch obsahuje rozpustené látky a nerozpustené častice. Pre hydraulické výpočty vodných elektrární sa však jej vlastnosti od čistej vody líšia zanedbateľne.

Vzduch

Vzduch je pracovnou tekutinou veterných turbín, vzduchových slnečných kolektorov, vetracích jednotiek s rekuperáciou a tepelných čerpadiel vzduch–voda. Pri výpočtoch ho považujeme za ideálny plyn s $r = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. Vlastnosti suchého vzduchu pri atmosférickom tlaku sú v tab. B.2. Vlhkosť vzduchu jeho hustotu mierne znižuje, lebo molárna hmotnosť vodnej pary (18 g/mol) je menšia ako molárna hmotnosť vzduchu.

Iné teplonosné látky

Pri vyšších teplotách, napríklad v koncentračných slnečných elektrárnach alebo v priemyselných procesoch, sa používajú teplonosné oleje a roztavené soli. V jednotkách s organickým Rankinovým cyklom (ORC), ktoré vyrábajú elektrinu z geotermálnej vody, biomasy alebo odpadového tepla, sú pracovnou látkou organické kvapaliny s nízkou teplotou varu [8]. Ich vlastnosti treba vždy prevziať zo špecializovaných databáz alebo od výrobcu.

2.12 Nemrznúce zmesi a teplonosné kvapaliny v OZE

Solárne kolektory, zemné kolektory a vrty tepelných čerpadiel aj vonkajšie výmenníky pracujú pri teplotách pod bodom mrazu. Namiesto vody sa v nich používajú *nemrznúce zmesi* vody s glykolom:

- **Propylénglykol** (propán-1,2-diol) je málo toxický. Používa sa v solárnych systémoch na prípravu teplej vody a všade, kde hrozí kontakt s pitnou vodou alebo potravinami.
- **Etylénglykol** (etán-1,2-diol) má lepšie tepelné a hydraulické vlastnosti, je však toxický. Používa sa najmä v priemyselných a chladiacich okruhoch.

Technické nemrznúce zmesi obsahujú aj inhibítory korózie. Pri dlhodobom prehrievaní, napríklad pri opakovanej stagnácii solárnych kolektorov, glykol degraduje a zmes okysľuje. Jej stav treba preto pravidelne kontrolovať.

Voľba koncentrácie

Koncentrácia glykolu sa volí podľa najnižšej očakávanej teploty (tab. 2.3). Treba rozlišovať dve úrovne ochrany. *Ochrana proti zamrznutiu* znamená, že kvapalina zostane tekutá a čerpateľná. *Ochrana proti roztrhnutiu* pripúšťa vznik kašovitej zmesi ľadových kryštálov, pri ktorej však ešte nevznikne tlak schopný poškodiť potrubie. Na ochranu proti roztrhnutiu stačí nižšia koncentrácia. Vyššia koncentrácia, ako je nevyhnutné, zbytočne zhoršuje vlastnosti zmesi.

Tabuľka 2.3. Bod tuhnutia zmesi voda–propylénglykol (inhibovaný propylénglykol) v závislosti od objemovej koncentrácie; typické hodnoty výrobcu [30].

obj. %	t_t [°C]	obj. %	t_t [°C]
10,0	−3,3	36,0	−16,4
20,3	−7,1	41,4	−21,1
25,5	−9,6	46,7	−26,7
30,7	−12,7	52,2	−33,5

Vplyv glykolu na prúdenie a prenos tepla

Pridanie glykolu mení všetky vlastnosti dôležité pre hydrauliku (tab. 2.4):

- **hustota** mierne vzrastie (o 2 % až 5 %),
- **merná tepelná kapacita** klesne (pri 40 % asi o 10 %),
- **viskozita** vzrastie niekoľkonásobne. Pri nízkych teplotách je nárast rádovo desaťnásobný.

Tabuľka 2.4. Porovnanie vlastností vody a zmesi so 40 % obj. propylénglykolu [1, 30].

	40 °C		10 °C	
	voda	PG 40 %	voda	PG 40 %
ρ [kg/m ³]	992,1	1026,5	999,7	1042,1
c_p [kJ/(kg · K)]	4,179	3,768	4,194	3,668
μ [mPa · s]	0,653	2,239	1,307	7,217
ν [mm ² /s]	0,658	2,181	1,307	6,926

Tieto zmeny sa prejavajú dvoma spôsobmi. Menšia merná tepelná kapacita znamená, že na prenos rovnakého tepla pri rovnakom rozdieli teplôt treba podľa (1.1) väčší prietok. Väčšia viskozita znamená menšie Reynoldsovo číslo, väčší súčiniteľ trenia a teda väčšiu tlakovú stratu pri danom prietoku. Oba vplyvy zvyšujú príkon čerpadla. Nasledujúci príklad ich vyčíslí. Vzťahy pre tlakovú stratu tu len použijeme, odvodíme ich v kap. 10.

Príklad 2.7 – Voda alebo nemrznúca zmes v solárnom okruhu

Solárnym okruhom s potrubím vnútorného priemeru $D = 20$ mm a ekvivalentnej dĺžky $L = 50$ m sa má prenášať tepelný tok 10 kW pri rozdieli teplôt 8 K. Stredná teplota kvapaliny je 40°C . Porovnajme prietok, tlakovú stratu a hydraulický výkon pre vodu a pre zmes so 40% propylénglykolu. Pri turbulentnom prúdení v hladkom potrubí použite Blasiov vzťah pre súčiniteľ trenia $\lambda = 0,3164 Re^{-1/4}$ a Darcyho–Weisbachovu rovnicu $\Delta p = \lambda (L/D) \rho v^2/2$.

Riešenie. Postup pre vodu (vlastnosti z tab. 2.4):

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{10\,000}{4179 \cdot 8} = 0,299 \text{ kg/s}, & Q &= \frac{0,299}{992,1} = 3,02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}, \\ v &= \frac{Q}{\pi D^2/4} = 0,960 \text{ m/s}, & Re &= \frac{vD}{\nu} = \frac{0,960 \cdot 0,02}{0,658 \cdot 10^{-6}} = 29\,200, \\ \lambda &= 0,3164 \cdot 29\,200^{-1/4} = 0,0242, & \Delta p &= 0,0242 \cdot \frac{50}{0,02} \cdot \frac{992,1 \cdot 0,960^2}{2} = 27,7 \text{ kPa}.\end{aligned}$$

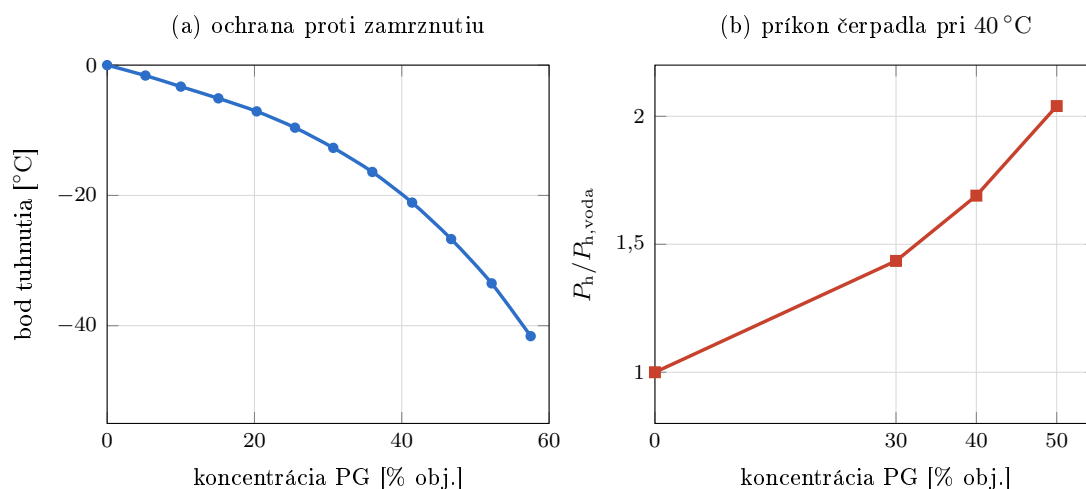
Rovnakým postupom pre zmes dostaneme výsledky v tabuľke:

	$\dot{m}$ [kg/s]	v [m/s]	Re	λ	Δp [kPa]	P_h [W]
voda	0,299	0,960	29 200	0,0242	27,7	8,3
PG 40 %	0,332	1,029	9 400	0,0321	43,6	14,1

Pri nemrznúcej zmesi treba o 11% väčší hmotnostný prietok. Tlaková strata vzrastie o 58% a hydraulický výkon čerpadla o 69% , hoci hustota sa zmenila len o $3,5\%$. Rozhodujúci je nárast viskozity.

Pri 10°C , napríklad pri rannom rozbehu systému, je kinematická viskozita zmesi viac ako trikrát väčšia ako pri 40°C . Reynoldsovo číslo klesne na hodnotu okolo $3\,000$, teda do prechodovej oblasti medzi laminárnym a turbulentným prúdením (kap. 9). Súčiniteľ trenia sa v tejto oblasti nedá spoľahlivo určiť. Čerpadlo však musí aj v tomto stave zabezpečiť potrebný prietok. ■

Obidva vplyvy koncentrácie glykolu zhrnuje obr. 2.8. Vyššia koncentrácia síce zlepšuje ochranu proti zamrznutiu, ale príkon čerpadla pri 50% je už dvojnásobkom príkonu pri vode.



Obr. 2.8. (a) Bod tuhnutia zmesi voda–propylénglykol [30], (b) pomerný hydraulický výkon čerpadla v okruhu z pr. 2.7 v závislosti od koncentrácie pri 40°C .

Aplikácia v OZE: odpoveď na úvodnú otázku

Po nahradení vody nemrznúcou zmesou sa hustota zmení len málo, ale viskozita vzrastie niekoľkonásobne a merná tepelná kapacita klesne. Na prenos rovnakého tepla treba väčší prietok. Pri tomto prietoku je Reynoldsovo číslo menšie a súčiniteľ trenia väčší, takže tlaková strata okruhu výrazne vzrastie. Čerpadlo pracujúce na rovnakej charakteristike sa posunie do bodu s menším prietokom (kap. 13), kolektor nie je dostatočne chladený a jeho teplota stúpa. Každé zvýšenie koncentrácie glykolu nad nevyhnutnú mieru preto zvyšuje tlakové straty a spotrebu elektriny čerpadla. Pri nízkych teplotách je tento vplyv najväčší.

Zhrnutie kapitoly

- Hustota kvapalín závisí najmä od teploty. Voda sa medzi 20 °C a 80 °C roztiahne asi o 2,7 %, čo musí zachytiť expanzná nádoba.
- Hustota plynov sa riadi stavovou rovnicou $\rho = p/(rT)$ s absolútnym tlakom a teplotou. Hustota vzduchu klesá s nadmorskou výškou, a s ňou aj výkon veternej turbíny.
- Objemový modul pružnosti vody je približne 2,1 GPa. Kvapaliny preto v hydraulike považujeme za nestlačiteľné. Stlačiteľnosť sa však prejaví pri hydraulickom ráze a pri ohreve uzavretej kvapaliny.
- Newtonov zákon viskozity $\tau = \mu du/dy$ je materiálovým vzťahom newtonovských tekutín. Viskozita kvapalín s teplotou klesá, viskozita plynov rastie.
- Režim prúdenia určuje kinematická viskozita $\nu = \mu/\rho$ prostredníctvom Reynoldsovo čísla.
- Povrchové napätie spôsobuje kapilaritu, ktorá ovplyvňuje meranie tlaku a využíva sa v tepelných trubiciach.
- Ak tlak kvapaliny klesne na tlak nasýtených pár, vzniká var a kavitácia.
- Nemrznúce zmesi majú výrazne väčšiu viskozitu a menšiu mernú tepelnú kapacitu ako voda. Zvyšujú preto tlakové straty a spotrebu čerpadla, najmä pri nízkych teplotách.

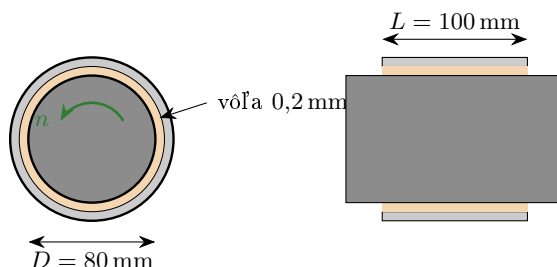
Kontrolné otázky

1. Definujte hustotu v bode tekutiny. Prečo potrebujeme hypotézu kontinua?
2. Ako súvisí súčiniteľ objemovej rozťažnosti so zmenou hustoty? Aký má jeho hodnota význam pre návrh expanznej nádoby?
3. Prečo je bioplyn z hľadiska bezpečnosti nebezpečnejší ako čistý metán, hoci obsahuje menej horľavej zložky?
4. Čo vyjadruje objemový modul pružnosti? Prečo kvapaliny v hydraulike považujeme za nestlačiteľné a kedy túto idealizáciu nemožno použiť?
5. Vysvetlite na úrovni molekúl, prečo viskozita kvapalín s teplotou klesá a viskozita plynov rastie.
6. Aký je rozdiel medzi dynamickou a kinematickou viskozitou? Ktorá z nich rozhoduje o režime prúdenia?

7. Zapište Newtonov zákon viskozity a vysvetlite význam jednotlivých veličín. Ktoré tekutiny ho nespĺňajú?
8. Prečo sa na meranie tlaku nepoužívajú trubice s priemerom 1 mm?
9. Kedy vzniká kavitácia? Prečo sa čerpadlá solárnych okruhov zaraďujú do spiatočky?
10. Prečo sa zmenou koncentrácie glykolu zvýši spotreba čerpadla, hoci sa hustota zmesi zmení len málo?

Úlohy na precvičenie

1. Uzavretý vykurovací systém obsahuje 250 L vody s teplotou 10°C . O koľko sa zväčší objem vody pri ohreve na 70°C ? (Hustoty z tab. B.1.) [5,7 L]
2. Určte hustotu vzduchu pri teplote -10°C a tlaku 95 kPa ($r = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$). O koľko percent sa líši od hustoty štandardnej atmosféry na úrovni mora? [$1,258 \text{ kg}/\text{m}^3$; +2,7 %]
3. Aký tlak treba na zmenšenie objemu vody o 0,5 %? ($K = 2,1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$) [10,5 MPa]
4. Pomocou vzťahu (2.10) vypočítajte viskozitu vody pri 25°C a 55°C a porovnajte s hodnotami interpolovanými z tab. B.1. [0,890 mPa · s; 0,501 mPa · s]
5. Pomocou Sutherlandovho vzťahu (2.11) vypočítajte dynamickú viskozitu vzduchu pri 0°C a 40°C . [$1,716 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$; $1,908 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$]
6. Hriadeľ s priemerom 80 mm sa otáča v ložisku dĺžky 100 mm s radiálnou vôľou 0,2 mm naplnenou olejom s viskozitou 0,05 Pa · s. Otáčky sú 1500/min. Určte trecí moment a stratový výkon. (Vôľu považujte za rovinnú štrbinu s lineárnym profilom rýchlosti.) [$1,58 \text{ N} \cdot \text{m}$; 248 W]



7. Aká je kapilárna elevácia vody pri 20°C v trubici s priemerom 6 mm? [5,0 mm]
8. Čerpadlo nasáva vodu s teplotou 80°C . Aký najmenší absolútny tlak musí byť na jeho vstupe, ak požadujeme rezervu 30 kPa nad tlakom nasýtených pár? [77,4 kPa]
9. Zopakujte výpočet z pr. 2.7 pre zmes s 30 % propylénglykolu pri 40°C ($\rho = 1\,019,6 \text{ kg}/\text{m}^3$, $c_p = 3,903 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, $\mu = 1,630 \text{ mPa} \cdot \text{s}$). [$Re \approx 12\,500$; $\Delta p \approx 38,1 \text{ kPa}$; $P_h \approx 12,0 \text{ W}$]
10. V tabuľkovom procesore alebo v Pythone zostrojte graf závislosti hydraulického výkonu z pr. 2.7 od koncentrácie glykolu (0 %, 30 %, 40 % a 50 %) pri 40°C . Údaje pre zmesi prevezmite z tab. B.3.

Kapitola 3

Tlak a hydrostatika

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent vypočíta tlakové pomery v pokojnej tekutine, určí tlak z údajov manometra a vypočíta veľkosť a pôsobisko hydrostatických síl na rovinné a zakrivené plochy. Vie tieto poznatky použiť pri návrhu expanznej nádoby, pri posúdení tlaku v okruhoch OZE a pri výpočte zaťaženia uzáverov a hatí malých vodných elektrární.

Kľúčové pojmy

tlak, absolútny tlak, pretlak, podtlak, hydrostatická rovnica, piezometrická výška, manometer, Pascalov zákon, tlaková sila, ťažisko, pôsobisko tlakovej sily, zaťažovací obrazec, vztlak, expanzná nádoba

Hydrostatika sa zaoberá tekutinami v pokoji. Tekutina v pokoji nemôže prenášať šmykové napätie (odd. 1.2). Na každú plochu preto pôsobí iba *kolmým* tlakom. Táto jednoduchá situácia má v energetike veľký praktický význam. Hydrostatika určuje tlak v uzavretých okruhoch a nádržiach, silu vody na hrádze, hate a uzávery, ale aj spád vodnej elektrárne. Zároveň je základom merania tlaku. Výklad nadväzuje na [1, 5]. Aplikácie na hate vychádzajú z [22, 23].

Na zamyslenie

Prečo musí byť v uzavretom vykurovacom okruhu rodinného domu pretlak asi 1,5 bar až 2 bar, hoci voda v ňom len obieha a nikam ju nečerpáme do výšky? A prečo sa segmentový uzáver hate s hmotnosťou niekoľkých ton dá zdvihnúť pomerne malou silou, hoci naň tlačí voda silou stoviek kilonewtonov?

3.1 Definícia tlaku

Tlak je podiel normálovej (kolmej) sily a plochy, na ktorú táto sila pôsobí. V bode ho definujeme limitou

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA} \quad [\text{Pa} = \text{N/m}^2]. \quad (3.1)$$

Tlak je *skalár*. V pokojnej tekutine má v danom bode rovnakú hodnotu vo všetkých smeroch. Dá sa to dokázať rovnováhou malého klinového elementu, pretože pri zmenšovaní elementu sa jeho tiaž zmenšuje rýchlejšie ako sily na jeho steny [1]. Smer má až sila, ktorou tlak pôsobí na konkrétnu plochu: $d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}dA$, kde $\mathbf{n}$ je vonkajšia normála plochy.

V technickej praxi sa okrem pascalu používajú aj ďalšie jednotky (tab. 3.1). Najmä pri starších prístrojoch a údajoch výrobcov treba jednotky správne prepočítať.

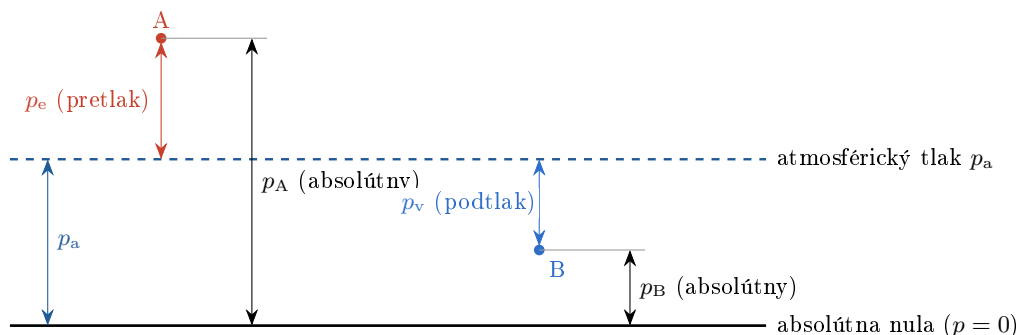
Tabuľka 3.1. Prepočet bežných jednotiek tlaku.

Jednotka	Značka	Hodnota v Pa
kilopascal	kPa	1 000
megapascal	MPa	10^6
bar	bar	10^5
fyzikálna atmosféra	atm	101 325
milimeter vodného stĺpca	mm v. st.	9,81
meter vodného stĺpca	m v. st.	9 810
milimeter ortuťového stĺpca	mmHg	133,3

3.2 Absolútny, atmosférický a pretlakový tlak

Tlak môžeme merať od dvoch rôznych nulových úrovní (obr. 3.1):

- **Absolútny tlak** p sa meria od absolútnej nuly, teda od tlaku dokonalého vákua. Je vždy kladný.
- **Pretlak** p_e je rozdiel absolútneho tlaku a atmosférického tlaku p_a , ak je absolútny tlak väčší ako atmosférický: $p_e = p - p_a$.
- **Podtlak** p_v je rozdiel atmosférického tlaku a menšieho absolútneho tlaku: $p_v = p_a - p$.



Obr. 3.1. Vzťah medzi absolútnym tlakom, pretlakom a podtlakom.

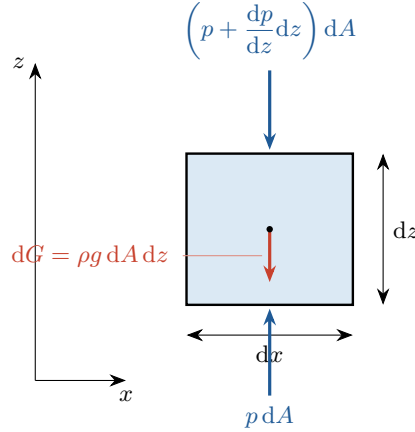
Atmosférický tlak meria barometer. Nie je konštantný. Mení sa s počasím v rozsahu niekoľkých percent a klesá s nadmorskou výškou. Normálny atmosférický tlak na úrovni mora je 101 325 Pa [26]. Bežné manometre ukazujú *pretlak*, pretože na ich meracie ústrojenstvo pôsobí z druhej strany atmosféra.

Pozor – častá chyba

Absolútny tlak treba vždy použiť v stavovej rovnici plynov (kap. 2 a 15), pri porovnaní s tlakom nasýtených pár (kavitácia) a pri výpočte expanznej nádoby (odd. 3.11). Pri tlakových rozdieloch a stratách je jedno, či počítame s absolútnym tlakom alebo s pretlakom. Pri zápise je vhodné uvádzať, o ktorý tlak ide, napr. „2,5 bar pretlak“ alebo „3,5 bar abs.“.

3.3 Hydrostatická rovnica

Uvažujme v pokojnej tekutine malý element tvaru hranola s vodorovnou plochou podstavy dA a výškou dz (obr. 3.2). Os z smeruje zvisle nahor. Na element pôsobia tlakové sily na podstavy a jeho tiaž. Sily na bočné steny sa vo vodorovnom smere navzájom rušia.



Obr. 3.2. Zvislé sily pôsobiace na element pokojnej tekutiny.

Rovnováha síl v smere osi z :

$$p \, dA - \left(p + \frac{dp}{dz} dz \right) dA - \rho g \, dA \, dz = 0.$$

Po úprave dostaneme *hydrostatickú rovnicu*:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (3.2)$$

Tlak v pokojnej tekutine teda klesá smerom nahor, a to tým rýchlejšie, čím je tekutina hustejšia. Vo vodorovnom smere sa tlak nemení. Všetky body na tej istej vodorovnej rovine v spojitnej pokojnej tekutine majú rovnaký tlak. Takúto plochu nazývame *hladinová plocha*.

Vo vektorovom tvare má rovnica tvar $\nabla p = \rho \mathbf{g}$. Tento zápis ukazuje, že gradient tlaku má smer tiažového zrýchlenia. Je to najjednoduchší prípad všeobecnej rovnice hybnosti, ku ktorej sa vrátíme v kap. 7 a 8.

3.4 Zmena tlaku s hĺbkou

Kvapaliny

Pri konštantnej hustote môžeme rovnicu (3.2) integrovať medzi dvoma bodmi:

$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1). \quad (3.3)$$

Ak meriame hĺbku h od voľnej hladiny, na ktorej pôsobí tlak p_0 , dostaneme známy vzťah

$$p = p_0 + \rho g h. \quad (3.4)$$

Tlak v kvapaline rastie s hĺbkou lineárne a nezávisí od tvaru nádoby (tzv. hydrostatický paradox).

Rovnicu (3.3) možno zapísať aj v tvare

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{konšt.} \quad (3.5)$$

Súčet geodetickej výšky z a tlakovej výšky $p/(\rho g)$ sa nazýva *piezometrická výška*. V pokojnej kvapaline je rovnaká v každom bode. Pri prúde sa pozdĺž potrubia mení a jej priebeh opisuje piezometrická čiara (kap. 6).

Vplyv zmeny hustoty

Ak sa hustota mení s výškou, napríklad pre rozdielnu teplotu, rovnicu (3.2) integrujeme po častiach. Rozdiel hustôt dvoch stĺpcov kvapaliny s rovnakou výškou H vytvára hnací tlakový rozdiel

$$\Delta p = (\rho_s - \rho_t) g H, \quad (3.6)$$

kde ρ_s je hustota studeného a ρ_t hustota teplého stĺpca (obr. 3.3). Na tomto princípe pracujú samotížne (termosifónové) solárne systémy, prirodzený ťah komínov a solárne komíny.

Príklad 3.1 – Hnací tlak termosifónového systému

V termosifónovom solárnom systéme je zásobník 2 m nad kolektorom. V stúpacom potrubí má voda teplotu 60°C , vo vratnom 20°C . Aký tlakový rozdiel poháňa cirkuláciu? Porovnajte ho s ťahom komína výšky 10 m s vnútornou teplotou spalín 40°C pri vonkajšej teplote 0°C . (Spaliny uvažujte s vlastnosťami vzduchu.)

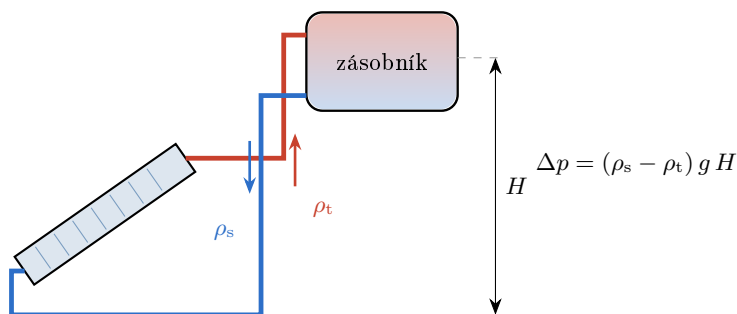
Riešenie. Podľa (3.6) s hustotami z tab. B.1:

$$\Delta p = (998,0 - 983,3) \cdot 9,81 \cdot 2 = 288 \text{ Pa.}$$

Pre komín s hustotami z tab. B.2:

$$\Delta p = (1,292 - 1,127) \cdot 9,81 \cdot 10 = 16 \text{ Pa.}$$

Oba tlaky sú veľmi malé. Obehové čerpadlo solárneho okruhu vytvára rozdiel tlakov desiatky kilopascalov. Samotížne systémy preto musia mať potrubie s veľkým priemerom a minimálnymi odpormi (kap. 10 a 11). ■



Obr. 3.3. Termosifónový solárny systém: teplejšia a ľahšia kvapalina v stúpacom potrubí a studenšia v zostupnom potrubí vytvárajú hnací tlak Δp .

Plyny

Hustota plynov je malá, preto sa tlak v plyne mení s výškou pomaly. V nádobách a potrubíach bežných rozmerov považujeme tlak plynu za konštantný. Pri veľkých výškových rozdieloch,

napríklad v atmosfére, treba zohľadniť, že hustota plynu klesá s tlakom. Pre izotermickú atmosféru dosadením $\rho = p/(rT)$ do (3.2) a integráciou dostaneme

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{rT}\right). \quad (3.7)$$

Skutočná atmosféra nie je izotermická. Teplota v troposfére klesá približne o 6,5 K na 1 km. Tento priebeh opisuje štandardná atmosféra [26].

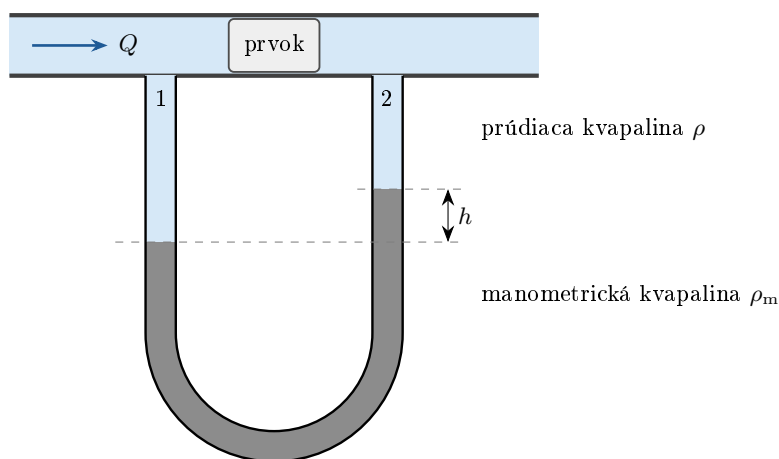
3.5 Manometre a meranie tlaku

Kvapalinové manometre

Kvapalinové manometre využívajú priamo hydrostatickú rovnicu. Tlak alebo tlakový rozdiel určíme z výšky stĺpca kvapaliny so známou hustotou.

- **Piezometrická trubica** je zvislá trubica pripojená k potrubiu alebo nádobe. Výška stĺpca h udáva pretlak $p_e = \rho gh$. Hodí sa len pre malé pretlaky kvapalín.
- **U-manometer** obsahuje manometrickú kvapalinu s väčšou hustotou ρ_m (voda, ortuť, farbený lieh). Umožňuje merať väčšie tlaky, podtlaky aj tlakové rozdiely.
- **Šikmý mikromanometer** má jedno rameno sklonené pod malým uhlom. Posun menisku pozdĺž ramena je preto väčší ako výškový rozdiel, čo umožňuje presnejšie odčítat malé tlaky, napríklad vo vzduchotechnike.
- **Barometer** meria atmosférický tlak ako výšku ortuťového stĺpca nad vákuom.

Pri výpočte tlaku z údajov manometra postupujeme po kvapalinovom stĺpci od jedného konca k druhému. Pri každom posune nadol tlak zväčšíme o $\rho g \Delta z$, pri posune nahor ho zmenšíme. V spojitých kvapalinách majú body na rovnakej výške rovnaký tlak.



Obr. 3.4. Diferenčný U-manometer na meranie tlakovej straty prvku potrubia (ventil, filter, výmenník, prietokomer).

Pre diferenčný manometer na obr. 3.4 postupujeme od bodu 1 nadol k spodnej hladine manometrickej kvapaliny, potom po manometrickej kvapaline nahor o h a znovu po prúdiacej kvapaline nahor k bodu 2. Členy s rovnakou výškou prúdiacej kvapaliny sa vyrušia a dostaneme

$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho) g h. \quad (3.8)$$

Ak sú body 1 a 2 v rôznej výške, pribudne člen $\rho g(z_2 - z_1)$.

Príklad 3.2 – Meranie tlakovej straty ortuťovým manometrom

Na meranie tlakovej straty výmenníka tepla s vodou ($\rho = 998 \text{ kg/m}^3$) je pripojený ortuťový U-manometer ($\rho_m = 13\,600 \text{ kg/m}^3$). Rozdiel hladín ortuti je 120 mm. Určte tlakovú stratu.

Riešenie. Podľa (3.8):

$$\Delta p = (13600 - 998) \cdot 9,81 \cdot 0,12 = 14,8 \text{ kPa}.$$

Ak by sme omylom použili iba hustotu ortuti, dostali by sme 16,0 kPa, teda chybu 8 %. Stĺpec vody nad ortuťou v ramene s nižším tlakom treba vždy odpočítat. ■

Mechanické a elektronické tlakomery

V technickej praxi sa najčastejšie používajú *deformačné manometre*. V Bourdonovom manometri sa pôsobením tlaku narovnáva zakrivená trubica a jej pohyb sa prenáša na ručičku. V membránových manometroch sa deformuje membrána. V meracích a riadiacich systémoch sa používajú *elektronické snímače tlaku*, ktoré deformáciu membrány premieňajú na elektrický signál tenzometrom, piezoelektrickým alebo kapacitným prvkom. Snímače merajú pretlak, absolútny tlak alebo tlakový rozdiel. Podrobný prehľad metód merania tlaku uvádza [14].

3.6 Pascalov zákon

Z rovnice (3.4) vyplýva, že ak na voľnej hladine zvýšime tlak p_0 o hodnotu Δp , zvýši sa o rovnakú hodnotu tlak v každom bode kvapaliny. Toto je *Pascalov zákon: tlak vyvolaný vonkajšou silou sa v pokojnej kvapaline šíri rovnako všetkými smermi*.

Na Pascalovom zákone je založený hydraulický lis a hydraulické zdvíhačky. Sila F_1 na malom piesti s plochou A_1 vyvolá tlak $p = F_1/A_1$, ktorý na veľkom piesti s plochou A_2 vytvorí silu

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}. \quad (3.9)$$

Energia sa pritom nezískava. Veľký piest sa posunie o toľko menej, o koľko je sila väčšia.

Pre energetické okruhy má Pascalov zákon iný, veľmi praktický význam. Tlak v uzavretom okruhu určuje jedno miesto, v ktorom je okruh spojený so zariadením na udržiavanie tlaku, najčastejšie s expanznou nádobou. Takéto miesto sa nazýva *neutrálny bod*. Tlak v ostatných miestach okruhu sa od tlaku v neutrálnom bode líši o hydrostatický rozdiel podľa výšky a počas prevádzky aj o tlakové rozdiely vyvolané čerpadlom a stratami.

Príklad 3.3 – Tlak v okruhu viacpodlažnej budovy

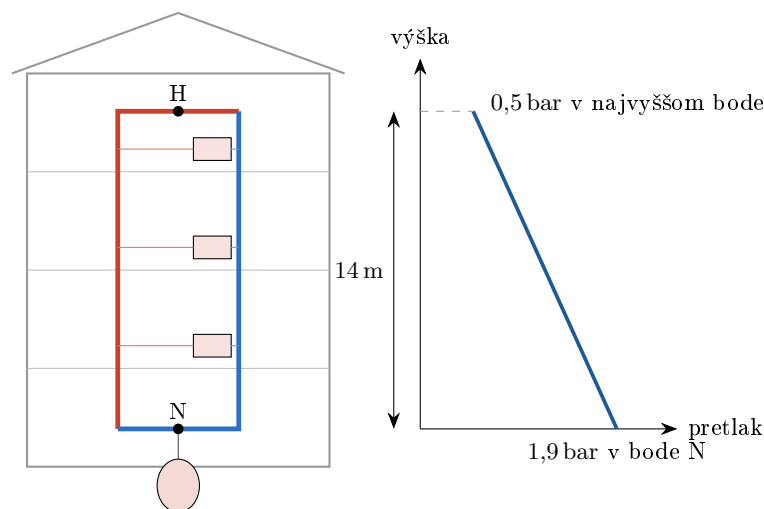
Expanzná nádoba vykurovacieho okruhu je v kotolni v suteréne. Najvyššie vykurovacie teleso je 14 m nad ňou. V najvyššom bode má byť pretlak aspoň 0,5 bar, aby sa do okruhu nenasával vzduch a voda nevrela. Aký najmenší pretlak musí byť v neutrálnom bode pri nečinnom čerpadle? ($\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$)

Riešenie. Podľa (3.3) je tlak v neutrálnom bode väčší o hydrostatický tlak stĺpca výšky 14 m:

$$p_{e,N} = p_{e,H} + \rho g H = 50\,000 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 14 = 187 \text{ kPa} \approx 1,9 \text{ bar}.$$

Tým je zodpovedaná prvá otázka zo začiatku kapitoly. Pretlak v okruhu nie je potrebný na „dopravu vody do výšky“. Je potrebný preto, aby v *najvyššom* bode okruhu neklesol tlak

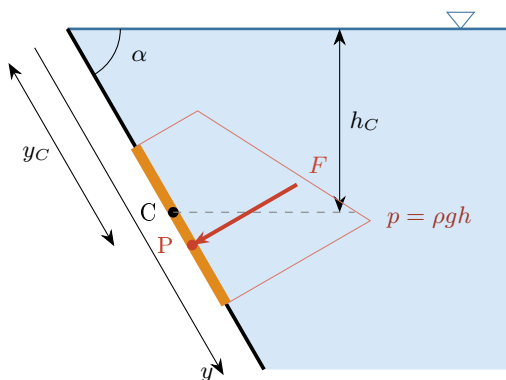
pod atmosférický.



Obr. 3.5. Uzavretý vykurovací okruh budovy s expanznou nádobou v neutrálnom bode N a priebeh pretlaku po výške pri nečinnom čerpadle (pr. 3.3).

3.7 Hydrostatická sila na rovinnú plochu

Uvažujme rovinnú plochu s obsahom A , ktorá je ponorená do kvapaliny a zvierá s hladinou uhol α (obr. 3.6). Súradnicu y meriame pozdĺž roviny plochy od priesečníka s hladinou. Hĺbka bodu je $h = y \sin \alpha$. Na hladinu aj na druhú stranu plochy pôsobí atmosférický tlak, ktorého účinok sa ruší. Preto počítame len s pretlakom $p = \rho gh$.



Obr. 3.6. Hydrostatická sila na šikmú rovinnú plochu. C je ťažisko plochy, P je pôsobisko sily.

Elementárna sila na plôšku dA je $dF = \rho gh dA = \rho g \sin \alpha y dA$. Všetky elementárne sily sú rovnobežné (kolmé na plochu), preto ich môžeme priamo sčítať:

$$F = \rho g \sin \alpha \int_A y dA = \rho g \sin \alpha y_C A,$$

kde sme využili definíciu ťažiska $\int_A y dA = y_C A$. Keďže $y_C \sin \alpha = h_C$ je hĺbka ťažiska, dostávame

$$F = \rho g h_C A = p_C A. \quad (3.10)$$

Veľkosť hydrostatickej sily na rovinnú plochu sa rovná súčinu tlaku v ťažisku plochy a jej obsahu. Nezávisí od sklonu plochy ani od tvaru nádoby.

Ak na hladine pôsobí tlak odlišný od tlaku na druhej strane plochy, napríklad v uzavretej nádobe s plynom pod tlakom p_0 , pripočítame k sile člen $(p_0 - p_a)A$. Ten pôsobí v ťažisku plochy.

3.8 Poloha pôsobiska tlakovej sily

Tlak rastie s hĺbkou. Pôsobisko výslednej sily P preto leží *hlbšie* ako ťažisko C . Jeho polohu určíme z rovnosti momentov k osi v hladine:

$$F y_P = \int_A y dF = \rho g \sin \alpha \int_A y^2 dA = \rho g \sin \alpha I_x,$$

kde I_x je kvadratický moment plochy k osi v hladine. Podľa Steinerovej vety je $I_x = I_C + y_C^2 A$, kde I_C je kvadratický moment k rovnobežnej osi cez ťažisko. Po dosadení (3.10) dostaneme

$$y_P = y_C + \frac{I_C}{y_C A}. \quad (3.11)$$

S rastúcou hĺbkou sa rozdiel $y_P - y_C$ znižuje. Pri hlboko ponorenej ploche takmer splýva s ťažiskom. Kvadratické momenty najčastejších tvarov sú v tab. 3.2. Pre plochy súmerné podľa zvislej osi leží pôsobisko na tejto osi.

Tabuľka 3.2. Obsah a kvadratický moment I_C k vodorovnej osi cez ťažisko.

Tvar	A	I_C
obdĺžnik šírky b a výšky a	ba	$ba^3/12$
kruh s priemerom D	$\pi D^2/4$	$\pi D^4/64$
trojuholník so základňou b a výškou a	$ba/2$	$ba^3/36$

Zaťažovací obrazec

Pre obdĺžnikové plochy s vodorovnou hornou hranou, akými sú steny nádrží, stavidlá a hate, je názornejší grafický postup. Rozloženie pretlaku pozdĺž výšky steny nakreslíme ako *zaťažovací obrazec* (v hydrotechnike aj *poradnica tlaku*). Pre zvislú stenu siahajúcu od hladiny je to trojuholník s najväčšou hodnotou ρgh pri dne. Sila na jednotku šírky steny (obr. 3.7) sa rovná ploche obrazca a pôsobí v jeho ťažisku:

$$F' = \frac{1}{2} \rho g h^2 \quad [\text{N/m}], \quad \text{pôsobisko vo výške } h/3 \text{ nade dnom.} \quad (3.12)$$

V hydrotechnickej praxi sa objemová tiaž vody často zaokrúhľuje na $\gamma = \rho g = 10 \text{ kN/m}^3$ [22].

Príklad 3.4 – Sila na tabuľové stavidlo

Zvislé obdĺžnikové stavidlo šírky $b = 2 \text{ m}$ uzatvára prírodný kanál malej vodnej elektrárne. Hĺbka vody pred stavidlom je $h = 3 \text{ m}$, za stavidlom nie je voda. Určte veľkosť a pôsobisko hydrostatickej sily.

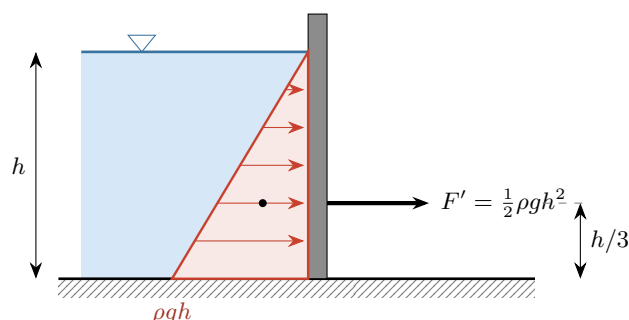
Riešenie. Ťažisko stavidla je v hĺbke $h_C = 1,5 \text{ m}$. Podľa (3.10):

$$F = \rho g h_C A = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,5 \cdot (2 \cdot 3) = 88,3 \text{ kN}.$$

Pôsobisko podľa (3.11) (zvislá stena, $y = h$):

$$y_P = 1,5 + \frac{2 \cdot 3^3/12}{1,5 \cdot 6} = 1,5 + 0,5 = 2,0 \text{ m}.$$

Sila pôsobí v hĺbke 2 m, teda v jednej tretine výšky nade dnom, v súlade s (3.12). Stavidlo sa pri zdvíhaní pritláča k drážkam touto silou. Trenie v drážkach preto výrazne zvyšuje silu potrebnú na zdvihnutie [22]. ■



Obr. 3.7. Trojuholníkový zaťažovací obrazec na zvislom stavidle. Výslednica sa rovná ploche obrazca a pôsobí vo výške $h/3$ nade dnom.

Príklad 3.5 – Kruhový revízny otvor v stene nádrže

Vo zvislej stene akumuláčnej nádrže je kruhový revízny otvor s priemerom 0,6 m. Jeho stred je 3 m pod hladinou. Určte silu na veko a vzdialenosť jej pôsobiska od stredu otvoru.

Riešenie. $A = \pi \cdot 0,6^2/4 = 0,283 \text{ m}^2$, $F = 1000 \cdot 9,81 \cdot 3 \cdot 0,283 = 8,32 \text{ kN}$.

$$y_P - y_C = \frac{I_C}{y_C A} = \frac{\pi D^4/64}{y_C \pi D^2/4} = \frac{D^2}{16 y_C} = \frac{0,36}{48} = 7,5 \text{ mm}.$$

Pôsobisko je len 7,5 mm pod stredom otvoru. Pri výpočte skrutiek veka ho možno stotožniť so stredom. ■

3.9 Hydrostatická sila na zakrivenú plochu

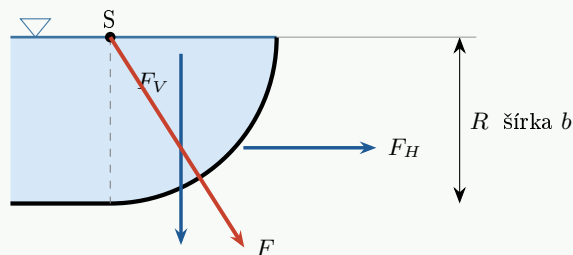
Na zakrivenú plochu pôsobia elementárne tlakové sily v rôznych smeroch. Nemožno ich preto sčítat priamo. Výslednicu určíme pomocou jej vodorovnej a zvislej zložky [1]:

- **Vodorovná zložka** F_H sa rovná sile na *priemet* zakrivenej plochy do zvislej roviny. Vypočítame ju ako silu na rovinnú plochu podľa (3.10) a jej pôsobisko podľa (3.11).
- **Zvislá zložka** F_V sa rovná tiaži kvapaliny nad zakrivenou plochou až po hladinu: $F_V = \rho g V$. Ak je kvapalina pod plochou, uvažujeme *fiktívny* objem medzi plochou a úrovňou hladiny. Sila potom smeruje nahor. Zvislá zložka pôsobí v ťažisku tohto objemu.

Veľkosť výslednice je $F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$ a jej sklon $\tan \varphi = F_V/F_H$. Každá elementárna tlaková sila je kolmá na plochu. Na kruhovej valcovej ploche preto všetky prechádzajú osou valca, a teda aj *výslednica prechádza stredom krivosti*.

Príklad 3.6 – Sila na valcovú stenu

Stena nádrže má tvar štvrťvalca s polomerom $R = 2 \text{ m}$ a šírkou $b = 3 \text{ m}$ (obr. 3.8). Hladina vody je vo výške horného okraja zakrivenej časti. Určte zložky a výslednicu hydrostatickej sily.



Obr. 3.8. Hydrostatická sila na zakrivenú stenu tvaru štvrtvalca. Výslednica F prechádza stredom krivosti S .

Riešenie. Priemet steny do zvislej roviny je obdĺžnik s výškou R a šírkou b s ťažiskom v hĺbke $R/2$:

$$F_H = \rho g \frac{R}{2} R b = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 58,9 \text{ kN}.$$

Nad zakrivenou stenou je voda v objeme štvrtvalca:

$$F_V = \rho g \frac{\pi R^2}{4} b = 1000 \cdot 9,81 \cdot \pi \cdot 3 = 92,5 \text{ kN}.$$

Výslednica má veľkosť $F = \sqrt{58,9^2 + 92,5^2} = 109,6 \text{ kN}$, sklon $\varphi = \arctan(92,5/58,9) = 57,5^\circ$ od vodorovnej roviny a prechádza stredom krivosti S . ■

Aplikácia v OZE: segmentový uzáver hate

Segmentový uzáver má hradiacu stenu tvaru časti valcovej plochy, ktorá je ramenami pripojená k čapom v pilieroch. Os čapov je totožná s osou valcovej plochy. Podľa predchádzajúceho výkladu preto výslednica síl od tlaku vody prechádza osou otáčania. Tlak vody nevytvára k čapom nijaký moment a na zdvihnutie uzáveru stačí sila, ktorá prekoná jeho tiaž a trenie v čapoch a tesneniach [22]. Tým je zodpovedaná druhá otázka zo začiatku kapitoly. Tabuľové stavidlo sa naproti tomu zdvíha po drážkach, ku ktorým je pritláčané celou hydrostatickou silou.

3.10 Archimedov zákon a vztlak

Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované silou, ktorá sa rovná tiaži kvapaliny rovnakého objemu, ako je ponorený objem telesa (*Archimedov zákon*):

$$F_{vz} = \rho g V_p. \quad (3.13)$$

Zákon je priamym dôsledkom predchádzajúceho výkladu. Vodorovné zložky tlakových síl na povrch telesa sa rušia. Zvislá zložka sa rovná rozdielu tlakových síl na spodnú a hornú časť povrchu, teda tiaži kvapaliny v objeme telesa. Vztlaková sila pôsobí v ťažisku ponoreného objemu, ktoré sa nazýva *centrum vztlaku*.

Teleso pláva, ak je jeho tiaž menšia ako vztlaková sila pri úplnom ponorení. Ponorí sa potom práve do takej hĺbky, pri ktorej sa vztlak rovná jeho tiaži. Pri plávajúcich telesách treba posúdiť aj *stabilitu*. Ak sa teleso nakloní, centrum vztlaku sa posunie. Teleso je stabilné, ak vzniknutý moment vztlaku a tiaže pôsobí proti nakloneniu, teda teleso vzpriamuje [1].

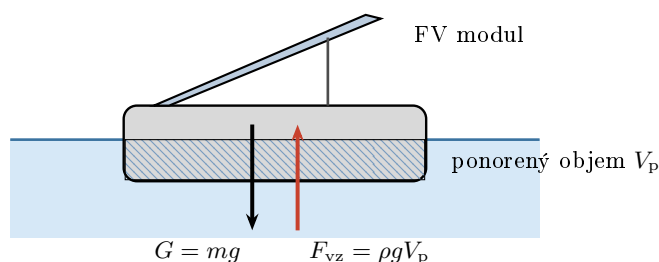
Príklad 3.7 – Plavák plávajúcej fotovoltaickej elektrárne

Jeden fotovoltaický modul s nosnou konštrukciou má hmotnosť 40 kg a je uložený na plaváku s objemom $0,12 \text{ m}^3$ a vlastnou hmotnosťou 10 kg. Aká časť objemu plaváka bude ponorená vo vode s hustotou 998 kg/m^3 ? Aké dodatočné zaťaženie, napríklad snehom alebo pri údržbe, plavák unesie?

Riešenie. Pri plávaní sa vztlak rovná tiaži: $\rho g V_p = mg$, teda

$$V_p = \frac{m}{\rho} = \frac{50}{998} = 0,050 \text{ m}^3.$$

Ponorená je asi 42 % objemu plaváka. Pri úplnom ponorení by vztlak uniesol hmotnosť $998 \cdot 0,12 = 120 \text{ kg}$. Dodatočné zaťaženie teda môže dosiahnuť nanajvýš asi 70 kg. V praxi sa ponecháva bezpečnostná rezerva. ■



Obr. 3.9. Plavák plávajúcej fotovoltaickej elektrárne: tiaž je v rovnováhe so vztlakom ponoreného objemu V_p .

Vztlak treba zohľadniť aj pri návrhu podzemných nádrží a šácht (nebezpečenstvo vyplávania prázdnej nádrže pri vysokej hladine podzemnej vody), pri vztlaku pod základmi hatí a hrádzí [22] a pri plávajúcich zariadeniach OZE: plávajúcich fotovoltaických elektrárňach, plávajúcich veterných turbínach na mori a zariadeniach na využitie energie vln.

3.11 Tlak v nádržiach a zásobníkoch

Otvorené a uzavreté nádrže

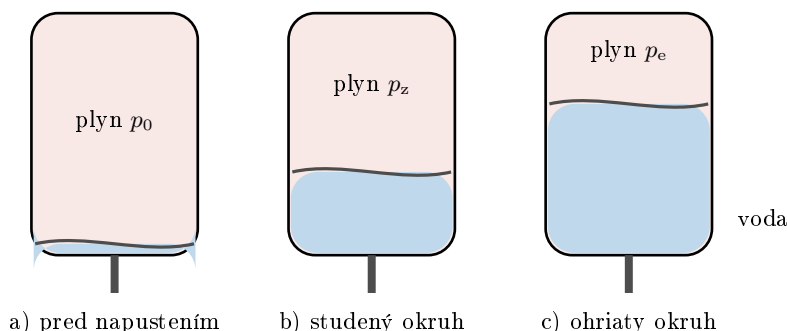
V otvorenej nádrži pôsobí na hladine atmosférický tlak a pretlak v hĺbke h je ρgh . V uzavretej nádrži s plynovým vankúšom s tlakom p_0 platí (3.4) s touto hodnotou. Pri veľkých akumulčných zásobníkoch tepla určuje hydrostatický tlak pri dne hrúbku steny. V zásobníku výšky 20 m je pri dne pretlak asi 2 bar.

Expanzná nádoba

Expanzná nádoba zachytáva zmenu objemu kvapaliny v uzavretom okruhu (pr. 2.1) a udržiava v ňom tlak v predpísaných medziach. V membránovej expanznej nádobe je vodná časť oddelená od plynovej (dusík alebo vzduch) pružnou membránou (obr. 3.10).

- Pred pripojením k okruhu je plyn natlakovaný na *plniaci tlak* p_0 , ktorý zodpovedá hydrostatickej výške okruhu nad nádobou s malou rezervou.
- Pri napustení studeného okruhu vnikne do nádoby malé množstvo vody a tlak stúpne na *začiatkový tlak* p_z .

- c) Pri ohreve sa objem vody zväčší o ΔV . Voda stlačí plyn a tlak stúpne na *konečný tlak* p_e , ktorý musí byť nižší ako otvárací tlak poistného ventilu.



Obr. 3.10. Membránová expanzná nádoba: a) pred napustením okruhu, b) v studenom okruhu, c) v ohriatom okruhu.

Stláčanie plynu je pomalé a môžeme ho považovať za izotermické. Platí teda Boylov zákon $p_0 V_n = p_e (V_n - \Delta V)$, kde V_n je objem nádoby a tlaky sú *absolútne*. Odtiaľ potrebný objem nádoby

$$V_n = \Delta V \frac{p_e}{p_e - p_0}. \quad (3.14)$$

V skutočnom návrhu sa pripočítava aj objem vodnej rezervy a pri solárnych systémoch objem kvapaliny vytlačenej z kolektorov pri stagnácii. Podrobný postup predpisujú príslušné normy.

Príklad 3.8 – Objem expanznej nádoby

Pre okruh z pr. 2.1 ($\Delta V = 27 \text{ L}$) určte objem expanznej nádoby. Plniaci tlak je 1,5 bar pretlak, najvyšší prípustný tlak 5,5 bar pretlak (poistný ventil 6 bar). Atmosférický tlak je 1,013 bar.

Riešenie. Absolútne tlaky: $p_0 = 1,5 + 1,013 = 2,513 \text{ bar}$, $p_e = 5,5 + 1,013 = 6,513 \text{ bar}$. Podľa (3.14):

$$V_n = 27 \cdot \frac{6,513}{6,513 - 2,513} = 44 \text{ L}.$$

Zvolíme najbližšiu väčšiu typovú veľkosť, napríklad 50 L. Ak by sme omylom dosadili pretlaky, vyšlo by $27 \cdot 5,5/4 = 37 \text{ L}$ a nádoba by bola poddimenzovaná. ■

3.12 Hydrostatika vo vodnej energetike

Spád ako hydrostatická veličina

Hrubý spád vodnej elektrárne je rozdiel polôh hladín hornej a dolnej vody (obr. 1.8). Pri nulovom prietoku je pretlak na vstupe do turbíny, ktorá leží pod hladinou dolnej vody alebo tesne nad ňou, určený hydrostatickou rovnicou $p_e = \rho g H$. Každých 10 m spádu zodpovedá približne 1 bar. Pri prevádzke sa časť tohto tlaku premení na kinetickú energiu a časť sa stratí trením (kap. 6 a 14).

Príklad 3.9 – Statický tlak v privádzači

Derivačná malá vodná elektráreň má hrubý spád 120 m. Aký je pretlak v najnižšom bode privádzača pri odstavení turbíny a uzavretom predturbínovom uzávere?

Riešenie. $p_e = \rho g H = 1000 \cdot 9,81 \cdot 120 = 1,18 \text{ MPa} \approx 11,8 \text{ bar}$. Potrubie aj armatúry musia byť dimenzované na tento tlak. Navyše musia odolávať prírastku tlaku pri hydraulickom ráze,

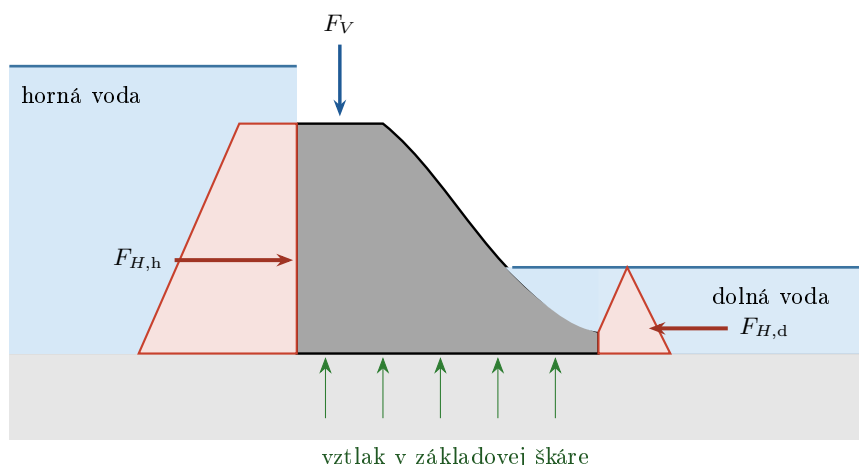
ktorý pri rýchlom zatváraní uzáveru môže byť násobkom statického tlaku (odd. 2.3). Preto sa volí napr. tlaková trieda PN 16 alebo PN 25. ■

Zaťaženie hatí a hrádzí

Hať vzdúva hladinu v rieke a vytvára spád pre malú vodnú elektráreň. Na jej konštrukciu pôsobí zo strany hornej aj dolnej vody hydrostatický tlak. Podľa [22, 23] sa

- vodorovná zložka sily určí zo zaťažovacieho obrazca (obr. 3.11) podľa (3.12), osobitne pre hornú a dolnú vodu,
- zvislá zložka sa určí ako tiaž vody nad konštrukciou $F_V = \gamma S_V$ na jednotku šírky, kde S_V je plocha zaťažovacieho obrazca zvislého tlaku,
- ďalej sa uvažuje vztlak v základovej škáre a tlak vody v dilatačných škárach.

Pri prepúšťaní vody pôsobí na konštrukciu aj *hydrodynamický* tlak, ktorý môže vyvolať kmitanie, otrasy alebo rázy. Pri približnom výpočte sa jeho vplyv zavádza dynamickým súčiniteľom $\delta = 1,3$ až $2,0$, ktorým sa násobí hydrostatické zaťaženie [22]. Z výsledníc všetkých síl sa potom posudzuje stabilita hate proti posunutiu a preklopeniu.



Obr. 3.11. Hydrostatické zaťaženie hate: zaťažovacie obrazce vodorovného tlaku od hornej a dolnej vody, zvislá zložka od vody nad konštrukciou a vztlak v základovej škáre (podľa [22]).

Projektová úloha: hydrostatické zaťaženie uzáveru malej vodnej nádrže

Malá vodná nádrž slúži ako zdrž pre MVE. Výpustný objekt je uzavretý zvislým tabuľovým stavidlom šírky 3 m a výšky 2,5 m, ktorého spodná hrana je na dne. Normálna hladina je 4 m nad dnom, maximálna hladina pri povodni 5,2 m. Za stavidlom je dolná voda s hĺbkou 0 m až 1,2 m.

1. Nakreslite zaťažovacie obrazce od hornej a dolnej vody pre normálnu a maximálnu hladinu.
2. Určte výslednú vodorovnú silu na stavidlo a jej pôsobisko pre všetky kombinácie hladín. Rozhodnite, ktorý stav je rozhodujúci.
3. Odhadnite silu potrebnú na zdvihnutie stavidla, ak je súčiniteľ trenia v drážkach 0,4 a hmotnosť stavidla 1,8 t.
4. Navrhnite alternatívu so segmentovým uzáverom s polomerom 4 m. Určte veľkosť a

smer výslednice a porovnajte silu na zdvíhanie s tabuľovým stavidlom.

5. Výpočet spracujte v tabuľkovom procesore alebo v Pythone tak, aby bolo možné meniť hladiny a rozmery. Výsledky zhrňte v krátkej technickej správe.

Zhrnutie kapitoly

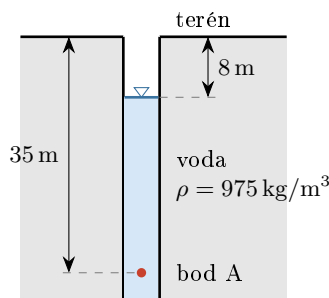
- V pokojnej tekutine pôsobí tlak kolmo na každú plochu a v danom bode je rovnaký vo všetkých smeroch.
- Absolútny tlak meriame od vákua, pretlak a podtlak od atmosférického tlaku. V stavovej rovnici a pri expanzných nádobách treba používať absolútny tlak.
- Hydrostatická rovnica $dp/dz = -\rho g$ vedie pre kvapalinu k vzťahu $p = p_0 + \rho gh$. Pretlak 1 bar zodpovedá približne 10 m vodného stĺpca.
- Rozdiel hustôt teplej a studenej kvapaliny vytvára hnací tlak samotížnych systémov. Tento tlak je v porovnaní s čerpadlom veľmi malý.
- Diferenčný manometer meria $\Delta p = (\rho_m - \rho)gh$.
- Sila na rovinnú plochu je $F = \rho gh_C A$ a pôsobí pod ťažiskom v hĺbke danej vzťahom $y_P = y_C + I_C/(y_C A)$.
- Na zakrivenú plochu počítame vodorovnú zložku z priemetu a zvislú z tiaže kvapaliny nad plochou. Na valcovej ploche výslednica prechádza stredom krivosti, čo využívajú segmentové uzávery.
- Objem expanznej nádoby vychádza z Boylevho zákona s absolútnymi tlakmi.

Kontrolné otázky

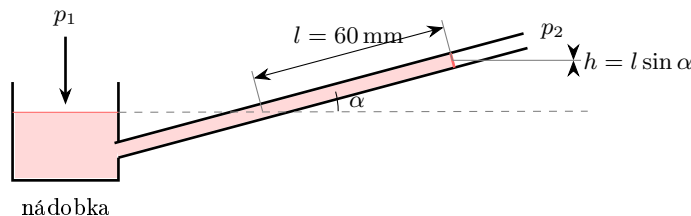
1. Prečo je tlak skalár, hoci je definovaný pomocou sily?
2. Aký je rozdiel medzi absolútnym tlakom a pretlakom? Uveďte tri situácie, v ktorých musíte použiť absolútny tlak.
3. Odvoďte hydrostatickú rovnicu z rovnováhy síl na element tekutiny.
4. Čo je hydrostatický paradox? Prečo tlak na dne nezávisí od tvaru nádoby?
5. Na akom princípe pracuje termosifónový solárny systém? Prečo musí mať potrubie s väčším priemerom ako systém s čerpadlom?
6. Prečo sa pri diferenčnom manometri odpočítava hustota prúdiacej kvapaliny od hustoty manometrickej kvapaliny?
7. Čo je neutrálny bod uzavretého okruhu a prečo sa pretlak v okruhu určuje podľa najvyššieho bodu?
8. Prečo pôsobisko hydrostatickej sily leží pod ťažiskom plochy? Kedy sa k nemu približuje?
9. Ako určíte zvislú zložku hydrostatickej sily, ak je kvapalina pod zakrivenou plochou?
10. Prečo je sila potrebná na zdvihnutie segmentového uzáveru podstatne menšia ako pri tabuľovom stavidle?

Úlohy na precvičenie

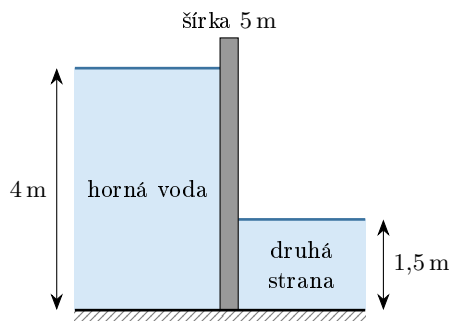
1. Manometer na potrubí ukazuje pretlak 3,2 bar, barometer 98,5 kPa. Aký je absolútny tlak v potrubí? [418,5 kPa]
2. Vákuometer na sacom hrdle čerpadla ukazuje podtlak 0,55 bar pri atmosférickom tlaku 101,3 kPa. Čerpaná voda má teplotu 70 °C. Hrozí kavitácia? [$p = 46,3 \text{ kPa} > p_s = 31,2 \text{ kPa}$; na vstupe nie, rezerva je však malá]
3. Aký je pretlak v hĺbke 35 m v geotermálnom vrte naplnenom vodou so strednou hustotou 975 kg/m^3 , ak je hladina vo vrte 8 m pod terénom? Hĺbkou meriame od terénu. [258 kPa]



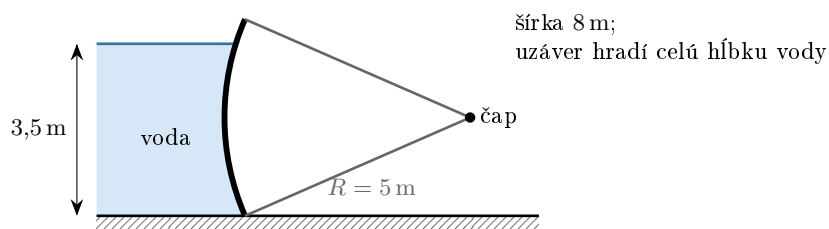
4. Ortuťový diferenčný manometer pripojený k Venturiho trubici s vodou (obr. 3.4 a 6.7) ukazuje rozdiel hladín 85 mm. Určte tlakový rozdiel. [10,5 kPa]
5. Šikmý mikromanometer naplnený liehom ($\rho = 800 \text{ kg/m}^3$) má rameno sklonené pod uhlom 10°. Posun menisku je 60 mm. Aký tlakový rozdiel vzduchu meria? [81,8 Pa]



6. Zvislá stena nádrže široká 5 m je zaťažaná vodou s hĺbkou 4 m. Určte silu a jej pôsobisko. Ako sa zmenia, ak na druhej strane steny bude voda s hĺbkou 1,5 m? [392 kN, 1,33 m nade dnom; 337 kN, 1,47 m nade dnom]



7. Kruhový uzáver s priemerom 1 m je vo zvislej stene, jeho stred je 6 m pod hladinou. Určte silu a polohu pôsobiska. [46,2 kN; 10,4 mm pod stredom]
8. Segmentový uzáver s polomerom 5 m a šírkou 8 m zadržiava vodu s hĺbkou 3,5 m. Uzáver hradí celú hĺbkou vody. Určte vodorovnú zložku hydrostatickej sily. [481 kN]



9. Oceľová podzemná nádrž na dažďovú vodu má vonkajší objem 6 m^3 a hmotnosť $1,2 \text{ t}$. Pri akom najmenšom objeme vody v nádrži nevypláva, ak je úplne ponorená v podzemnej vode? [$4,8 \text{ m}^3$]
10. Vypočítajte objem expanznej nádoby pre solárny okruh s objemom kvapaliny 60 L , ak je objemová rozťažnosť zmesi 6% a pri stagnácii sa z kolektorov vytlačí 8 L . Plniaci tlak je $2,0 \text{ bar}$, konečný $5,0 \text{ bar}$ (oba ako pretlak). [23 L]

Časť II

Kinematika a bilančné zákony

Kapitola 4

Kinematika prúdenia

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent opíše rýchlostné pole eulerovským spôsobom, určí zrýchlenie častice tekutiny, rozlíši prúdnicu a trajektóriu a vypočíta objemový a hmotnostný prietok cez zadanú plochu. Vie vysvetliť, prečo vzťah $Q = Av$ používa strednú prierezovú rýchlosť, a určiť ju z nameraného rýchlostného profilu v potrubí, v koryte aj v prúde vetra.

Kľúčové pojmy

lagrangeovský a eulerovský opis, rýchlostné pole, materiálová derivácia, lokálne a konvektívne zrýchlenie, prúdnicu, trajektória, čiara vytekania, prúdová trubica, ustálené a rovnomerné prúdenie, objemový a hmotnostný prietok, stredná prierezová rýchlosť, rýchlostný profil, vírivosť

Kinematika opisuje pohyb tekutiny bez ohľadu na sily, ktoré ho spôsobujú. Odpovedá na otázky, ako sa tekutina pohybuje: akou rýchlosťou, po akých dráhach, s akým zrýchlením a koľko jej pretečie danou plochou. Otázkou, *prečo* sa tak pohybuje, sa zaoberajú bilancie hybnosti a energie v ďalších kapitolách.

Pre energetiku je z kinematiky najdôležitejší pojem *prietok*. Prietok teplotnej kvapaliny určuje prenesený tepelný výkon, prietok vody turbínou výkon vodnej elektrárne a prietok vzduchu rotorom výkon veternej turbíny. Kapitola vychádza z [1, 5].

Na zamyslenie

Rýchlosť vody v potrubí nie je v celom priereze rovnaká. Pri stene je nulová, v osi najväčšia. Ultrazvukový prietokomer meria rýchlosť pozdĺž jednej dráhy, hydrometrická vrtuľka v rieke rýchlosť v jednom bode a anemometer na stožiarí rýchlosť vetra v jednej výške. Akú rýchlosť máme teda dosadiť do vzťahu $Q = Av$? A akú rýchlosť vetra máme dosadiť do vzťahu pre výkon turbíny, ak sa rýchlosť mení s výškou?

4.1 Eulerovský a lagrangeovský opis

Pohyb tekutiny môžeme opísať dvoma spôsobmi (obr. 4.1).

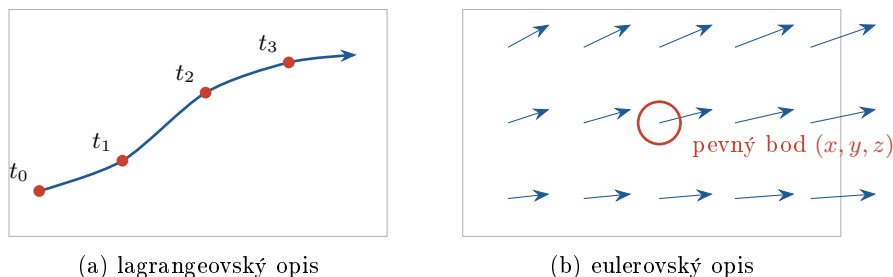
Lagrangeovský opis sleduje jednotlivé *častice* tekutiny. Pre každú časticu, označenú napríklad jej polohou $\mathbf{r}_0$ v čase t_0 , zapisujeme polohu ako funkciu času $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$. Rýchlosť a zrýchlenie častice sú prvou a druhou deriváciou polohy podľa času, rovnako ako v mechanike hmotného

bod. Tento prístup je názorný, ale pre tekutinu s nesmiernym počtom častíc nepraktický. Používa sa pri sledovaní jednotlivých častíc, napríklad kvapiek, bublín alebo sedimentov, a v niektorých meracích metódach.

Eulerovský opis sa nepýta, kde je daná častica, ale *aká je rýchlosť v danom bode priestoru v danom čase*. Pracuje s poľami veličín (odd. 1.5):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t), \quad p = p(x, y, z, t), \quad \rho = \rho(x, y, z, t). \quad (4.1)$$

Takto pracujú aj meracie prístroje, ktoré sú upevnené na jednom mieste, a numerické metódy CFD. V mechanike tekutín preto prevažne používame eulerovský opis [1].



Obr. 4.1. Dva spôsoby opisu pohybu tekutiny: (a) sledujeme polohu jednej častice v čase, (b) sledujeme rýchlosť v pevných bodoch priestoru.

Zrýchlenie častice a materiálová derivácia

Pri eulerovskom opise nie je zrýchlenie častice jednoduchou časovou deriváciou rýchlosti v pevnom bode. Častica sa totiž za čas dt presunie do iného bodu, v ktorom môže byť iná rýchlosť. Zmena rýchlosti častice je preto

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz,$$

pričom $dx = v_x dt$, $dy = v_y dt$, $dz = v_z dt$. Zrýchlenie častice je

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\text{lokálne}} + \underbrace{v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}}_{\text{konvektívne}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (4.2)$$

Operátor D/Dt sa nazýva *materiálová (substanciálna) derivácia*. Vyjadruje zmenu veličiny, ktorú „cíti“ pohybujúca sa častica. Rovnako ho možno použiť na akúkoľvek veličinu, napríklad na teplotu: $DT/Dt = \partial T/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T$.

Zrýchlenie má dve zložky:

- **Lokálne zrýchlenie** $\partial \mathbf{v}/\partial t$ vzniká pri zmene rýchlosti s časom v danom bode, napríklad pri rozbehu čerpadla alebo zatváraní ventilu.
- **Konvektívne zrýchlenie** $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ vzniká pri presune častice do miesta s inou rýchlosťou, napríklad v zužujúcej sa dýze, aj keď sa prúdenie s časom nemení.

Príklad 4.1 – Konvektívne zrýchlenie v dýze

V dýze dĺžky $L = 0,5$ m sa rýchlosť ustáleného prúdu mení lineárne z $v_1 = 2$ m/s na vstupe na $v_2 = 4$ m/s na výstupe: $v(x) = v_1(1 + x/L)$. Určte zrýchlenie častice na vstupe a na

výstupe.

Riešenie. Prúdenie je ustálené, lokálne zrýchlenie je nulové. Konvektívne zrýchlenie v 1D je

$$a = v \frac{dv}{dx} = v_1 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \frac{v_1}{L}.$$

Na vstupe ($x = 0$): $a = 2 \cdot 2/0,5 = 8 \text{ m/s}^2$. Na výstupe ($x = L$): $a = 4 \cdot 2/0,5 = 16 \text{ m/s}^2$, čo je asi $1,6g$. Hoci sa v žiadnom bode rýchlosť s časom nemení, každá častica sa v dýze výrazne zrýchľuje. Silu potrebnú na toto zrýchlenie dodáva tlakový rozdiel medzi vstupom a výstupom (kap. 6). ■

4.2 Rýchlostné pole

Rýchlostné pole priraduje každému bodu vektor rýchlosti

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}. \quad (4.3)$$

Poznať rýchlostné pole znamená poznať pohyb tekutiny úplne. Z neho možno určiť zrýchlenie (4.2), prietoky, rotáciu aj deformáciu tekutiny. Tlakové pole potom vyplýva z bilancie hybnosti.

V technických úlohách rýchlostné pole analyticky poznáme len zriedka. Získavame ho meraním (Prandtlova trubica, termooanemometer, laserová dopplerovská anemometria, PIV) [14] alebo numerickou simuláciou. Jednoduché analytické polia sú však užitočné na pochopenie základných pojmov.

Príklad 4.2 – Prúdenie k stene (stagnačný bod)

Dvojmerné ustálené prúdenie proti rovinnej stene $y = 0$ opisuje pole $v_x = ax$, $v_y = -ay$ s konštantou $a = 2/\text{s}$. Určte rýchlosť a zrýchlenie v bode $(1; 1)$ m a tvar prúdnic.

Riešenie. V bode $(1; 1)$ je $\mathbf{v} = (2; -2) \text{ m/s}$, $|\mathbf{v}| = 2,83 \text{ m/s}$. Zložky zrýchlenia podľa (4.2):

$$\begin{aligned} a_x &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = ax \cdot a + 0 = a^2 x = 4 \text{ m/s}^2, \\ a_y &= v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 + (-ay)(-a) = a^2 y = 4 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Prúdnicu určíme z podmienky, že sú dotyčnicami rýchlosti (odd. 4.3): $dx/(ax) = dy/(-ay)$, odkiaľ $xy = \text{konšt.}$ Prúdnicu sú hyperboly. Bod $(0; 0)$, v ktorom je rýchlosť nulová, sa nazýva *stagnačný bod*. Takéto prúdenie vzniká napríklad pred nábežnou hranou lopatky alebo pred Prandtlovou trubicou. ■

4.3 Prúdnicu, trajektórie a dráhy častíc

Na znázornenie prúdenia sa používajú tri druhy čiar:

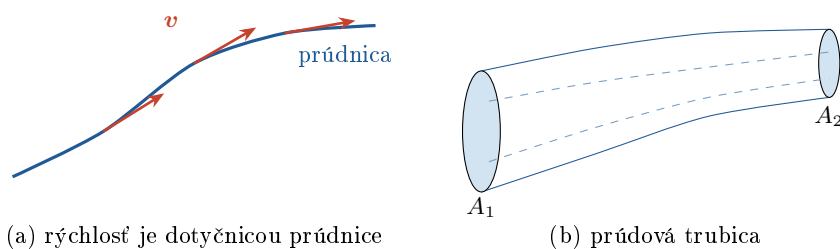
- **Prúdnicu** je čiara, ku ktorej je v danom okamihu vektor rýchlosti v každom jej bode dotyčnicou (obr. 4.2a). Je to „momentka“ rýchlostného poľa. Rovnica prúdnicu vyplýva z rovnobežnosti elementu $d\mathbf{r}$ a vektora $\mathbf{v}$:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (4.4)$$

Prúdnicu sa nemôžu pretínať, s výnimkou stagnačných bodov. Cez prúdnicu preto tekutina nepretieká.

- **Trajektória** (dráha častice) je čiara, po ktorej sa pohybuje jedna konkrétna častica. Zodpovedá lagrangeovskému opisu.
- **Čiara vytekania** (angl. *streakline*) spája všetky častice, ktoré v minulosti prešli tým istým bodom. Vidíme ju napríklad pri vypúšťaní farbiva alebo dymu z jedného miesta.

Pri ustálenom prúdení sú prúdnice, trajektórie a čiary vytekania totožné. Pri neustálenom prúdení sa líšia. Čiary dymu v aerodynamickom tuneli preto zobrazujú prúdnicu iba vtedy, keď je prúdenie ustálené.



Obr. 4.2. (a) Prúdnicu: vektor rýchlosti je v každom bode jej dotyčnicou. (b) Prúdová trubica: plášť tvoria prúdnicu, cez plášť tekutina nepreteká.

Ak vedieme prúdnicu všetkými bodmi uzavretej krivky, vytvorí plášť *prúdovej trubice* (obr. 4.2b). Cez plášť prúdovej trubice tekutina nepreteká, takže sa správa ako potrubie s nepriepustnou stenou. Prúdová trubica s nekonečne malým prierezom sa nazýva *prúdové vlákno*. Pojem prúdovej trubice sme už použili pri veternej turbíne (obr. 1.9). Vzduch, ktorý prejde rotorom, sa pohybuje vo vnútri prúdovej trubice, ktorá sa pred rotorom a za ním rozširuje.

4.4 Ustálené a neustálené prúdenie

Prúdenie je *ustálené*, ak sa rýchlostné pole a ostatné veličiny v žiadnom bode nemenia s časom (odd. 1.6):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z). \quad (4.5)$$

V ustálenom prúdení zostáva len konvektívne zrýchlenie. Neustálené prúdenie má navyše lokálne zrýchlenie.

Ustálenosť závisí aj od voľby súradnicovej sústavy. Prúdenie v obežnom kolese čerpadla je v pevnej sústave spojennej so skriňou neustálené, pretože okolo pevného bodu periodicky prechádzajú lopatky. V sústave, ktorá sa otáča s kolesom, je pri konštantných otáčkach ustálené. Túto vlastnosť využijeme pri odvodení Eulerovej rovnice hydraulických strojov (kap. 14).

Turbulentné prúdenie je v presnom zmysle vždy neustálené, pretože rýchlosť v bode neustále náhodne kolíše. Ak sa však časovo *stredné* hodnoty nemenia, hovoríme o *štatisticky ustálenom* prúdení (kap. 9). Takmer všetky technické výpočty v tejto knihe pracujú so strednými hodnotami.

4.5 Rovnomerné a nerovnomerné prúdenie

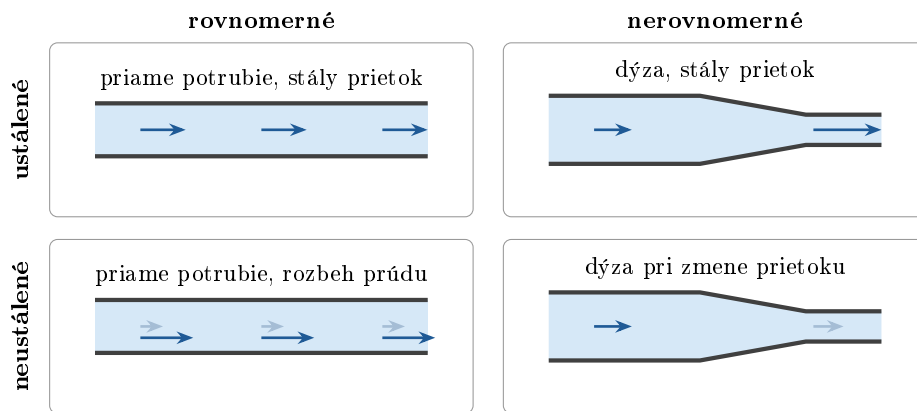
Prúdenie je *rovnomerné*, ak sa rýchlosť pozdĺž prúdnicu nemení čo do veľkosti ani smeru. Konvektívne zrýchlenie je potom nulové. Príkladom je plne vyvinuté prúdenie v priamom

potrubí so stálym prierezom (kap. 10). Rýchlostný profil má v každom priereze rovnaký tvar, hoci rýchlosť sa v priereze mení od steny k osi.

Prúdenie je *nerovnomerné*, ak sa rýchlosť pozdĺž prúdu mení. Príkladmi sú zúženia, rozšírenia, kolená, vtoky a výtoky, ale aj prúdenie v prirodzených korytách s premenlivým prierezom.

V hydraulike otvorených korýt má pojem rovnomerného prúdenia osobitný význam. Pri rovnomernom prúdení v koryte je hĺbka vody pozdĺž toku konštantná a hladina je rovnobežná so dnom. Tiaž vody, ktorá tečie dolu svahom, je v rovnováhe s trením o dno a brehy. Nerovnomerné prúdenie vzniká nad haťami, pri zmene sklonu dna alebo zúžení koryta. Výpočtom priebehu hladiny sa zaoberá hydraulika otvorených korýt [10, 35]. Pre malé vodné elektrárne ho využijeme v kap. 14.

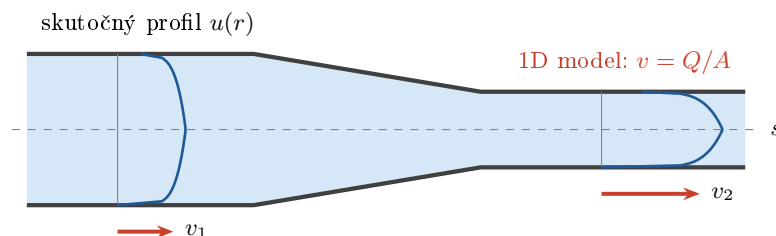
Pojmy ustálený a rovnomerný sú nezávislé (obr. 4.3). Prúdenie môže byť ustálené a nerovnomerné (dýza pri stálom prietoku) aj neustálené a rovnomerné (rozbeh prúdu v dlhom priamom potrubí).



Obr. 4.3. Štyri kombinácie ustáleného/neustáleného a rovnomerného/nerovnomerného prúdenia. Svetlejšia šípka znázorňuje rýchlosť v skoršom čase.

4.6 Jednorozmerná aproximácia

V potrubí, kanáli alebo prúdovej trubici sa veličiny menia najmä pozdĺž osi prúdu. Zmeny v priereze sú síce značné (rýchlosť pri stene je nulová), ale na technický výpočet často stačí poznať ich *stredné hodnoty*. Tento prístup nazývame *jednorozmernou aproximáciou* alebo *hydraulickou metódou*. Každý prierez opisujeme jedinou strednou rýchlosťou v , jediným tlakom p a jedinou hustotou ρ , ktoré sú funkciou súradnice s pozdĺž osi (obr. 4.4).



Obr. 4.4. Jednorozmerná aproximácia: skutočný rýchlostný profil v každom priereze nahradíme strednou rýchlosťou $v = Q/A$, ktorá sa mení len pozdĺž osi s .

Jednorozmerná aproximácia je oprávnená, ak

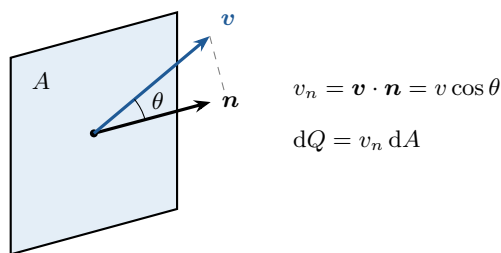
- prúd je *stíhly*: jeho dĺžka je oveľa väčšia ako priečne rozmery a prierez sa mení pozvoľna,
- prúdnice sú približne rovnobežné, takže tlak sa v priereze mení len hydrostaticky,
- vplyv nerovnomerného rozloženia rýchlosti zohľadníme opravnými súčiniteľmi (odd. 4.10).

V miestach, kde tieto podmienky neplatia (kolená, armatúry, vtoky), dopĺňame 1D model empirickými súčiniteľmi miestnych strát (kap. 11).

4.7 Objemový prietok

Objemový prietok Q je objem tekutiny, ktorý pretečie plochou za jednotku času [m^3/s]. Uvažujme plôšku dA s jednotkovým normálovým vektorom $\mathbf{n}$ (obr. 4.5). Za čas dt ňou pretečie tekutina z valčeka s objemom $v_n dt dA$, kde $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v \cos \theta$ je normálová zložka rýchlosti. Tangenciálna zložka rýchlosti k prietoku neprispieva. Prietok celou plochou je

$$Q = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A v_n dA. \quad (4.6)$$



Obr. 4.5. K prietoku cez plochu prispieva len normálová zložka rýchlosti.

V praxi sa prietok udáva aj v jednotkách L/s, L/min a m^3/h . Platí $1 \text{ m}^3/\text{h} = 0,2778 \text{ L/s} = 2,778 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$. Pri dosadzovaní do vzorcov vždy prepočítame prietok na m^3/s .

4.8 Hmotnostný prietok

Hmotnostný prietok $\dot{m}$ je hmotnosť tekutiny, ktorá pretečie plochou za jednotku času [kg/s]:

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (4.7)$$

Ak je hustota v priereze konštantná, platí $\dot{m} = \rho Q$.

Hmotnostný prietok je pri ustálenom prúdení pozdĺž potrubia bez odbočiek konštantný, aj keď sa mení teplota a hustota tekutiny (kap. 5). Objemový prietok sa v takom prípade mení. V tepelných výpočtoch preto pracujeme s hmotnostným prietokom (rovnica (1.1)). Pri plynach, ktorých hustota výrazne závisí od tlaku a teploty, musíme pri objemovom prietoku vždy uviesť stav, na ktorý sa vzťahuje. Pri zemnom plyne a bioplyne sa preto udáva objemový prietok prepočítaný na normálne podmienky.

4.9 Stredná prierezová rýchlosť

Stredná prierezová rýchlosť je definovaná ako rovnomerná rýchlosť, pri ktorej by prierezom pretekol rovnaký prietok ako pri skutočnom rozložení rýchlosti:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_A v_n dA. \quad (4.8)$$

Odtiaľ známy vzťah

$$Q = Av, \quad \dot{m} = \rho Av. \quad (4.9)$$

Poznámka

Vzťah $Q = Av$ nie je fyzikálny zákon, ale *definícia* strednej rýchlosti. Platí presne len vtedy, ak v je stredná rýchlosť podľa (4.8). Ak do neho dosadíme lokálnu rýchlosť nameranú v jednom bode, napríklad v osi potrubia, dostaneme nesprávny prietok. Pri laminárnom prúdení by chyba bola 100 %, pri turbulentnom asi 20 % (odd. 4.10). Preto prietokomery, ktoré merajú lokálnu rýchlosť, obsahujú korekciu na tvar rýchlostného profilu. Preto sa tiež vyžadujú rovné úseky potrubia pred nimi a za nimi, aby bol profil plne vyvinutý a známy.

Príklad 4.3 – Rýchlosť v potrubí

Potrubím s vnútorným priemerom 50 mm preteká 12 m³/h vody s teplotou 60 °C. Určte strednú rýchlosť a hmotnostný prietok.

Riešenie. $Q = 12/3600 = 3,333 \cdot 10^{-3}$ m³/s, $A = \pi \cdot 0,05^2/4 = 1,963 \cdot 10^{-3}$ m².

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{3,333 \cdot 10^{-3}}{1,963 \cdot 10^{-3}} = 1,70 \text{ m/s}, \quad \dot{m} = \rho Q = 983,3 \cdot 3,333 \cdot 10^{-3} = 3,28 \text{ kg/s}.$$

Rýchlosť 1,7 m/s je pre vykurovacie potrubia pomerne vysoká. Obvykle sa volia rýchlosti 0,5 m/s až 1,5 m/s. Voľbou rýchlosti sa podrobne zaoberá kap. 10. ■

4.10 Rýchlostné profily

Rýchlostný profil je rozloženie rýchlosti v priereze. Jeho tvar závisí od režimu prúdenia a od geometrie.

Profily v kruhovom potrubí

Pri **laminárnom** prúdení v kruhovom potrubí s polomerom R je profil parabolický (odvodíme ho v kap. 8):

$$u(r) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (4.10)$$

Stredná rýchlosť podľa (4.8) je

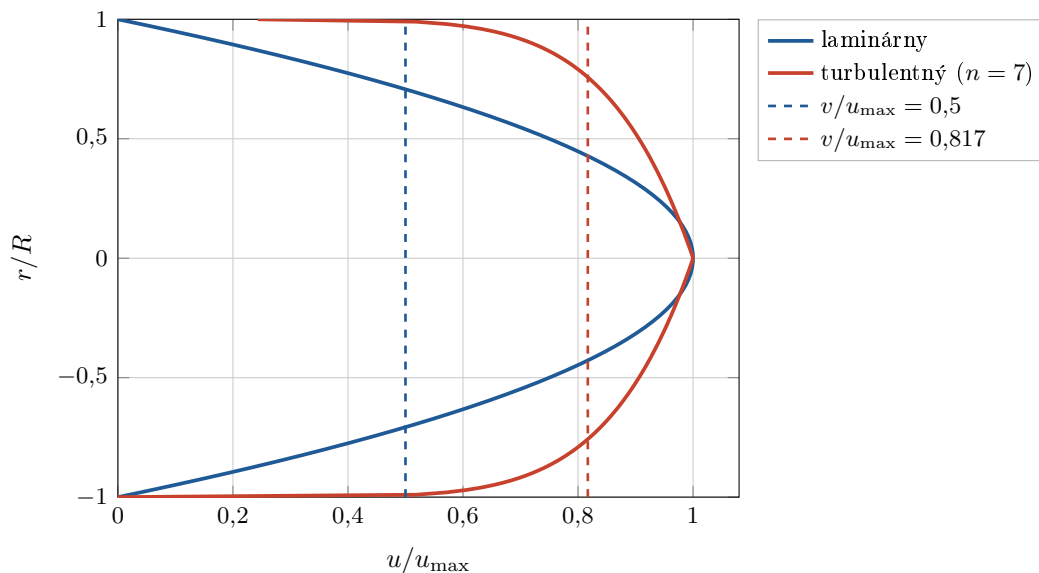
$$v = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r dr = \frac{u_{\max}}{2}.$$

Pri **turbulentnom** prúdení turbulentné miešanie rýchlosti v priereze vyrovnáva. Profil je v strede plochý a pri stene veľmi strmý (obr. 4.6). Často sa aproximuje mocninovým vzťahom

$$u(r) = u_{\max} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n}, \quad (4.11)$$

kde exponent n rastie s Reynoldsovým číslom. Pre bežné technické prúdenie je $n \approx 7$ [1]. Stredná rýchlosť je potom

$$\frac{v}{u_{\max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \stackrel{n=7}{=} 0,817. \quad (4.12)$$



Obr. 4.6. Rýchlostné profily v kruhovom potrubí a zodpovedajúce stredné rýchlosti.

Opravné súčinitele

Pri výpočte toku kinetickej energie a hybnosti prierezom pomocou strednej rýchlosti sa dopúšťame chyby. Priemer tretej mocniny rýchlosti totiž nie je tretia mocnina priemeru. Chybu opravujú súčinitele, ktoré využijeme v kap. 6 a 7:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{v}\right)^3 dA, \quad \beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{v}\right)^2 dA. \quad (4.13)$$

α je *Coriolisov súčiniteľ* (súčiniteľ kinetickej energie) a β *Boussinesgov súčiniteľ* (súčiniteľ hybnosti). Pre rovnomerný profil sú oba rovné 1. Pre laminárny parabolický profil je $\alpha = 2$ a $\beta = 4/3$. Pre turbulentný profil s $n = 7$ vychádza $\alpha \approx 1,06$ a $\beta \approx 1,02$. Pri turbulentnom prúdení ich preto obvykle považujeme za rovné 1.

Meranie prietoku v koryte

V riekach a náhonoch sa prietok určuje *metódou rýchlosť-plocha* [10, 14]. Prierez koryta sa rozdelí na zvislé pásy. V každom pásy sa zmeria hĺbka a stredná rýchlosť na zvislici, napríklad hydrometrickou vrtuľkou v niekoľkých hĺbkach alebo akustickým dopplerovským prístrojom. Prietok je súčtom prietokov pásov (obr. 4.7):

$$Q \approx \sum_i b_i h_i v_i. \quad (4.14)$$

Príklad 4.4 – Prietok potoka pre malú vodnú elektráreň

Pri hydrologickom prieskume lokality MVE sa v priereze potoka šírky 12 m zmerali v šiestich pásoch širokých 2 m tieto hĺbky a stredné rýchlosti na zvisliciach:

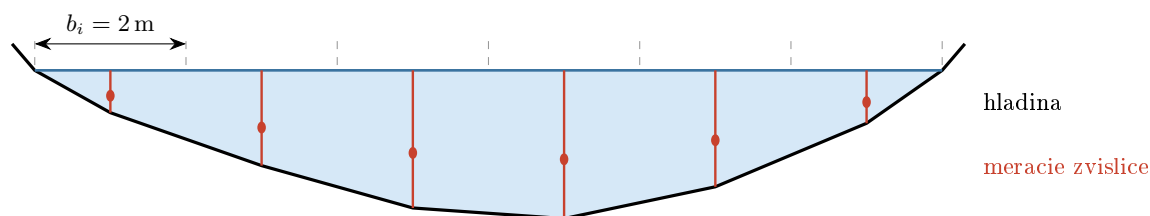
pás i	1	2	3	4	5	6
h_i [m]	0,4	0,9	1,3	1,4	1,1	0,5
v_i [m/s]	0,30	0,60	0,85	0,90	0,70	0,35

Určte prietok a strednú prierezovú rýchlosť.

Riešenie. Podľa (4.14):

$$Q = 2(0,4 \cdot 0,30 + 0,9 \cdot 0,60 + 1,3 \cdot 0,85 + 1,4 \cdot 0,90 + 1,1 \cdot 0,70 + 0,5 \cdot 0,35) = 7,94 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Plocha prierezu je $A = 2(0,4 + 0,9 + 1,3 + 1,4 + 1,1 + 0,5) = 11,2 \text{ m}^2$, stredná rýchlosť $v = Q/A = 0,71 \text{ m/s}$. Jednorazové meranie dáva len okamžitú hodnotu. Na návrh MVE potrebujeme dlhodobý rad prietokov a z neho čiaru prekročenia prietokov (kap. 14). ■



Obr. 4.7. Meranie prietoku v koryte metódou rýchlosť–plocha. Na zvisliciach sa meria hĺbka a stredná rýchlosť.

Profil rýchlosti vetra

Pri zemskom povrchu vzniká *medzná vrstva atmosféry*, v ktorej rýchlosť vetra rastie s výškou (obr. 1.9). Vo veternej energetike sa jej priebeh často aproximuje mocninovým zákonom [24]:

$$\frac{u(z)}{u(z_r)} = \left(\frac{z}{z_r} \right)^\alpha, \quad (4.15)$$

kde z_r je referenčná výška merania. Exponent α závisí od drsnosti terénu a od stability atmosféry. Často sa používa hodnota $\alpha \approx 1/7$. Nad vodnou hladinou je menší, nad lesom a zástavbou väčší (obr. 4.8). Presnejším opisom je logaritmický profil, ktorý vychádza z teórie turbulentnej medznej vrstvy (kap. 9).

Príklad 4.5 – Prepočet rýchlosti vetra na výšku náboja

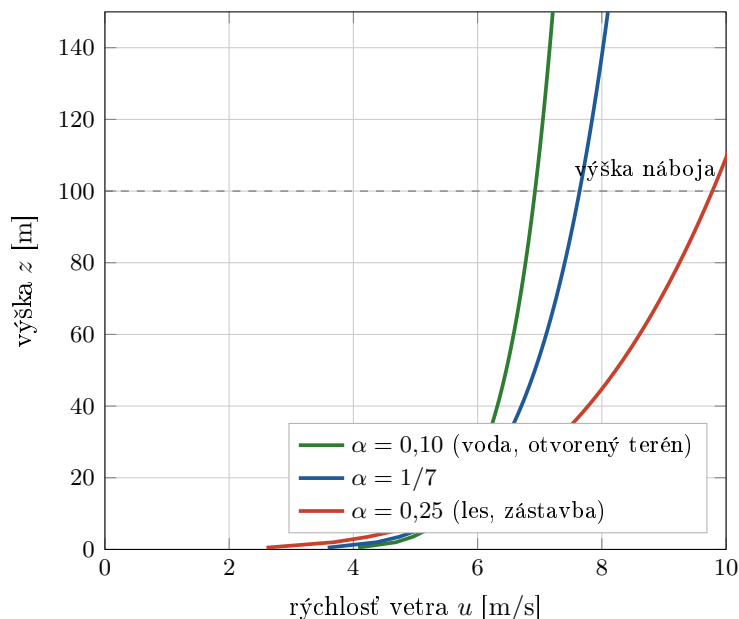
Meteorologická stanica nameria vo výške 10 m strednú rýchlosť vetra 5,5 m/s. Odhadnite rýchlosť vo výške náboja 100 m pre $\alpha = 1/7$ a pomer výkonovej hustoty vetra v týchto výškach.

Riešenie. Podľa (4.15):

$$u_{100} = 5,5 \left(\frac{100}{10} \right)^{1/7} = 5,5 \cdot 1,389 = 7,64 \text{ m/s}.$$

Výkonová hustota vetra je úmerná u^3 , jej pomer je $1,389^3 = 2,68$. Vo výške náboja je teda k dispozícii takmer trikrát viac energie ako vo výške 10 m. Neistota exponentu α sa však

prejaví tretiu mocninou. Pri $\alpha = 0,25$ by vyšlo $u_{100} = 9,8 \text{ m/s}$. Preto sa pre veterné parky meria vietor priamo vo výške blízkej výške náboja. ■



Obr. 4.8. Extrapolácia rýchlosti vetra z výšky 10 m mocninovým zákonom pre rôzne exponenty α .

Pozor – častá chyba

Výkon veternej turbíny nemožno určiť dosadením strednej rýchlosti vetra do vzťahu (1.9). Priemer tretej mocniny rýchlosti je väčší ako tretia mocnina priemeru, podobne ako pri súčiniteli α . Pri premenlivom vetre je stredná hodnota $\overline{u^3}$ asi dvojnásobkom $\bar{u}^3$. Ročná výroba sa preto počíta z rozdelenia rýchlostí vetra [24].

4.11 Základy rotácie a vírivosti

Element tekutiny sa pri pohybe môže posúvať, deformovať a otáčať. Uhlovú rýchlosť otáčania elementu vyjadruje vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}, \quad (4.16)$$

ktorý sa rovná polovici *rotácie* rýchlostného poľa. V mechanike tekutín sa častejšie používa *vírivosť* $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. Pre rovinné prúdenie v rovine xy má jedinú zložku

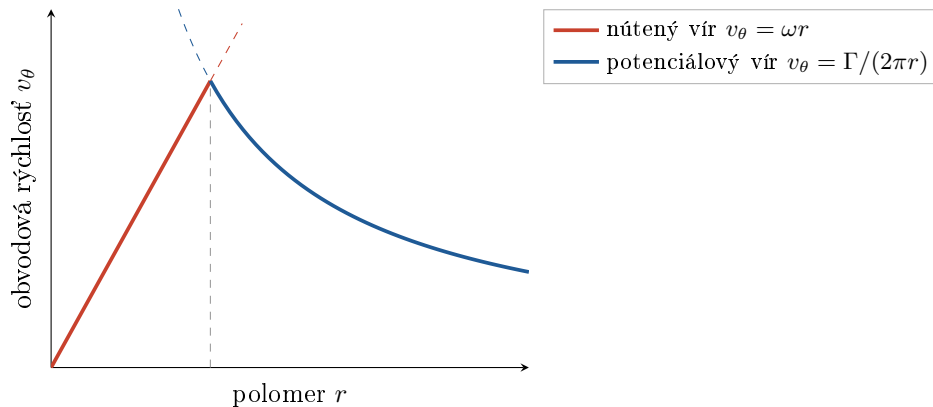
$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (4.17)$$

Prúdenie, v ktorom je vírivosť všade nulová, sa nazýva *nevírové* (potenciálové).

Vírivosť nesúvisí s tým, či sú prúdnicie zakrivené.

- V prúde medzi doskami (obr. 2.4) sú prúdnicie priame, ale $v_x = Uy/h$, a teda $\Omega_z = -U/h \neq 0$. Element sa pri pohybe otáča. Takmer každé prúdenie pri stene je vírové, pretože viskozita a podmienka ulpievania vytvárajú rýchlostný gradient.
- Pri **nútenom víre** sa tekutina otáča ako tuhé teleso, $v_\theta = \omega r$. Vírivosť je všade rovnaká, $\Omega = 2\omega$. Takto sa otáča kvapalina v rotujúcej nádobe.

- Pri **potenciálovom (voľnom) víre** je $v_\theta = \Gamma/(2\pi r)$, kde Γ je cirkulácia. Rýchlosť rastie smerom k stredu. Prúdnicie sú kružnice, prúdenie je však mimo stredu nevírové. Elementy obiehajú okolo stredu bez vlastnej rotácie.



Obr. 4.9. Obvodová rýchlosť kombinovaného (Rankinovho) víru: nútený vír v jadre s polomerom r_0 , potenciálový vír mimo neho.

Skutočné víry, napríklad víry pri vtoku do čerpadla, vírový povraz v savke vodnej turbíny alebo víry odtrhávajúce sa od koncov listov veternej turbíny, majú jadro, ktoré sa otáča ako tuhé teleso. Mimo jadra sa správajú ako potenciálový vír (obr. 4.9). V jadre víru je nízky tlak. Ak klesne pod tlak nasýtených pár, jadro sa vyplní parou a víry sa stanú viditeľnými. Takýto vírový povraz v savke turbíny pri čiastočnom zaťažení spôsobuje tlakové pulzácie a vibrácie (kap. 14).

Vírivosť je tiež kľúčom k pochopeniu turbulencie, ktorá je v podstate neusporiadaným pohybom vírov rôznych veľkostí (kap. 9), a vzniku vztľaku na profile lopatky.

Zhrnutie kapitoly

- V mechanike tekutín používame prevažne eulerovský opis. Veličiny sú polia, funkcie polohy a času.
- Zrýchlenie častice je materiálovou deriváciou rýchlosti. Má lokálnu zložku (zmena v čase) a konvektívnu zložku (presun do miesta s inou rýchlosťou).
- Prúdnicia je v každom bode dotyčnicou rýchlosti. Pri ustálenom prúdení je totožná s trajektóriou a čiarou vytekania. Cez plášť prúdovej trubice tekutina nepreteká.
- Ustálenosť (žiadna zmena v čase) a rovnomernosť (žiadna zmena pozdĺž prúdu) sú nezávislé vlastnosti prúdenia.
- Prietok je tok normálovej zložky rýchlosti plochou: $Q = \int_A v_n \, dA$, $\dot{m} = \int_A \rho v_n \, dA$.
- Vzťah $Q = Av$ je definíciou strednej prierezovej rýchlosti. V osi potrubia je rýchlosť dvojnásobná (laminárne prúdenie) alebo asi o 22 % väčšia (turbulentné prúdenie) ako stredná.
- Rýchlosť vetra rastie s výškou. Pri extrapolácii na výšku náboja sa neistota exponentu prejaví v tretej mocnine vo výkone.
- Vírivosť meria rotáciu elementov tekutiny. Prúdenie pri stenách je vírové aj pri priamych prúdnicach.

Kontrolné otázky

1. Aký je rozdiel medzi lagrangeovským a eulerovským opisom? Ktorý z nich používajú meracie prístroje a metódy CFD?
2. Z akých zložiek sa skladá zrýchlenie častice tekutiny? Môže mať častica zrýchlenie v ustálenom prúde?
3. Definujte prúdnicu, trajektóriu a čiaru vytekania. Kedy sú totožné?
4. Prečo sa prúdnice nemôžu pretínať? Čo platí pre prietok cez plášť prúdovej trubice?
5. Uveďte príklad prúdenia, ktoré je ustálené a nerovnomerné, a prúdenia, ktoré je neustálené a rovnomerné.
6. Za akých predpokladov možno prúdenie v potrubí opísať jednorozmerne?
7. Prečo sa v tepelných výpočtoch uprednostňuje hmotnostný prietok pred objemovým?
8. Prečo nemožno do vzťahu $Q = Av$ dosadiť rýchlosť nameranú v osi potrubia? Aká by bola chyba pri laminárnom a turbulentnom prúde?
9. Čo vyjadrujú súčinitele α a β a kedy ich možno zanedbať?
10. Je prúdenie v potenciálovom víre vírové? Prečo je prúdenie pri stene vírové, hoci sú prúdnice priame?

Úlohy na precvičenie

1. Prietok vody 2,5 L/s preteká potrubím s vnútorným priemerom 32 mm. Určte strednú rýchlosť a prietok v m^3/h . [3,11 m/s; 9,0 m^3/h]
2. Aký vnútorný priemer potrubia treba zvoliť, aby pri prietoku 4 m^3/h bola stredná rýchlosť 0,8 m/s? [42 mm]
3. Vzduch s hustotou 1,15 kg/m^3 prúdi obdĺžnikovým vzduchovodom 400 mm $\times$ 250 mm strednou rýchlosťou 4 m/s. Určte objemový a hmotnostný prietok. [1 440 m^3/h ; 0,46 kg/s]
4. Rýchlostné pole je $v_x = 3t$, $v_y = 2x$ (v m/s, x v m, t v s). Určte zložky lokálneho a konvektívneho zrýchlenia v bode (2; 1) v čase $t = 1$ s. [lokálne (3; 0); konvektívne (0; 6) m/s^2]
5. V osi potrubia s priemerom 100 mm sa namerala rýchlosť 2,2 m/s. Určte prietok pre laminárny profil a pre turbulentný profil s $n = 7$. [8,6 L/s; 14,1 L/s]
6. Ukážte integráciou, že pre laminárny profil (4.10) je Coriolisov súčiniteľ $\alpha = 2$.
7. Rýchlosť vetra vo výške 30 m je 6,2 m/s. Odhadnite ju vo výške 120 m pre $\alpha = 0,14$ a $\alpha = 0,22$. O koľko percent sa líšia zodpovedajúce výkonové hustoty? [7,5 m/s; 8,4 m/s; o 39 %]
8. Pri meraní prietoku (obr. 4.7) v náhone obdĺžnikového prierezu šírky 3 m a hĺbky 1,2 m sa v troch rovnakých pásoch namerali stredné rýchlosti 0,9, 1,3 a 1,0 m/s. Určte prietok. [3,84 m^3/s]
9. Rovinné pole $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$ opisuje otáčanie. Určte vírivosť. Aké sú prúdnice? [$\Omega_z = 2\omega$; kružnice]
10. V tabuľkovom procesore alebo v Pythone numericky integrujte mocninový profil (4.11) pre $n = 6, 7, 8, 10$ a určte pomer $v/u_{\max}$ a súčinitele α a β .

Kapitola 5

Zákon zachovania hmotnosti

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent zostaví hmotnostnú bilanciu kontrolného objemu v tvare „akumulácia = prítok – odtok“. Použije ju na ustálené aj neustálené prúdenie, na rozdeľovanie a spájanie prúdov, na plnenie a vyprázdňovanie nádrží a na bilanciu energetických zariadení. Rovnicu kontinuity $A_1v_1 = A_2v_2$ chápe ako jej špeciálny prípad a vie, kedy ju možno použiť.

Kľúčové pojmy

zákon zachovania hmotnosti, kontrolný objem, kontrolná plocha, hmotnostná bilancia, akumulácia, ustálené prúdenie, rovnica kontinuity, nestlačiteľná tekutina, uzol, zmiešavanie, výtok otvorom, súčiniteľ výtoku, prúdová trubica

Zákon zachovania hmotnosti je najjednoduchší, a preto najspoľahlivejší z bilančných zákonov. Neobsahuje žiadne empirické súčinitele ani materiálové vlastnosti okrem hustoty. Každá rovnica, ktorú z neho zostavíme, platí presne. Chyby vznikajú len nesprávnym vymedzením kontrolného objemu alebo zabudnutím niektorého prítoku či odtoku.

V tejto kapitole sa naučíme uvažovať *bilančne*. Nezačneme vzorcom $A_1v_1 = A_2v_2$, ale všeobecnou otázkou: *Čo vteká, čo vyteká a čo sa hromadí?* Ten istý spôsob uvažovania potom použijeme pre hybnosť (kap. 7) aj energiu (kap. 6). Výklad nadväzuje na [1, 5].

Na zamyslenie

Rotor veternej turbíny spomaľuje vzduch. Ak by vzduch, ktorý prechádza rotorom, pri tom nezmenil prierez, kam by sa podela časť vzduchu prúdiaceho k turbíne? A prečo hladina v hornej nádrži prečerpávacej elektrárne klesá pomaly, hoci turbíny odoberajú desiatky kubických metrov vody za sekundu?

5.1 Fyzikálny význam zachovania hmotnosti

V klasickej mechanike hmotnosť nevzniká ani nezaniká. Pri jadrových reakciách sa časť hmotnosti mení na energiu, v technickej mechanike tekutín je však tento jav zanedbateľný. Hmotnosť *uzavretého systému*, teda stále toho istého množstva hmoty (odd. 1.3), je preto konštantná:

$$\frac{dm_{\text{sys}}}{dt} = 0. \quad (5.1)$$

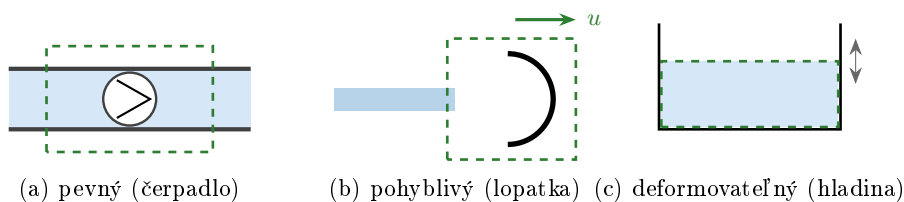
Pri chemických reakciách, napríklad pri spaľovaní biomasy alebo pri anaeróbnej fermentácii, sa menia látky, celková hmotnosť sa však zachováva. Hmotnosť spalín sa rovná súčtu hmotnosti paliva a vzduchu, ktorý sa spotreboval pri horení. Táto vlastnosť robí z hmotnostnej bilancie základný nástroj kontroly meraní. Ak sa bilancia neuzatvára, niektoré meranie je chybné alebo systém netesní.

5.2 Kontrolný objem

Pri prúde je sledovanie stále toho istého množstva hmoty nepraktické. Tekutina v čerpadle sa za zlomok sekundy vymení. Preto zákon zachovania formulujeme pre *kontrolný objem* (KO), teda pre pevne vymedzenú oblasť priestoru, cez ktorej hranicu tekutina voľne preteká (odd. 1.3). Hranica KO sa nazýva *kontrolná plocha*.

Kontrolný objem môže byť (obr. 5.1)

- **pevný**: najčastejší prípad, napríklad úsek potrubia, čerpadlo alebo výmenník,
- **pohyblivý**: KO sa pohybuje konštantnou rýchlosťou, napríklad spolu s lopatkou turbíny,
- **deformovateľný**: hranica sa mení, napríklad pri nádrži s meniacou sa hladinou. V takom prípade môžeme hranicu viesť aj po pevných stenách nádrže nad hladinou (obr. 5.2).



Obr. 5.1. Typy kontrolných objemov: (a) pevný, (b) pohyblivý spolu s lopatkou, (c) deformovateľný s hranicou na pohyblivej hladine.

Pri voľbe kontrolného objemu sa riadime týmito zásadami:

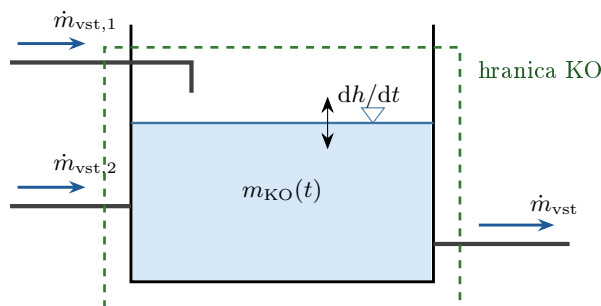
1. Hranicu vedieme tam, kde poznáme alebo hľadáme veličiny: prietoky, rýchlosti, tlaky.
2. Vstupné a výstupné prierezy volíme kolmo na smer prúdenia. Rýchlosť je potom kolmá na plochu a $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \pm v$.
3. Pevné steny, cez ktoré tekutina nepreteká, sú výhodnou súčasťou hranice. Tok hmotnosti cez ne je nulový.

5.3 Všeobecná hmotnostná bilancia

Hmotnosť tekutiny v kontrolnom objeme sa môže meniť len tak, že tekutina cez hranicu vtečie alebo vytečie (obr. 5.2). Platí

$$\frac{dm_{KO}}{dt} = \sum \dot{m}_{vst} - \sum \dot{m}_{vst} \quad (5.2)$$

Rýchlosť akumulácie hmotnosti v KO sa rovná rozdielu hmotnostných prietokov, ktoré do KO vtekajú a ktoré z neho vytekajú. Je to rovnica (1.4) z úvodnej kapitoly, v ktorej je zdrojový člen nulový.



Obr. 5.2. Hmotnostná bilancia nádrže s dvoma prítokmi a jedným odtokom. Hranica KO vedie po stenách nádrže nad hladinou.

Integrálny tvar

Hmotnosť v KO je $m_{KO} = \int_V \rho dV$. Hmotnostné prietoky cez kontrolnú plochu S vyjadríme podľa (4.7). Ak zvolíme vonkajšiu normálu $\mathbf{n}$, je súčin $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ na výstupoch kladný a na vstupoch záporný. Rovnicu (5.2) potom zapíšeme kompaktne:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (5.3)$$

Prvý člen je akumulácia, druhý je čistý odtok cez celú hranicu. Tento zápis je špeciálnym prípadom *Reynoldsovej transportnej vety*, ktorá prevádza zákony formulované pre uzavretý systém na kontrolný objem [1]. Rovnaký postup použijeme pre hybnosť (kap. 7).

Diferenciálny tvar

Ak rovnicu (5.3) použijeme na nekonečne malý kontrolný objem, dostaneme *rovniciu kontinuity v diferenciálnom tvare*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5.4)$$

Táto rovnica platí v každom bode prúdiacej tekutiny a spolu s Navierovými–Stokesovými rovnicami tvorí základ numerického modelovania prúdenia (kap. 8). V tejto knihe budeme pracovať prevažne s bilanciou (5.2) pre konečný kontrolný objem.

5.4 Ustálené prúdenie

Pri ustálenom prúdení sa hmotnosť v KO s časom nemení, akumulácia je nulová. Z (5.2) vyplýva

$$\sum \dot{m}_{vst} = \sum \dot{m}_{vst}. \quad (5.5)$$

Čo do KO vtečie, to z neho aj vytečie. Rovnica platí pre ľubovoľnú tekutinu, stlačiteľnú aj nestlačiteľnú, a aj pri zmene teploty.

Pozor na rozdiel medzi ustáleným prúdením a ustálenou prevádzkou zariadenia. Zásobník teplej vody, ktorý sa nabíja a vybíja, pracuje neustálene, hoci prietoky v potrubíach môžu byť v každom okamihu ustálené. Pri bilancii hmotnosti samotného zásobníka je rozhodujúce, či sa mení jeho obsah. Ak je zásobník úplne zaplnený kvapalinou s konštantnou hustotou, jeho hmotnosť sa nemení a prítok sa rovná odtoku, aj keď sa mení teplota.

5.5 Nestlačiteľná tekutina

Ak je hustota konštantná, môžeme ju z rovnice (5.5) vykrátiť. Hmotnostná bilancia sa zmení na *objemovú*:

$$\sum Q_{\text{vst}} = \sum Q_{\text{vst}}. \quad (5.6)$$

Pre nestlačiteľnú tekutinu platí rovnica (5.6) aj pri neustálenom prúdení v KO s pevnými stenami, ktorý je úplne vyplnený tekutinou. Objem tekutiny v ňom sa totiž nemôže meniť. Diferenciálna rovnica (5.4) sa pre $\rho = \text{konšt.}$ zjednoduší na

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (5.7)$$

Pozor – častá chyba

Objemový prietok sa zachováva len pri konštantnej hustote. Ak sa hustota mení, napríklad pri ohreve vzduchu v kolektore alebo pri expanzii plynu v potrubí, zachováva sa *hmotnostný*, nie objemový prietok (pr. 5.2). Pri kvapalinách je zmena hustoty s teplotou malá (niekoľko percent), no pri presnom meraní prietoku alebo pri bilancii tepla ju treba zohľadniť. Objemové prietokomery je preto vhodné umiestňovať v miestach so známou teplotou.

5.6 Rovnica kontinuity v potrubí

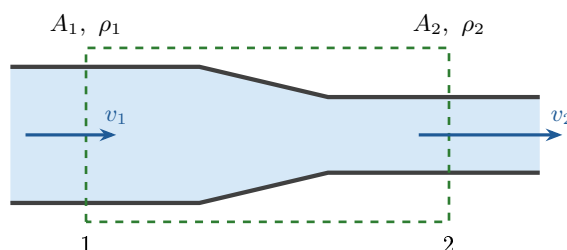
Uvažujme úsek potrubia s premenným prierezom bez odbočiek (obr. 5.3). Kontrolný objem ohraničíme stenami potrubia a prierezmi 1 a 2. Pri ustálenom prúdení a jednorozmernej aproximácii (odd. 4.6) z (5.5) a (4.9) vyplýva

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = \dot{m} = \text{konšt.} \quad (5.8)$$

Pre nestlačiteľnú tekutinu dostávame známu *rovniciu kontinuity*

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q = \text{konšt.} \quad (5.9)$$

Stredná rýchlosť je nepriamo úmerná ploche prierezu. Pre kruhové potrubie platí $v_2/v_1 = (D_1/D_2)^2$. Zmenšenie priemeru na polovicu zvýši rýchlosť štvornásobne.



Obr. 5.3. Kontrolný objem úseku potrubia s premenným prierezom.

Rovnica (5.9) je teda výsledkom troch predpokladov: ustálené prúdenie, konštantná hustota a jeden vstup a jeden výstup. Ak niektorý z nich neplatí, musíme sa vrátiť k všeobecnej bilancii (5.2).

Príklad 5.1 – Zmena rýchlosti v redukcii

Voda prúdi potrubím s vnútorným priemerom 80 mm rýchlosťou 1,2 m/s. Za redukciou má potrubie priemer 50 mm. Určte rýchlosť za redukciou a prietok.

Riešenie. Podľa (5.9):

$$v_2 = v_1 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 = 1,2 \left(\frac{80}{50} \right)^2 = 3,07 \text{ m/s}, \quad Q = \frac{\pi \cdot 0,08^2}{4} \cdot 1,2 = 6,03 \text{ L/s}.$$

Rýchlosť vzrástla viac ako dvaapokrát. V kap. 6 ukážeme, že zvýšenie rýchlosti je spojené s poklesom tlaku a v kap. 10, že tlaková strata rastie približne s druhou mocninou rýchlosti. ■

Príklad 5.2 – Vzduchový snečný kolektor

Vzduchovým snečným kolektorom s obdĺžnikovým kanálom prierezu 0,02 m² prúdi 0,1 kg/s vzduchu. Na vstupe má vzduch teplotu 20 °C, na výstupe 60 °C. Určte objemový prietok a rýchlosť na vstupe a na výstupe. Tlak sa mení len málo, preto hustoty prevezmite z tab. B.2.

Riešenie. Hmotnostný prietok je v celom kolektore rovnaký. Pri 20 °C je $\rho_1 = 1,204 \text{ kg/m}^3$, pri 60 °C je $\rho_2 = 1,059 \text{ kg/m}^3$:

$$Q_1 = \frac{0,1}{1,204} = 0,0831 \text{ m}^3/\text{s}, \quad v_1 = \frac{Q_1}{A} = 4,15 \text{ m/s};$$

$$Q_2 = \frac{0,1}{1,059} = 0,0944 \text{ m}^3/\text{s}, \quad v_2 = \frac{Q_2}{A} = 4,72 \text{ m/s}.$$

Objemový prietok a rýchlosť vzrástli o 14 %, hoci prierez kanála sa nezmenil. Ventilátor treba preto dimenzovať podľa toho, či je umiestnený na studenej alebo teplej strane kolektora. ■

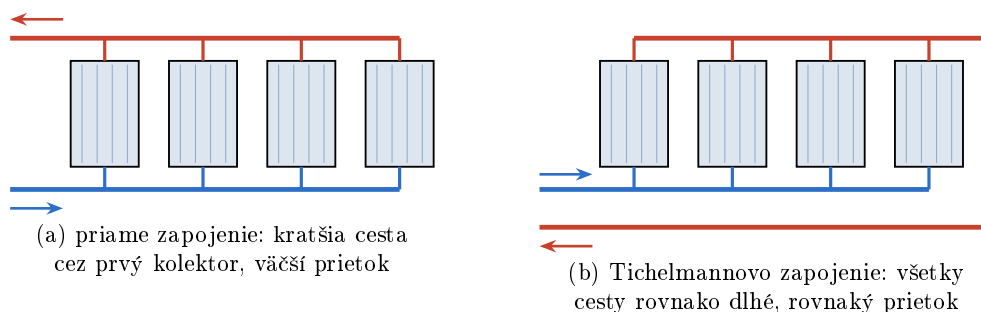
5.7 Rozdeľovanie a spájanie prúdov

V potrubných sieťach sa prúdy rozdeľujú v odbočkách a spájajú v zbernom potrubí. Miesto, kde sa stretáva viac potrubí, nazývame *uzol*. Uzol neobsahuje žiadny objem, v ktorom by sa tekutina mohla hromadiť. Pre uzol preto vždy platí

$$\sum_i \dot{m}_i = 0, \quad (5.10)$$

kde prietoky do uzla berieme kladne a z uzla záporne. Pri nestlačiteľnej tekutine platí rovnaký vzťah pre objemové prietoky. Je to obdoba prvého Kirchhoffovho zákona pre elektrické obvody. Túto analógiu využijeme pri výpočte potrubných sietí (kap. 12).

Rovnica (5.10) určuje len *súčet* prietokov. O tom, ako sa prietok rozdelí medzi paralelné vetvy, rozhodujú tlakové straty vo vetvách (kap. 12). Príkladom je kolektorové pole s paralelne zapojenými kolektormi. Ak majú vetvy rôzne dlhé potrubia, rozdelí sa prietok nerovnomerne a vzdialenejšie kolektory sú horšie chladené. Proti tomu sa používa zapojenie podľa Tichelmanna (obr. 5.4), pri ktorom majú všetky vetvy rovnakú dĺžku potrubia, alebo vyvažovacie ventily. Rozdelením prietoku medzi rúrky absorbéra jedného kolektora sa zaoberá [7].



Obr. 5.4. Zapojenie kolektorového poľa: (a) priame, pri ktorom má cesta cez prvý kolektor najmenší odpor, (b) Tichelmannovo so spätným vedením zberného potrubia, pri ktorom sú všetky cesty rovnako dlhé.

Zmiešavanie prúdov

Pri spájaní prúdov s rôznou teplotou sa okrem hmotnosti zachováva aj energia. Ak zanedbáme tepelné straty a zmenu mernej tepelnej kapacity, platí pre spojenie dvoch prúdov

$$\dot{m} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2, \quad \dot{m} t = \dot{m}_1 t_1 + \dot{m}_2 t_2. \quad (5.11)$$

Výsledná teplota je váženým priemerom teplôt, pričom váhami sú hmotnostné prietoky. Energetickú bilanciu podrobnejšie rozoberá kap. 6.

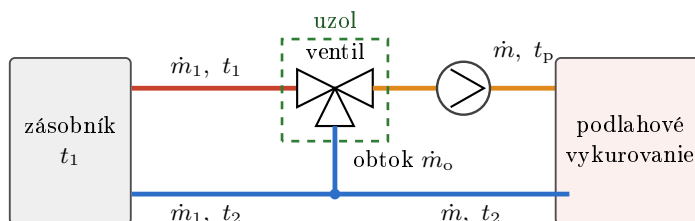
Príklad 5.3 – Zmiešavací ventil podlahového vykurovania

Podlahové vykurovanie potrebuje hmotnostný prietok $\dot{m} = 0,25 \text{ kg/s}$ s teplotou prívodu $t_p = 35^\circ\text{C}$. Vo vrchnej časti akumuláčného zásobníka má voda teplotu $t_1 = 55^\circ\text{C}$. Spiatočka z podlahy má $t_2 = 30^\circ\text{C}$. Trojcestný ventil zmiešava vodu zo zásobníka s vodou z obtoku (obr. 5.5). Aký prietok sa odoberá zo zásobníka a aký preteká obtokom?

Riešenie. Uzol na mieste ventilu: $\dot{m} = \dot{m}_1 + \dot{m}_o$, energetická bilancia: $\dot{m} t_p = \dot{m}_1 t_1 + \dot{m}_o t_2$. Dosadením $\dot{m}_o = \dot{m} - \dot{m}_1$:

$$\dot{m}_1 = \dot{m} \frac{t_p - t_2}{t_1 - t_2} = 0,25 \cdot \frac{35 - 30}{55 - 30} = 0,05 \text{ kg/s}, \quad \dot{m}_o = 0,20 \text{ kg/s}.$$

Zo zásobníka sa odoberá len pätina prietoku. Zvyšok sa vracia obtokom. Takéto zapojenie umožňuje vybíjať zásobník s veľkým teplotným rozdielom, čo je výhodné pre jeho kapacitu aj pre udržanie teplotného vrstvenia. Hmotnostná bilancia zásobníka zároveň ukazuje, že do jeho spodnej časti sa vracia rovnaký prietok $0,05 \text{ kg/s}$ s teplotou 30°C . ■



Obr. 5.5. Zmiešavací okruh podlahového vykurovania. Trojcestný ventil tvorí uzol, v ktorom sa spája prúd zo zásobníka s prúdom z obtoku.

5.8 Akumulácia hmotnosti

Ak sa prítok nerovná odtoku, hmotnosť v kontrolnom objeme sa mení. Pre nádrž s kvapalinou s konštantnou hustotou a s plochou hladiny A_n je $m_{KO} = \rho A_n h$ (pri zvislých stenách). Z (5.2) dostaneme

$$A_n \frac{dh}{dt} = Q_{vst} - Q_{vst}. \quad (5.12)$$

Rýchlosť zmeny hladiny je tým menšia, čím je väčšia plocha hladiny. Veľká nádrž preto pôsobí ako *vyrovnávací prvok*, ktorý tlmí krátkodobé rozdiely medzi prítokom a odtokom. Na tomto princípe pracujú vyrovnávacie nádrže, zdrže malých vodných elektrární aj vodné nádrže prečerpávacích elektrární.

Pri plynach sa akumulácia prejavuje zmenou tlaku a hustoty. Pre nádrž s konštantným objemom V a ideálny plyn pri konštantnej teplote platí $m = pV/(rT)$ a teda

$$\frac{V}{rT} \frac{dp}{dt} = \dot{m}_{vst} - \dot{m}_{vst}. \quad (5.13)$$

Takto sa správajú tlakové zásobníky stlačeného vzduchu a vodíka. Plynojemy bioplynových staníc majú naopak pružný membránový obal. Tlak v nich je takmer konštantný a akumulácia sa prejaví zmenou objemu.

Príklad 5.4 – Hladina v hornej nádrži prečerpávacej elektrárne

Horná nádrž prečerpávacej elektrárne má plochu hladiny $50\,000\text{ m}^2$ (zjednodušene ju považujeme za konštantnú). V čerpadlovom režime sa do nej čerpá $20\text{ m}^3/\text{s}$. Ako rýchlo stúpa hladina a za aký čas stúpne o 10 m ?

Riešenie. Podľa (5.12) s $Q_{vst} = 0$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_{vst}}{A_n} = \frac{20}{50\,000} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = 1,44 \text{ m/h}, \quad t = \frac{10}{4 \cdot 10^{-4}} = 25\,000 \text{ s} \approx 6,9 \text{ h}.$$

Hladina sa mení len o niečo viac ako meter za hodinu, hoci do nádrže vteká 20 m^3 vody za sekundu. Tým je zodpovedaná druhá otázka zo začiatku kapitoly. Objem prečerpanej vody $500\,000\text{ m}^3$ spolu so spádom určuje akumulovanú energiu (kap. 14). ■

5.9 Plnenie a vyprázdňovanie zásobníkov

Pri plnení nádrže konštantným prítokom je riešenie rovnice (5.12) jednoduché: hladina stúpa lineárne s časom. Pri vyprázdňovaní otvorom v dne však výtokový prítok závisí od výšky hladiny. Z energetickej bilancie odvodíme v kap. 6 Torricelliho vzťah pre výtokovú rýchlosť $v = \sqrt{2gh}$. Skutočný prítok otvorom s plochou A_o je menší. Zúženie prúdu za ostrou hranou otvoru a straty sa zohľadňujú *súčiniteľom výtoku* μ :

$$Q = \mu A_o \sqrt{2gh}. \quad (5.14)$$

Pre malý otvor s ostrou hranou je $\mu \approx 0,6$ až $0,62$, pre zaoblený vtok až $0,97$ [1, 5].

Dosadením (5.14) do (5.12) s nulovým prítokom dostaneme diferenciálnu rovnicu so separovateľnými premennými:

$$A_n \frac{dh}{dt} = -\mu A_o \sqrt{2g} \sqrt{h} \quad \implies \quad \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\mu A_o \sqrt{2g}}{A_n} dt.$$

Integráciou od výšky h_0 v čase $t = 0$ po výšku h_1 dostaneme čas vyprázdňovania

$$t = \frac{2A_n}{\mu A_o \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1} \right). \quad (5.15)$$

Úplné vyprázdnenie ($h_1 = 0$) trvá dvakrát dlhšie, ako keby celý objem vytekal stálym začiatočným prietokom. Hladina totiž klesá stále pomalšie (obr. 5.6).

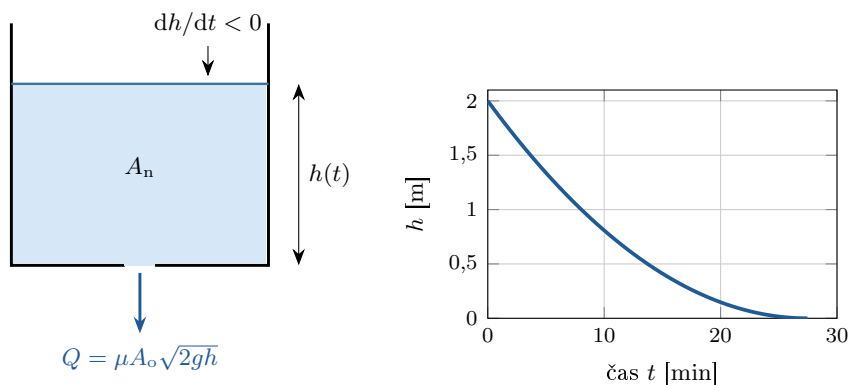
Príklad 5.5 – Vyprázdnenie akumulácie nádrže

Valcová nádrž na dažďovú vodu s priemerom 2 m je naplnená do výšky 2 m. V dne je otvor s priemerom 50 mm a súčiniteľom výtoku $\mu = 0,62$. Za aký čas sa nádrž vyprázdni? Aký je začiatočný prietok?

Riešenie. $A_n = \pi \cdot 2^2/4 = 3,142 \text{ m}^2$, $A_o = \pi \cdot 0,05^2/4 = 1,963 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Podľa (5.15):

$$t = \frac{2 \cdot 3,142}{0,62 \cdot 1,963 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \sqrt{2} = 1648 \text{ s} \approx 27,5 \text{ min.}$$

Začiatočný prietok je $Q_0 = 0,62 \cdot 1,963 \cdot 10^{-3} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2} = 7,6 \text{ L/s}$. Pri stálom prietoku Q_0 by sa objem $6,28 \text{ m}^3$ vyprázdnil za 13,7 min, teda za polovičný čas. ■



Obr. 5.6. Vyprázdňovanie nádrže otvorom v dne a priebeh výšky hladiny v čase pre pr. 5.5.

Pri súčasnom prítoku a odtoku rovnicu (5.12) obvykle riešime numericky. Stačí jednoduchá explicitná metóda: $h_{k+1} = h_k + \Delta t (Q_{\text{vst}} - Q_{\text{vst}}(h_k))/A_n$. Takto sa počíta napríklad priebeh hladiny v zdrži MVE (obr. 5.7) pri premenlivom prítoku z toku a riadenom odbere turbínou.

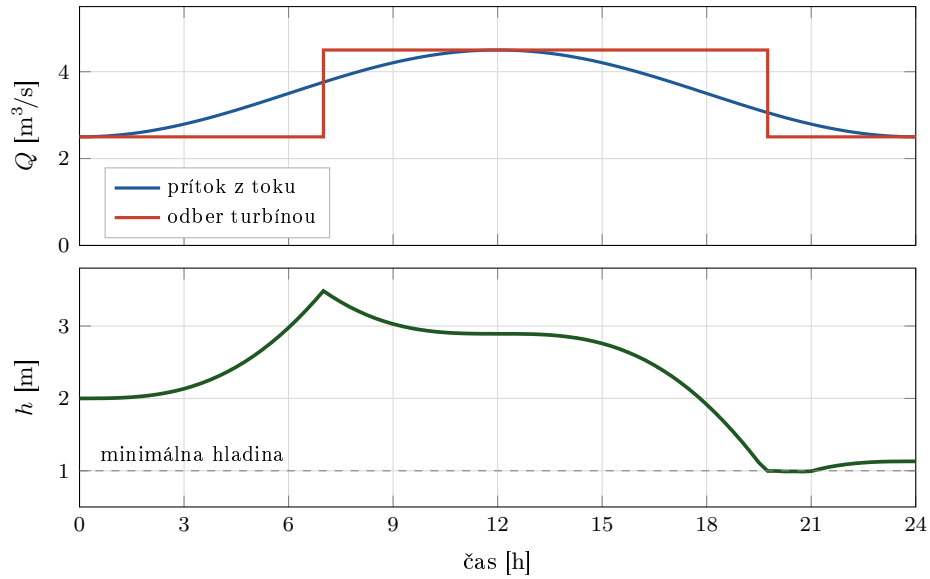
5.10 Hmotnostná bilancia energetických zariadení

Prúdová trubica veternej turbíny

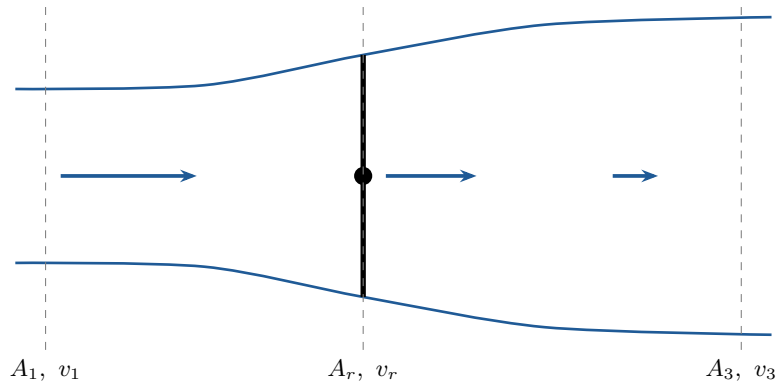
Uvažujme prúdovú trubicu, ktorá obopína rotor veternej turbíny (obr. 5.8). Cez jej plášť vzduch nepreteká (odd. 4.3). Pri malých zmenách tlaku je hustota vzduchu takmer konštantná. Pre prierezy ďaleko pred rotorom (1), v rovine rotora (r) a ďaleko za rotorom (3) platí rovnica kontinuity

$$A_1 v_1 = A_r v_r = A_3 v_3. \quad (5.16)$$

Rotor odoberá vzduchu kinetickú energiu, preto $v_1 > v_r > v_3$. Z rovnice kontinuity potom vyplýva, že *prúdová trubica sa musí rozširovať*: $A_1 < A_r < A_3$. Tým je zodpovedaná prvá otázka zo začiatku kapitoly. Vzduch sa pred rotorom čiastočne obteká okolo neho.



Obr. 5.7. Numerické riešenie bilancie (5.12) pre zdrž MVE s plochou $8\,000\text{ m}^2$: prítok sa mení počas dňa, turbína pracuje cez deň s plným prietokom, v noci so zníženým. Pri poklese na minimálnu hladinu riadenie zníži odber.



Obr. 5.8. Prúdová trubica veternej turbíny. Spomalenie vzduchu vedie k rozšíreniu prúdovej trubice.

V teórii aktuátorového disku sa spomalenie opisuje *súčiniteľom axiálnej indukcie* a : $v_r = v_1(1-a)$ a $v_3 = v_1(1-2a)$ [24, 25]. Druhý vzťah odvodíme z bilancie hybnosti a energie. Najväčší výkon odoberá rotor pri $a = 1/3$ (Betzov limit).

Príklad 5.6 – Rozšírenie prúdovej trubice

Určte pomer plôch prúdovej trubice ďaleko pred rotorom a ďaleko za ním k ploche rotora pre $a = 1/3$.

Riešenie. $v_r = \frac{2}{3}v_1$, $v_3 = \frac{1}{3}v_1$. Z (5.16):

$$\frac{A_1}{A_r} = \frac{v_r}{v_1} = \frac{2}{3}, \quad \frac{A_3}{A_r} = \frac{v_r}{v_3} = 2.$$

Rotorom prejde len vzduch, ktorý ďaleko pred turbínou prúdil prierezom rovným dvom tretinám plochy rotora. Za rotorom sa prúdová trubica rozšíri na dvojnásobok plochy rotora. Preto musia byť turbíny vo veternom parku od seba dostatočne vzdialené. ■

Bioplynová stanica

Hmotnostná bilancia fermentora slúži na kontrolu prevádzky a na odhad produkcie bioplynu. Pri ustálenej prevádzke platí

$$\dot{m}_{\text{substrt}} = \dot{m}_{\text{digestt}} + \dot{m}_{\text{bioplyn}}. \quad (5.17)$$

Organická sušina substrátu sa mení na bioplyn, voda a nerozložiteľné látky odchádzajú v digestáte.

Príklad 5.7 – Bilancia fermentora

Do fermentora sa denne dávkuje 20 t substrátu a odoberá 18,5 t digestátu. Hmotnosť obsahu fermentora sa nemení. Koľko bioplynu vzniká za deň, ak má hustotu $1,15 \text{ kg/m}^3$ (pr. 2.2)?

Riešenie. $\dot{m}_{\text{bioplyn}} = 20 - 18,5 = 1,5 \text{ t/d}$. Objem pri 15°C a normálnom tlaku je $V = 1500/1,15 = 1300 \text{ m}^3/\text{d}$, teda asi $54 \text{ m}^3/\text{h}$. Ak by meranie prietoku bioplynu ukazovalo výrazne menšiu hodnotu, bolo by treba hľadať netesnosť alebo chybu merania. Rovnako by mohol digestát odchádzať aj inou cestou, napríklad cez penu. ■

Ďalšie aplikácie

- **Tepelné siete:** v uzavretej sieti je hmotnosť vody konštantná. Ak je nutné vodu doplňovať, množstvo doplňovanej vody priamo meria úniky. Sleduje sa ako ukazovateľ stavu siete.
- **Chladiace veže a mokré chladenie:** bilancia vody musí zahŕňať odparenú vodu, unášanú kvapky a odluh.
- **Malé vodné elektrárne:** prietok turbínou nesmie prekročiť prietok v toku znížený o prietok, ktorý musí zostať v koryte (sanačný alebo minimálny zostatkový prietok). Rozhoduje o tom bilancia prietokov v mieste odberu (kap. 14).
- **Spaľovanie biomasy:** hmotnostný prietok spalín sa rovná súčtu prietoku paliva a spaľovacieho vzduchu, zmenšenému o prietok popola. Z neho sa dimenzujú dymovody a ventilátory (kap. 15).

Zhrnutie kapitoly

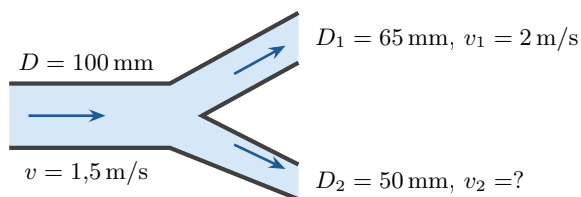
- Hmotnostnú bilanciu zapisujeme v tvare „akumulácia = prítok – odtok“: $dm_{\text{KO}}/dt = \sum \dot{m}_{\text{vst}} - \sum \dot{m}_{\text{vst}}$.
- Pri ustálenom prúdení je akumulácia nulová a súčet prítokov sa rovná súčtu odtokov. Zachováva sa hmotnostný prietok, a to aj pri zmene teploty a hustoty.
- Objemový prietok sa zachováva len pri konštantnej hustote.
- Rovnica kontinuity $A_1 v_1 = A_2 v_2$ je špeciálnym prípadom pre ustálené prúdenie nestlačiteľnej tekutiny s jedným vstupom a jedným výstupom.
- V uzle potrubnej siete je súčet prietokov nulový. O rozdelení prietoku do vetiev rozhodujú tlakové straty.
- Zmena hladiny v nádrži je $dh/dt = (Q_{\text{vst}} - Q_{\text{vst}})/A_n$. Vyprázdnenie nádrže otvorom trvá dvakrát dlhšie ako pri stálom začiatocnom prietoku.
- Spomalenie vzduchu v rotore veternej turbíny vedie podľa rovnice kontinuity k rozšíreniu prúdovej trubice.

Kontrolné otázky

1. Zapište hmotnostnú bilanciu kontrolného objemu slovne a rovnicou. Čo znamenajú jednotlivé členy?
2. Aké zásady platia pri voľbe kontrolného objemu?
3. Kedy sa zachováva objemový prietok a kedy len hmotnostný prietok?
4. Z akých predpokladov vychádza rovnica $A_1v_1 = A_2v_2$? Uveďte príklad, keď ju nemožno použiť.
5. Prečo sa pri ohreve vzduchu v kolektore zvýši jeho rýchlosť, hoci sa nezmení prierez kanála?
6. Ako súvisí rovnica pre uzol potrubnej siete s Kirchhoffovým zákonom? Určuje táto rovnica rozdelenie prietoku medzi paralelné vetvy?
7. Prečo sa pri spájaní prúdov počíta výsledná teplota z hmotnostných, a nie z objemových prietokov?
8. Prečo vyprázdnenie nádrže otvorom trvá dvakrát dlhšie, ako keby voda vytekala stálym začiatočným prietokom?
9. Ako sa prejavuje akumulácia hmotnosti v tlakovom zásobníku plynu a ako v membránovom plynojeme?
10. Prečo sa prúdová trubica veternej turbíny za rotorom rozširuje?

Úlohy na precvičenie

1. Potrubím s priemerom 100 mm preteká voda rýchlosťou 1,5 m/s. Potrubie sa rozdelí na dve vetvy s priermi 65 mm a 50 mm. V prvej vetve je rýchlosť 2 m/s. Určte rýchlosť v druhej vetve. [2,62 m/s]



2. Aký priemer musí mať zberné potrubie, do ktorého sa spája 8 paralelných vetiev kolektorového poľa (obr. 5.4), každá s prietokom 0,1 L/s, ak rýchlosť v ňom nemá prekročiť 0,8 m/s? [35,7 mm]
3. Zemný plyn prúdi potrubím s priemerom 150 mm. V priereze 1 je absolútny tlak 4 bar, rýchlosť 8 m/s, v priereze 2 je tlak 3,6 bar. Teplota je konštantná. Určte rýchlosť v priereze 2. [8,89 m/s]
4. Do nádrže s plochou hladiny 12 m^2 priteká 15 L/s a oteká 9 L/s. Ako rýchlo stúpa hladina? Za aký čas stúpne o 0,5 m? [1,8 m/h; 16,7 min]
5. Zmiešavací ventil má pripraviť 0,4 kg/s vody s teplotou 40°C z vody s teplotou 70°C a spiatocky s teplotou 32°C . Určte oba prietoky. [0,084 kg/s; 0,316 kg/s]
6. Valcová nádrž s priemerom 1,2 m je naplnená vodou do výšky 1,5 m. Za aký čas klesne hladina na 0,5 m pri výtoku otvorom s priemerom 30 mm a $\mu = 0,6$? [623 s]

7. Tlakový zásobník vodíka s objemom 2 m^3 má teplotu 20°C . Plní sa hmotnostným prietokom $0,5\text{ g/s}$. Ako rýchlo rastie tlak? Merná plynová konštanta vodíka je $4\,124\text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$.
[302 Pa/s]
8. Veterná turbína s priemerom rotora 90 m pracuje so súčiniteľom axiálnej indukcie $a = 0,3$. Určte priemer prúdovej trubice ďaleko pred rotorom a ďaleko za ním (obr. 5.8). [75,3 m; 119,1 m]
9. Zdrž MVE s plochou hladiny $8\,000\text{ m}^2$ má prítok $3\text{ m}^3/\text{s}$. Turbína odoberá $4,5\text{ m}^3/\text{s}$. Za aký čas klesne hladina o $0,6\text{ m}$, keď sa turbína musí odstaviť? [53 min]
10. V tabuľkovom procesore alebo v Pythone numericky vyriešte (5.12) pre nádrž z pr. 5.5, do ktorej navyše priteká stály prietok 3 L/s . Určte ustálenú výšku hladiny a porovnajte ju s analytickým výsledkom $h_\infty = Q_{\text{vst}}^2/(2g\mu^2 A_o^2)$. [0,31 m]

Kapitola 6

Energia prúdiacej tekutiny a Bernoulliho rovnica

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent zostaví mechanickú energetickú bilanciu systému s čerpadlom, turbínou a stratami a vyjadrí ju v tlakoch aj vo výškach. Vie rozhodnúť, kedy možno použiť Bernoulliho rovnicu, a použije ju na meranie rýchlosti a prietoku. Nakreslí čiaru energetickej výšky a piezometrickú čiaru. Vysvetlí, prečo čerpadlo v uzavretom okruhu spotrebúva energiu, a vypočíta jeho dopravnú výšku a príkon.

Kľúčové pojmy

mechanická energia, tlaková energia, kinetická energia, potenciálna energia, energetická výška, mechanická energetická bilancia, Bernoulliho rovnica, statický, dynamický a celkový tlak, Prandtlova trubica, piezometrická čiara, čiara energetickej výšky, dopravná výška čerpadla, čistý spád, stratová výška, Venturiho trubica, výtok z nádrže

Energia je ústredným pojmom celej knihy. Obnoviteľné zdroje energie využívajú energiu prúdiacej vody a vzduchu a teplotu látky treba dopravovať s čo najmenšou spotrebou energie. V tejto kapitole zostavíme *mechanickú energetickú bilanciu* prúdiacej tekutiny. Ukážeme, že známa Bernoulliho rovnica je len jej špeciálnym prípadom pre ideálnu tekutinu bez strát a bez strojov. Pre technickú prax je dôležitá rozšírená energetická rovnica s čerpadlom, turbínou a stratami. S ňou budeme pracovať vo všetkých ďalších kapitolách. Výklad nadväzuje na [1, 5].

Na zamyslenie

Prečo čerpadlo spotrebúva elektrickú energiu aj v uzavretom okruhu, v ktorom sa tekutina vráti do pôvodnej výšky? Na začiatku aj na konci okruhu má tekutina rovnaký tlak, rovnakú rýchlosť a je v rovnakej výške. Kam sa podela energia, ktorú jej čerpadlo odovzdalo? A záleží na tom, či sú slnečné kolektory na streche vo výške 3 m alebo 30 m nad čerpadlom?

6.1 Formy energie tekutiny

Tekutina v prúde má niekoľko foriem energie:

- **vnútornú energiu u** , ktorá súvisí s teplotou a s pohybom molekúl,

- **kinetickú energiu** $v^2/2$ usporiadaného pohybu,
- **potenciálnu energiu** gz v tiažovom poli,
- prúdiaca tekutina navyše prenáša cez hranicu kontrolného objemu **tlakovú energiu** p/ρ .

Všetky údaje sú vzťahované na jednotku hmotnosti (J/kg).

Tlaková energia si zaslúži vysvetlenie. Aby sme do kontrolného objemu vtlačili ďalšiu tekutinu, musí okolitá tekutina vykonať prácu proti tlaku v KO. Na vtlačenie objemu V cez plochu A pri tlaku p treba prácu $pA \cdot (V/A) = pV$, na jednotku hmotnosti p/ρ . Táto práca sa nazýva *práca vtlačania* (angl. *flow work*) a v mechanike tekutín ju zvyčajne nazývame tlakovou energiou [1]. Tekutina v pokoji v uzavretej nádobe túto energiu „nemá“. Prejaví sa až pri prúde cez hranicu.

Kinetická, potenciálna a tlaková energia sa nazývajú *mechanické* formy energie. Môžu sa navzájom premieňať a v ideálnom prípade ich možno celé premeniť na mechanickú prácu, napríklad v turbíne. Vnútna energia je *tepelnou* formou energie. Na prácu ju možno premeniť len čiastočne, v tepelnom obeh. V mechanike tekutín nás zaujíma najmä bilancia mechanickej energie. Vnútnu energiu sledujeme len natoľko, nakoľko do nej prechádza mechanická energia pri stratách.

6.2 Tlaková, kinetická a potenciálna energia

Súčet troch mechanických foriem energie jednotky hmotnosti prúdiacej tekutiny je

$$e = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \quad [\text{J/kg}]. \quad (6.1)$$

Súradnica z sa meria od ľubovoľne zvolenej *porovnávacej roviny* zvisle nahor. Na voľbe porovnávacej roviny nezáleží, lebo v bilanciách vystupujú len rozdiely výšok. Podobne pri nestlačiteľnej tekutine nezáleží na tom, či dosadíme absolútny tlak alebo pretlak. Musíme však byť dôslední a v celej rovnici použiť rovnaký druh tlaku.

Príklad 6.1 – Porovnanie foriem energie

Voda prúdi potrubím rýchlosťou 2 m/s pri pretlaku 3 bar. Potrubie je 10 m nad porovnávacou rovinou. Porovnajte jednotlivé formy mechanickej energie.

Riešenie.

$$\frac{p}{\rho} = \frac{300\,000}{1000} = 300 \text{ J/kg}, \quad \frac{v^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2 \text{ J/kg}, \quad gz = 9,81 \cdot 10 = 98 \text{ J/kg}.$$

Kinetická energia je v potrubných systémoch s bežnými rýchlosťami malá v porovnaní s tlakovou a potenciálnou. Pri zmene rýchlosti sa však mení priamo tlak, ako ukáže Bernoulliho rovnica. Pri vodnej turbíne alebo dýze je naopak kinetická energia rozhodujúca. ■

6.3 Energia na jednotku hmotnosti a jednotku tiaže

Mechanickú energiu môžeme vzťahovať na jednotku hmotnosti, objemu alebo tiaže. Všetky tri spôsoby sa v praxi používajú (tab. 6.1).

Energia na jednotku tiaže nazývame *výškou*. Má rozmer dĺžky a názorný význam: udáva, do akej výšky by sa dala tiaž tekutiny zdvihnúť, ak by sa celá energia premenila na potenciálnu. Preto sa

Tabuľka 6.1. Tri spôsoby vyjadrenia mechanickej energie prúdiacej tekutiny.

Vztiahnuté na	jednotku hmotnosti	jednotku objemu	jednotku tiaže
tlaková	p/ρ	p	$p/(\rho g)$
kinetická	$v^2/2$	$\rho v^2/2$	$v^2/(2g)$
potenciálna	gz	$\rho g z$	z
jednotka	J/kg	J/m ³ = Pa	J/N = m
použitie	termodynamika, stroje	tlaky, vzduchotechnika	hydraulika, čerpadlá, spád

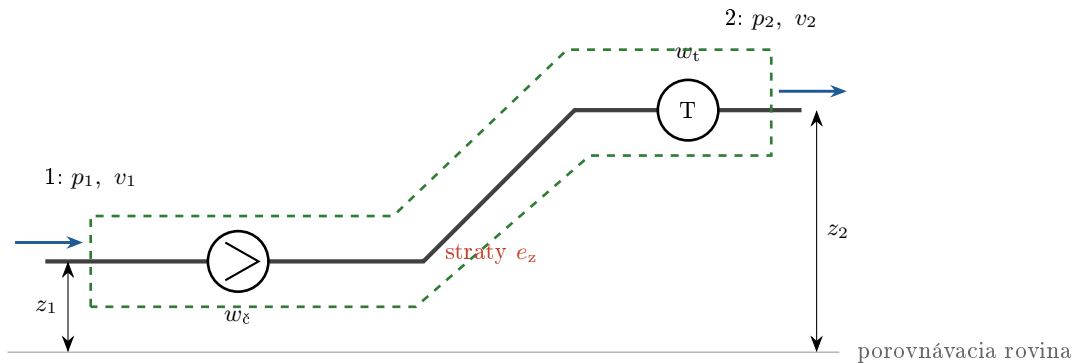
v hydraulike hovorí o *tlakovej výške* $p/(\rho g)$, *rýchlostnej výške* $v^2/(2g)$ a *polohovej (geodetickej) výške* z . Výrobcovia čerpadiel udávajú *dopravnú výšku* v metroch a vodné elektrárne majú *spád* v metroch. Vzťah medzi jednotkami je $e = gH$ a $\Delta p = \rho g H$. Pre vodu zodpovedá 1 m výšky energii 9,81 J/kg a tlaku 9,81 kPa.

6.4 Mechanická energetická bilancia

Uvažujme ustálené prúdenie nestlačiteľnej tekutiny kontrolným objemom s jedným vstupom (1) a jedným výstupom (2), v ktorom je čerpadlo alebo turbína (obr. 6.1). Podľa prvého zákona termodynamiky pre otvorený systém platí na jednotku hmotnosti pretekajúcej tekutiny

$$q + w_{\text{č}} - w_{\text{t}} = \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right), \quad (6.2)$$

kde q je privedené teplo, $w_{\text{č}}$ je práca privedená čerpadlom a w_{t} je práca odovzdaná turbíne (všetko v J/kg).

**Obr. 6.1.** Kontrolný objem pre mechanickú energetickú bilanciu s čerpadlom a turbínou.

Rovnicu preusporiadame tak, aby na jednej strane boli mechanické formy energie:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + w_{\text{č}} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{t}} + e_z} \quad (6.3)$$

kde

$$e_z = (u_2 - u_1) - q \geq 0 \quad (6.4)$$

sú *energetické straty*. Druhý zákon termodynamiky zaručuje, že e_z je vždy nezáporná. Viskózne trenie a turbulentné miešanie nevratne menia mechanickú energiu na vnútornú energiu, teda na teplo (kap. 8 a 9). Opačná premena sama od seba neprebíha.

Rovnica (6.3) hovorí: *mechanická energia na vstupe spolu s prácou čerpadla sa rovná mechanickej energii na výstupe, práci odovzdanej turbíne a stratám*. Je to rovnaká bilancia „prítok = odtok + spotreba“, akú sme zostavili pre hmotnosť, s tým rozdielom, že mechanická energia sa nezachováva, ale časť sa „spotrebuje“ na straty.

Poznámka

Straty sú „stratami“ len z hľadiska mechanickej energie. Energia nezaniká, mení sa na teplo, ktoré ohrieva tekutinu. Pri vode stačí strata 100 m výšky na ohrev o $\Delta T = gh_z/c_p = 9,81 \cdot 100 / 4186 = 0,23$ K. Z hľadiska tepelnej bilancie je tento ohrev zanedbateľný, z hľadiska spotreby elektriny čerpadla však ide o drahú, znehodnotenú energiu.

6.5 Bernoulliho rovnica

Ak v rovnici (6.3) nie je čerpadlo ani turbína a straty sú zanedbateľné, dostaneme

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2. \quad (6.5)$$

Súčet tlakovej, kinetickej a potenciálnej energie je pozdĺž prúdu konštantný. Toto je *Bernoulliho rovnica*. V tlakovom tvare ju zapisujeme

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{konšt.} \quad (6.6)$$

Bernoulliho rovnicu možno odvodiť aj priamo z druhého Newtonovho zákona pre časticu, ktorá sa pohybuje po prúdnicí. Na element dĺžky ds s prierezom dA pôsobí v smere prúdnice tlaková sila $-(\partial p / \partial s) ds dA$ a zložka tiaže $-\rho g ds dA (dz/ds)$. Pri ustálenom prúdení je zrýchlenie v smere prúdnice $v dv/ds$ (odd. 4.1). Potom

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz \right) = 0,$$

čo je rovnica (6.6) [1]. Tento postup ukazuje, že Bernoulliho rovnica je v podstate *bilanciou síl* na časticu tekutiny bez trenia. Tlakový rozdiel zrýchľuje tekutinu, preto kde je väčšia rýchlosť, je menší tlak.

Premenu tlakovej energie na kinetickú a späť v zúžení potrubia ukazuje obr. 6.2.

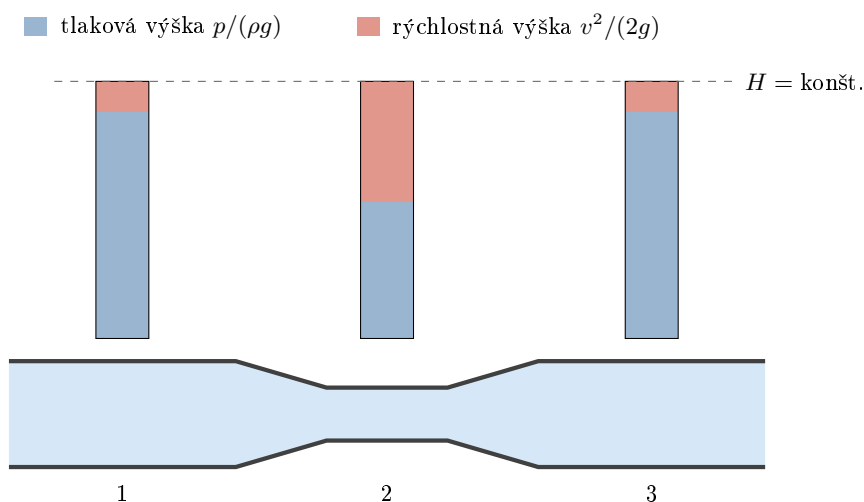
Príklad 6.2 – Pokles tlaku v redukcii

Voda z pr. 5.1 prúdi redukciou vo vodorovnom potrubí z priemeru 80 mm ($v_1 = 1,2$ m/s) na 50 mm ($v_2 = 3,07$ m/s). O koľko klesne tlak, ak zanedbáme straty?

Riešenie. Pri $z_1 = z_2$ z (6.6):

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{998}{2} (3,07^2 - 1,2^2) = 4,0 \text{ kPa}.$$

Tlak klesol, lebo časť tlakovej energie sa premenila na kinetickú. Za redukciou späť na 80 mm by sa tlak ideálne vrátil na pôvodnú hodnotu. V skutočnosti sa pri rozšírení časť energie stratí (kap. 11). ■



Obr. 6.2. Premena energie v zúžení vodorovného potrubia bez strát: súčet tlakovej a rýchlostnej výšky je vo všetkých prierezoch rovnaký. V zúžení (2) rastie rýchlostná výška na úkor tlakovej.

6.6 Predpoklady Bernoulliho rovnice

Bernoulliho rovnica je jednou z najčastejšie používaných, ale aj najčastejšie nesprávne používaných rovníc mechaniky tekutín [1, 33]. Platí len pri splnení týchto predpokladov:

1. **Ustálené prúdenie.** Pri neustálenom prúdení pribúda člen lokálneho zrýchlenia (rozbeh, zatváranie ventilu, hydraulický ráz).
2. **Nestlačiteľná tekutina.** Pre plyny platí približne, ak sa hustota mení o menej ako niekoľko percent. Pre vzduch to približne zodpovedá rýchlostiam pod 100 m/s (kap. 15).
3. **Zanedbateľné trenie.** Nemožno ju použiť na dlhé potrubia, úzke štrbiny, oblasti za prekážkami a v úplavoch, kde sa energia stráca.
4. **Žiadna práca strojov.** Medzi bodmi 1 a 2 nesmie byť čerpadlo, ventilátor ani turbína.
5. **Žiadna výmena tepla,** ktorá by menila hustotu alebo teplotu tekutiny.
6. **Pozdĺž jednej prúdnice.** Konštanta v (6.6) môže byť na rôznych prúdniciach rôzna. Rovnaká je všade len pri nevírovom prúdení (odd. 4.11).

V potrubí s 1D aproximáciou nahradíme prúdnicu osou potrubia a lokálnu rýchlosť strednou rýchlosťou. Pri nerovnomernom profile treba použiť Coriolisov súčiniteľ (odd. 6.17).

Pozor – častá chyba

Bernoulliho rovnica *nepopisuje* prúdenie cez čerpadlo, turbínu ani dlhý úsek potrubia. Prečo čerpadlo v uzavretom okruhu spotrebúva energiu, z nej nezistíme. Na to potrebujeme úplnú rovnicu (6.3). Bernoulliho rovnica je vhodná na krátke úseky so zrýchľujúcim sa prúdom: dýzy, zúženia, vtoky, výtoky a meracie prístroje.

6.7 Fyzikálna interpretácia jednotlivých členov

Bernoulliho rovnica opisuje *premenu* jednej formy mechanickej energie na inú:

- **tlaková** $\leftrightarrow$ **kinetická**: v zúžení sa tlak mení na rýchlosť, v rozšírení (difúzore) naopak. Na tom je založená dýza Peltonovej turbíny aj savka reakčných turbín, ktorá spätne získava kinetickú energiu vody vystupujúcej z obežného kola.
- **potenciálna** $\leftrightarrow$ **kinetická**: voda padajúca z výšky h získa rýchlosť $\sqrt{2gh}$ (odd. 6.15).
- **potenciálna** $\leftrightarrow$ **tlaková**: v pokojnej kvapaline ($v = 0$) prechádza Bernoulliho rovnica na hydrostatickú rovnicu $p + \rho gz = \text{konšt.}$ (kap. 3).

Bernoulliho rovnica teda obsahuje hydrostatiku ako špeciálny prípad. Zároveň vysvetľuje, prečo vzniká vztlak na profile krídla alebo lopatky: nad profilom je väčšia rýchlosť a menší tlak ako pod ním [33].

6.8 Statický, dynamický a celkový tlak

Jednotlivé členy tlakového tvaru Bernoulliho rovnice majú vlastné názvy:

- **statický tlak** p je skutočný termodynamický tlak v tekutine. Namerali by sme ho prístrojom, ktorý sa pohybuje spolu s tekutinou, alebo otvorom v stene kolmom na prúd,
- **dynamický tlak** $p_d = \frac{1}{2}\rho v^2$ vyjadruje kinetickú energiu jednotky objemu,
- **hydrostatický tlak** ρgz ,
- **celkový (stagnačný) tlak** $p_c = p + \frac{1}{2}\rho v^2$ nameriame v stagnačnom bode, kde sa prúd úplne zastaví (pr. 4.2).

Na tomto princípe je založená *Prandtlava trubica* (obr. 6.3). Otvor na čele trubice meria celkový tlak, otvory na plášti statický tlak. Ich rozdiel je dynamický tlak, z ktorého vypočítame rýchlosť:

$$v = \sqrt{\frac{2(p_c - p)}{\rho}}. \quad (6.7)$$

Prandtlava trubica sa používa na meranie rýchlosti vo vzduchotechnike, pri skúškach ventilátorov a v aerodynamických tuneloch [14]. Samotná *Pitotova trubica* (len otvor na čele) meria celkový tlak. Statický tlak sa vtedy meria otvorom v stene potrubia.

Príklad 6.3 – Meranie rýchlosti vzduchu Prandtlovou trubicou

Prandtlava trubica vo vzduchovode rekuperačnej jednotky ukazuje dynamický tlak 120 Pa. Hustota vzduchu je $1,2 \text{ kg/m}^3$. Aká je rýchlosť vzduchu? Akú rýchlosť by ukázala tá istá trubica vo vode, ak by rozdiel tlakov zodpovedal stĺpcu vody 50 mm?

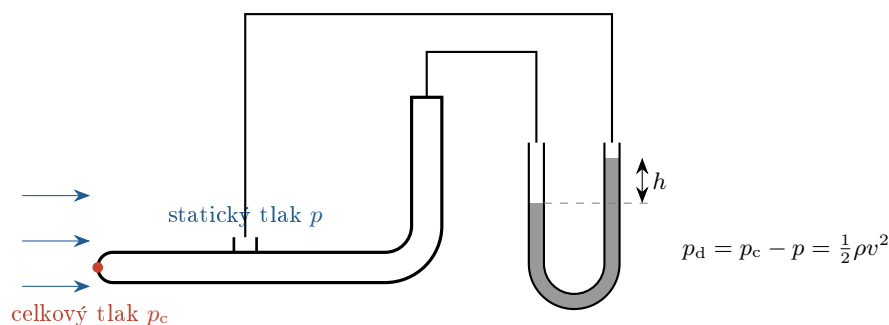
Riešenie. Vzduch: $v = \sqrt{2 \cdot 120 / 1,2} = 14,1 \text{ m/s}$. Voda: $p_c - p = \rho gh$, takže $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,05} = 0,99 \text{ m/s}$. Trubica meria lokálnu rýchlosť v jednom bode. Na určenie prietoku treba merať v niekoľkých bodoch prierezu (odd. 4.9). ■

6.9 Energetická a piezometrická výška

Ak Bernoulliho rovnicu vydelíme ρg , dostaneme ju vo výškovom tvare:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{konšt.} \quad (6.8)$$

- H je *energetická výška*, teda celková mechanická energia jednotky tiaže,



Obr. 6.3. Prandtlova trubica s U-manometrom meria dynamický tlak ako rozdiel celkového a statického tlaku.

- $h_p = z + p/(\rho g)$ je *piezometrická výška* (odd. 3.4), do ktorej vystúpi kvapalina v piezometrickej trubici pripojenej k potrubiu,
- $v^2/(2g)$ je *rýchlostná výška*, o ktorú je energetická výška väčšia ako piezometrická.

Výškový tvar je v hydraulike najnázornejší. Všetky členy majú rozmer dĺžky a môžeme ich zakresliť priamo do schémy potrubia (odd. 6.13).

6.10 Čerpadlo v energetickej rovnici

Čerpadlo odovzdáva tekutine prácu w_ϵ na jednotku hmotnosti. Vo výškovom tvare ju vyjadrujeme ako *dopravnú výšku čerpadla*

$$H_\epsilon = \frac{w_\epsilon}{g} = \frac{p_V - p_S}{\rho g} + \frac{v_V^2 - v_S^2}{2g} + (z_V - z_S), \quad (6.9)$$

kde index S označuje sacie a V výtlačné hrdlo čerpadla (malé písmeno p_s je v učebnici vyhradené pre tlak nasýtených pár). Dopravná výška je teda prírastok energetickej výšky tekutiny v čerpadle. Pri rovnakých priemeroch hrdiel a malom výškovom rozdieli je približne $H_\epsilon \approx \Delta p/(\rho g)$.

Výkon odovzdaný tekutine, tzv. *hydraulický (užitočný) výkon*, je

$$P_h = \dot{m} w_\epsilon = \rho g Q H_\epsilon = Q \Delta p_\epsilon. \quad (6.10)$$

Príkon čerpadla je väčší o straty v čerpadle, $P = P_h/\eta_\epsilon$. Tým sme odvodili vzťah (1.2) z úvodnej kapitoly. Charakteristikami čerpadiel sa zaoberá kap. 13.

Priebeh čiary energetickej výšky v systéme s čerpadlom a vo vodnej elektrárni porovnáva obr. 6.4.

Príklad 6.4 – Dopravná výška čerpadla v otvorenom systéme

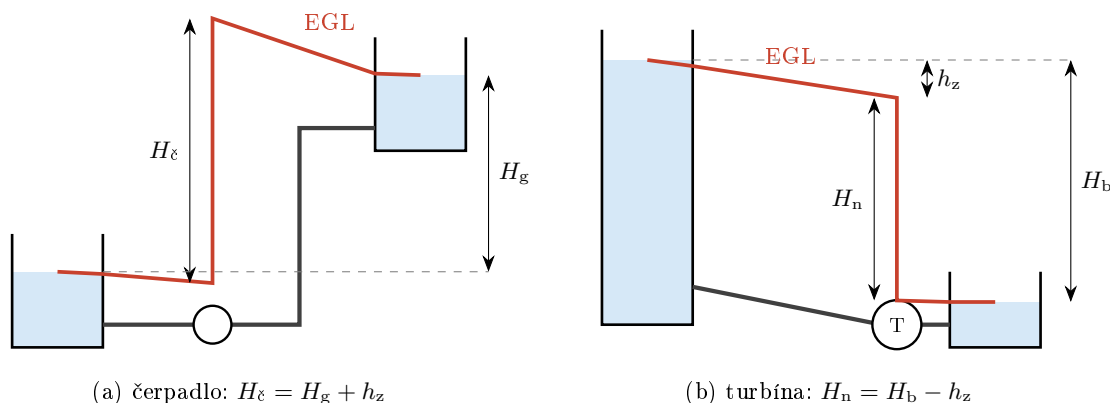
Čerpadlo dopravuje 10 L/s vody z dolnej otvorenej nádrže do hornej otvorenej nádrže, ktorej hladina je o 15 m vyššie. Straty v potrubí sú $h_z = 3,2$ m. Určte dopravnú výšku a príkon čerpadla pri účinnosti 0,70.

Riešenie. Body 1 a 2 volíme na hladinách: $p_1 = p_2 = p_a$, $v_1 \approx v_2 \approx 0$. Z výškového tvaru rovnice (6.3):

$$H_\epsilon = (z_2 - z_1) + h_z = 15 + 3,2 = 18,2 \text{ m.}$$

$$P_h = \rho g Q H_\epsilon = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,01 \cdot 18,2 = 1,79 \text{ kW}, \quad P = \frac{1,79}{0,70} = 2,55 \text{ kW.}$$

Čerpadlo musí prekonať geodetický rozdiel hladín aj straty. ■



Obr. 6.4. Čiara energetickej výšky (EGL): (a) čerpadlo medzi dvoma nádržami zvyšuje energetickú výšku o H_ε , ktorá pokryje geodetický rozdiel H_g aj straty, (b) vo vodnej elektrárni turbína spracuje čistý spád H_n , teda hrubý spád zmenšený o straty.

6.11 Turbína v energetickej rovnici

Turbína odoberá tekutine prácu w_t . Vo vodnej energetike sa namiesto nej používa *čistý spád* turbíny H_n , teda rozdiel energetických výšok vody pred turbínou a za ňou. Pre vodnú elektrárňu s hladinami hornej a dolnej vody v bodoch 1 a 2 ($p_1 = p_2 = p_a$, $v_1 \approx v_2 \approx 0$) z (6.3) vyplýva

$$H_n = \frac{w_t}{g} = (z_1 - z_2) - h_z = H_b - h_z, \quad (6.11)$$

kde $H_b = z_1 - z_2$ je *hrubý spád* (obr. 6.4b) a h_z sú straty v privádzači a odpadovom kanáli. Elektrický výkon elektrárne je

$$P = \eta_t \eta_g \rho g Q H_n, \quad (6.12)$$

kde η_t je účinnosť turbíny a η_g účinnosť generátora, prípadne aj prevodovky. Rovnica (1.8) z úvodnej kapitoly je jej zjednodušeným tvarom s celkovou účinnosťou [16].

Príklad 6.5 – Výkon MVE s uvažovaním strát v privádzači

Malá vodná elektrárňu má hrubý spád 25 m. Pri prietoku $1,2 \text{ m}^3/\text{s}$ sú straty v privádzači 1,8 m. Účinnosť turbíny je 0,88, generátora 0,95. Určte čistý spád a elektrický výkon.

Riešenie. $H_n = 25 - 1,8 = 23,2 \text{ m}$. Podľa (6.12):

$$P = 0,88 \cdot 0,95 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,2 \cdot 23,2 = 228 \text{ kW}.$$

Straty v privádzači znížili výkon o $1,8/25 = 7,2\%$. Straty rastú približne s druhou mocninou prietoku (kap. 10). Pri návrhu privádzača preto treba hľadať optimum medzi cenou potrubia väčšieho priemeru a ročnou stratou výroby. ■

6.12 Energetické straty

Straty e_z vyjadrujeme vo výškovom tvare ako *stratovú výšku* $h_z = e_z/g$ [m] alebo v tlakovom tvare ako *tlakovú stratu* $\Delta p_z = \rho g h_z$ [Pa]. V potrubných systémoch ich delíme na dve skupiny:

- **straty trením po dĺžke**, ktoré vznikajú v celej dĺžke potrubia a sú úmerné jeho dĺžke (kap. 10),
- **miestne straty** v armatúrach, kolenách, zúženiach a rozšíreniach (kap. 11).

Obidve sa zvyčajne vyjadrujú ako násobok rýchlostnej výšky:

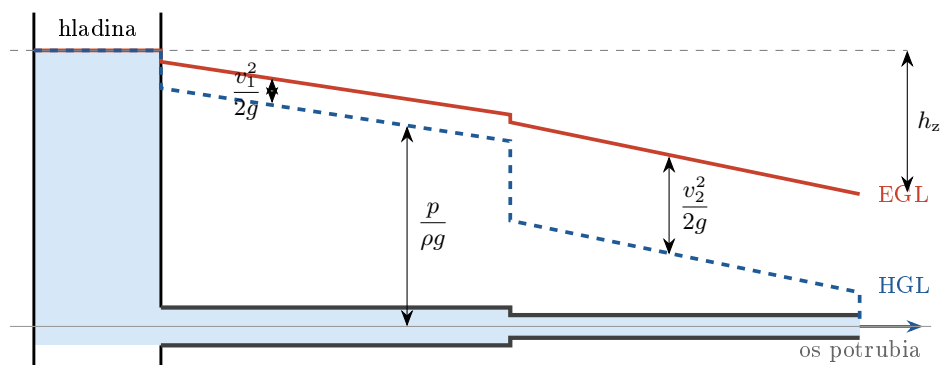
$$h_z = \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (6.13)$$

Súčiniteľ trenia λ a súčinitele miestnych odporov ζ sú empirické. Tvar vzťahu však ukazuje dôležitú vlastnosť: pri turbulentnom prúdení rastú straty približne s druhou mocninou rýchlosti, a teda aj prietoku. Z toho vyplýva závislosť tretej mocniny pre výkon (odd. 1.9).

6.13 Čiara energetickej výšky (EGL)

Čiara energetickej výšky (angl. *energy grade line*, EGL) spája body, ktoré ležia vo výške $H = z + p/(\rho g) + v^2/(2g)$ nad porovnávacou rovinou (obr. 6.5). Jej priebeh vyplýva priamo z energetickej bilancie:

- bez strát a strojov je vodorovná (Bernoulliho rovnica),
- pri trení v potrubí so stálym prierezom klesá lineárne v smere prúdenia. Jej sklon h_z/L sa nazýva *hydraulický sklon*,
- pri miestnych odporoch (vtok, zúženie, ventil) klesá skokom,
- na čerpadle stúpne skokom o H_c , na turbíne klesne o H_n ,
- nikdy nestúpa v smere prúdenia, okrem miesta, kde je čerpadlo.



Obr. 6.5. Čiara energetickej výšky (EGL) a piezometrická čiara (HGL) pri výtoku z nádrže potrubím so zúžením. Na vtoku a v zúžení vznikajú miestne straty, v potrubí straty trením.

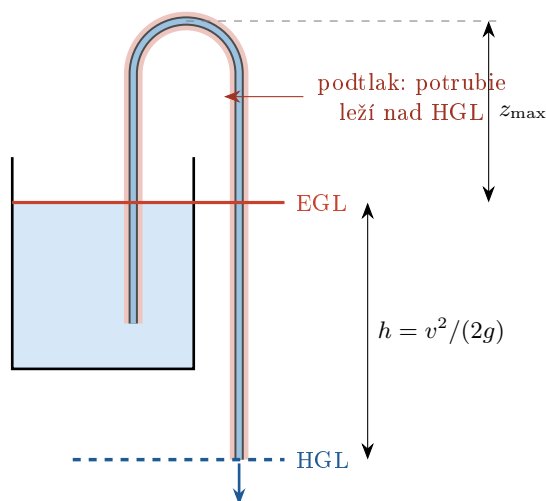
6.14 Piezometrická čiara (HGL)

Piezometrická čiara (angl. *hydraulic grade line*, HGL) spája body vo výške $z + p/(\rho g)$. Leží o rýchlostnú výšku $v^2/(2g)$ pod čiarou energetickej výšky. Kvapalina by vystúpila práve do tejto výšky v piezometrických trubiciach pripojených k potrubiu.

- V potrubí so stálym prierezom je HGL rovnobežná s EGL.

- Pri zúžení rýchlosť rastie, a HGL preto klesne viac ako EGL. Pri rozšírení sa k EGL priblíži.
- Na výtoku do atmosféry je tlak atmosférický, HGL tu prechádza osou výtoku.
- Vzdialenosť HGL od osi potrubia udáva tlakovú výšku. Ak HGL klesne *pod* os potrubia, je v potrubí *podtlak*.

Posledná vlastnosť je mimoriadne dôležitá pre prax. V miestach podtlaku sa z vody uvoľňuje rozpustený vzduch, cez netesnosti sa do potrubia nasáva vzduch a pri poklese tlaku pod tlak nasýtených pár vzniká kavitácia (odd. 2.9). Pri návrhu potrubí, napríklad privádzača MVE vedeného cez terénnu vlnu, alebo zbernej siete s natekaním, treba preto piezometrickú čiaru vždy zakresliť a overiť, či neprechádza pod potrubím. Typickým príkladom je *násoska* (sifón), ktorou sa voda prepúšťa ponad prekážku (obr. 6.6). Ak zanedbáme straty, čiara energetickej výšky je vodorovná vo výške hladiny a piezometrická čiara leží o rýchlostnú výšku $v^2/(2g) = h$ nižšie, teda vo výške výtoku. Celá násoska nad úrovňou výtoku je preto v podtlaku. Najnižší tlak je v najvyššom bode, a preto výška $z_{\max}$ nesmie prekročiť hodnotu, pri ktorej by tlak klesol na tlak nasýtených pár (úloha 9).



Obr. 6.6. Násoska bez strát: piezometrická čiara (HGL) je vodorovná vo výške výtoku. Potrubie nad ňou je v podtlaku, najväčší podtlak je v najvyššom bode.

6.15 Výtok z nádrže

Uvažujme veľkú otvorenú nádrž, z ktorej vyteká voda malým otvorom v hĺbke h pod hladinou. Bod 1 zvolíme na hladine, bod 2 v zúženom priereze vytekajúceho prúdu. Na hladine je $p_1 = p_a$ a pri veľkej nádrži $v_1 \approx 0$. Vo výtokovom prúde je $p_2 = p_a$. Z Bernoulliho rovnice dostaneme *Torricelliho vzťah*

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \quad (6.14)$$

Výtoková rýchlosť sa rovná rýchlosti voľného pádu z výšky h . Potenciálna energia sa premenila na kinetickú.

Skutočný prietok je menší ako súčin plochy otvoru a Torricelliho rýchlosti. Prúd sa za ostrou hranou zužuje a pri výtoku vznikajú straty. Obidva vplyvy zahŕňa súčiniteľ výtoku μ (rov. (5.14)). Tento vzťah sme použili pri vyprázdňovaní nádrží (odd. 5.9).

Príklad 6.6 – Výtok zo zásobníka

Z otvoru s priemerom 20 mm vo vzdialenosti 3 m pod hladinou vyteká voda. Určte teoretickú výtokovú rýchlosť a skutočný prietok pre $\mu = 0,62$.

Riešenie. $v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3} = 7,67 \text{ m/s}$, $Q = \mu A v = 0,62 \cdot \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot 7,67 = 1,49 \text{ L/s}$. ■

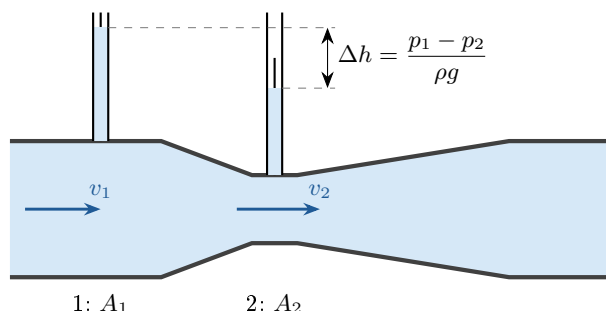
Rovnaký princíp využíva *Peltonova turbína*. Celý čistý spád sa v dýze premení na kinetickú energiu vodného prúdu s rýchlosťou blízko $\sqrt{2gH_n}$. Pri spáde 200 m je to asi 63 m/s. Prúd potom odovzdáva hybnosť lopatkám obežného kola (kap. 7 a 14).

6.16 Venturiho trubica a meranie prietoku

Venturiho trubica je potrubie s plynulým zúžením (konfúzorom), krátkym hrdlom a pozvoľným rozšírením (difúzorom) (obr. 6.7). V hrdle sa rýchlosť zväčší a tlak klesne. Z rozdielu tlakov určíme prietok. Kombináciou Bernoulliho rovnice pre prierezy 1 a 2 a rovnice kontinuity $v_1 = v_2 A_2 / A_1$ dostaneme

$$Q = C_d A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}, \quad (6.15)$$

kde C_d je *prietokový súčiniteľ*, ktorý zohľadňuje straty a nerovnomerný rýchlostný profil. Pre dobre vyrobenú Venturiho trubicu je $C_d = 0,95$ až $0,99$ [14].



Obr. 6.7. Venturiho trubica s piezometrickými trubicami.

Lacnejšou náhradou Venturiho trubice je *clona*: doska s otvorom vložená medzi príruby potrubia. Pracuje na rovnakom princípe, prúd za ostrou hranou sa však odtrhne a vznikajú veľké straty. Prietokový súčiniteľ clony je asi 0,6. Clony a dýzy na meranie prietoku sú normalizované. V tepelných sieťach a solárnych systémoch sa dnes prietok meria najmä indukčnými a ultrazvukovými prietokomermi, ktoré nevytvárajú tlakovú stratu. Rovnaký princíp ako clona však majú aj *vyvažovacie ventily* s meracími vývodmi. Z nameraného tlakového rozdielu na známom otvore ventilu sa určuje prietok vo vetve (kap. 12).

Príklad 6.7 – Meranie prietoku Venturiho trubicou

Venturiho trubica s priemerom potrubia 100 mm a hrdla 50 mm je pripojená k ortuťovému diferenčnému manometru, ktorý ukazuje rozdiel hladín 85 mm (odd. 3.5). Určte prietok vody pri $C_d = 0,98$.

Riešenie. Tlakový rozdiel: $p_1 - p_2 = (13600 - 998) \cdot 9,81 \cdot 0,085 = 10,5 \text{ kPa}$. Pomer plôch $A_2/A_1 = (50/100)^2 = 0,25$, $A_2 = 1,963 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$.

$$Q = 0,98 \cdot 1,963 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{2 \cdot 10\,508}{998(1 - 0,0625)}} = 0,98 \cdot 1,963 \cdot 10^{-3} \cdot 4,74 = 9,12 \text{ L/s}.$$



6.17 Rozšírená energetická rovnica pre technické systémy

Pre technické výpočty potrubí, čerpacích systémov a vodných elektrární používame energetickú bilanciu (6.3) vo výškovom tvare s opravou na nerovnomerný rýchlostný profil:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + H_{\text{č}} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + H_{\text{n}} + h_z \quad (6.16)$$

kde H_{n} je spád odovzdaný turbíne (odd. 6.11), v sú stredné prierezové rýchlosti a α sú Coriolisove súčinitele (odd. 4.10). Pri turbulentnom prúdení volíme $\alpha \approx 1$, pri laminárnom $\alpha = 2$. Ekvivalentný tlakový tvar je

$$p_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 + \Delta p_{\text{č}} = p_2 + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 + \Delta p_{\text{n}} + \Delta p_z. \quad (6.17)$$

Postup riešenia úloh s rozšírenou energetickou rovnicou:

1. Nakreslíme schému a zvolíme porovnávaciú rovinu.
2. Body 1 a 2 volíme tam, kde poznáme čo najviac veličín: na hladinách nádrží ($p = p_{\text{a}}$, $v \approx 0$), na výtokoch do atmosféry ($p = p_{\text{a}}$) alebo v miestach s meraným tlakom.
3. Rýchlosti určíme z rovnice kontinuity.
4. Straty medzi bodmi 1 a 2 určíme podľa kap. 10 a 11.
5. Vyriešime rovnicu pre hľadanú veličinu a overíme, či piezometrická čiara neklesá pod potrubie.

6.18 Aplikácia v OZE: solárny termický okruh

Teraz môžeme odpovedať na otázku zo začiatku kapitoly. Uvažujme uzavretý solárny okruh (obr. 1.1). Za body 1 a 2 zvolíme *ten istý* bod okruhu, napríklad pripojenie expanznej nádoby (neutrálny bod N). Tekutina prejde celým okruhom a vráti sa do východiskového bodu. Potom

$$z_1 = z_2, \quad p_1 = p_2, \quad v_1 = v_2, \quad H_{\text{n}} = 0,$$

a z rovnice (6.16) zostane

$$H_{\text{č}} = h_z \quad (6.18)$$

V uzavretom okruhu čerpadlo dodáva presne toľko energie, koľko sa stratí trením a v miestnych odporoch. Výška kolektorov nad čerpadlom v tejto rovnici nevystupuje. Tekutina, ktorú čerpadlo vytlačí do výšky, na druhej strane okruhu zasa klesne a potenciálna energia sa vráti. Výška budovy určuje len potrebný statický tlak v okruhu (pr. 3.3), nie dopravnú výšku čerpadla. Priebeh piezometrickej výšky pozdĺž okruhu ukazuje obr. 6.8.

Príklad 6.8 – Dopravná výška čerpadla solárneho okruhu

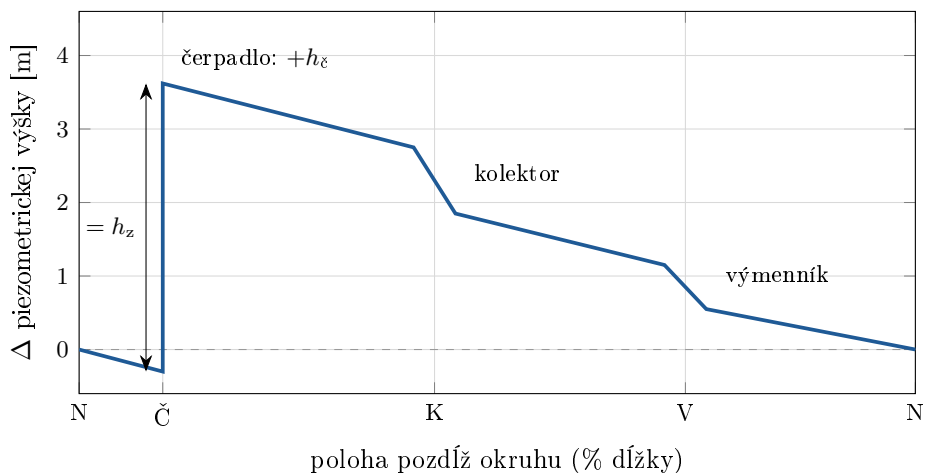
V solárnom okruhu z pr. 1.1 je celková tlaková strata 40 kPa pri prietoku 1,14 m³/h. Teplonosná kvapalina má hustotu 1040 kg/m³. Kolektory sú 12 m nad čerpadlom. Určte potrebnú dopravnú výšku čerpadla.

Riešenie. Podľa (6.18):

$$H_{\text{č}} = h_z = \frac{\Delta p_z}{\rho g} = \frac{40\,000}{1040 \cdot 9,81} = 3,92 \text{ m.}$$

Výška kolektorov 12 m sa v dopravnej výške neprejaví. Stačí čerpadlo s dopravnou výškou okolo 4 m pri prietoku 1,14 m³/h.

Iná situácia nastáva v *drain-back* systémoch, v ktorých kvapalina pri nečinnom čerpadle stečie z kolektorov do zásobníka. Okruh je vtedy otvorený. Čerpadlo musí pri spustení najprv vytlačiť kvapalinu do výšky kolektorov a jeho dopravná výška pri rozbehu musí byť aspoň 12 m + h_z . Po zaplnení okruhu sa vytvorí sifón a čerpadlo potom prekonáva už len straty. Preto sa v drain-back systémoch často používajú dve čerpadlá v sérii alebo čerpadlo s regulovanými otáčkami [6]. ■



Obr. 6.8. Priebeh piezometrickej výšky pozdĺž uzavretého solárneho okruhu: N – neutrálny bod (expanzná nádob), Č – čerpadlo, K – kolektor, V – výmenník v zásobníku. Čerpadlo zvýši výšku o $H_{\text{č}}$, ktorá sa pozdĺž okruhu úplne spotrebuje na straty.

Aplikácia v OZE: odpoveď na úvodnú otázku

V uzavretom okruhu sa tekutina vracia do rovnakého stavu, jej mechanická energia sa teda po obehú nezmení. Energia, ktorú jej odovzdalo čerpadlo, sa celá premenila trením a vírením na teplo. Čerpadlo preto neprekonáva výšku, ale *straty*. Jeho spotreba závisí od odporov okruhu, teda od dĺžky a priemeru potrubia, počtu armatúr, viskozity kvapaliny a prietoku. Zmenšiť straty znamená priamo zmenšiť spotrebu elektriny. Nasledujúce kapitoly ukážu, ako ich vypočítať.

Zhrnutie kapitoly

- Mechanickú energiu prúdiacej tekutiny tvorí tlaková energia p/ρ , kinetická energia $v^2/2$ a potenciálna energia gz . Vo výškovom tvare sú to tlaková, rýchlostná a polohová výška.
- Mechanická energetická bilancia: energia na vstupe + práca čerpadla = energia na výstupe + práca turbíny + straty. Straty sa menia na teplo a sú vždy nezáporné.
- Bernoulliho rovnica $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{konšt.}$ je špeciálnym prípadom pre ustálené prúdenie nestlačiteľnej tekutiny bez trenia a bez strojov pozdĺž prúdnice.

- Celkový tlak je súčtom statického a dynamického tlaku. Ich rozdiel meria Prandtlova trubica.
- Dopravná výška čerpadla je prírastok energetickej výšky, hydraulický výkon je $\rho g Q H$. Čistý spád turbíny je hrubý spád zmenšený o straty.
- Čiara energetickej výšky klesá v smere prúdenia a stúpa len na čerpadle. Piezometrická čiara je o rýchlostnú výšku nižšie. Ak klesne pod os potrubia, je v ňom podtlak.
- Výtoková rýchlosť z nádrže je $\sqrt{2gh}$, Venturiho trubica a clona merajú prietok z tlakového rozdielu.
- V uzavretom okruhu platí $H_{\text{č}} = h_z$: čerpadlo prekonáva len straty, nie výšku.

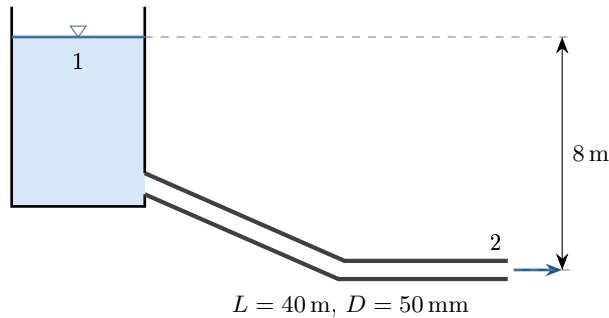
Kontrolné otázky

1. Čo je tlaková energia (práca vtlačania)? Prečo ju nemá tekutina v pokoji v uzavretej nádobe?
2. Vysvetlite význam energie vzťahnutej na jednotku tiaže. Prečo sa dopravná výška čerpadla udáva v metroch?
3. Zapište mechanickú energetickú bilanciu s čerpadlom, turbínou a stratami. Kam sa podejú straty?
4. Za akých predpokladov platí Bernoulliho rovnica? Uveďte tri situácie, v ktorých ju nemožno použiť.
5. Prečo v zúžení potrubia klesá tlak?
6. Aký je rozdiel medzi statickým, dynamickým a celkovým tlakom? Ako meria rýchlosť Prandtlova trubica?
7. Ako sa mení čiara energetickej výšky a piezometrická čiara pozdĺž potrubia s čerpadlom, zúžením a výtokom do atmosféry?
8. Čo znamená, ak piezometrická čiara klesne pod os potrubia? Aké to má dôsledky?
9. Aký je rozdiel medzi hrubým a čistým spádom vodnej elektrárne?
10. Prečo v uzavretom solárnom okruhu nezávisí dopravná výška čerpadla od výšky kolektorov? Ako je to v drain-back systéme?

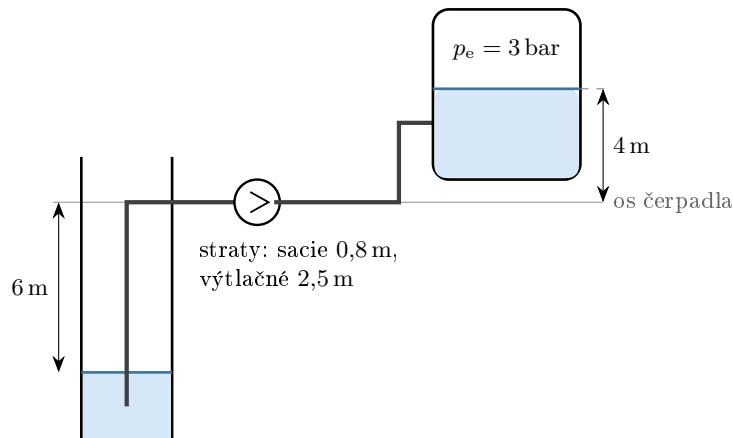
Úlohy na precvičenie

1. Voda prúdi vodorovným potrubím, ktoré sa zužuje z priemeru 150 mm na 75 mm. Pri prietoku 20 L/s je pretlak pred zúžením 150 kPa. Aký je pretlak v zúženom priereze, ak zanedbáme straty? [140,4 kPa]
2. Prandtlova trubica vo vodnom kanáli ukazuje rozdiel celkového a statického tlaku 1,8 kPa. Aká je lokálna rýchlosť vody? [1,90 m/s]
3. Aký dynamický tlak nameria Prandtlova trubica na výstupe vetracej jednotky pri rýchlosti vzduchu 8 m/s a hustote 1,2 kg/m³? [38,4 Pa]

4. Z nádrže vyteká voda potrubím dĺžky 40 m s priemerom 50 mm do atmosféry. Výtok je 8 m pod hladinou. Súčet stratových súčiniteľov je $\lambda L/D + \sum \zeta = 18$. Určte výtokovú rýchlosť a prietok. [2,87 m/s; 5,6 L/s]



5. Čerpadlo dopravuje $25 \text{ m}^3/\text{h}$ vody z otvorenej studne s hladinou 6 m pod osou čerpadla do tlakovej nádoby s pretlakom 3 bar, ktorej hladina je 4 m nad osou čerpadla. Straty v sacom potrubí sú 0,8 m, vo výtlačnom 2,5 m. Určte dopravnú výšku a hydraulický výkon. [43,9 m; 2,99 kW]



6. Vodná elektráreň má hrubý spád 60 m, prietok $3 \text{ m}^3/\text{s}$ a straty v privádzači 2,4 m. Celková účinnosť turbíny a generátora je 0,86. Určte čistý spád, výkon a ročnú výrobu pri 5 000 h využitia inštalovaného výkonu. [57,6 m; 1,46 MW; 7,3 GW · h]
7. Aká je teoretická rýchlosť vodného prúdu z dýzy Peltonovej turbíny pri čistom spáde 350 m? [82,9 m/s]
8. Venturiho trubica (obr. 6.7) s priermi 80 mm a 40 mm meria prietok vody. Rozdiel výšok v piezometrických trubiciach je 0,45 m. Určte prietok ($C_d = 0,97$). [3,74 L/s]
9. Násoskou (sifónom, obr. 6.6) s priemerom 40 mm sa prepúšťa voda z nádrže. Najvyšší bod násosky je 2 m nad hladinou, výtok 3 m pod hladinou. Zanedbajte straty. Určte prietok a absolútny tlak v najvyššom bode pri atmosférickom tlaku 101,3 kPa. [9,6 L/s; 52,2 kPa]
10. Uzavretý okruh tepelnej siete má pri prietoku $40 \text{ m}^3/\text{h}$ tlakovú stratu 120 kPa. Určte dopravnú výšku, hydraulický výkon a ročnú spotrebu elektriny čerpadla pri 6 000 h prevádzky a celkovej účinnosti 0,55 ($\rho = 980 \text{ kg/m}^3$). [12,5 m; 1,33 kW; 14,5 MW · h]

Kapitola 7

Zákon zachovania hybnosti

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent zostaví bilanciu hybnosti kontrolného objemu s úplným diagramom uvoľnenia a určí sily, ktorými prúdiaca tekutina pôsobí na redukcie, kolená, dýzy, dosky a lopatky. Vie vysvetliť princíp Peltonovej turbíny a vypočítať jej ideálny výkon. Pozná bilanciu momentu hybnosti a Eulerovu rovnicu hydraulických strojov a vie určiť ťah na rotor veternej turbíny.

Kľúčové pojmy

hybnosť, tok hybnosti, impulz sily, bilancia hybnosti, diagram uvoľnenia, reakcia prúdu, oporný blok, voľný prúd, relatívna rýchlosť, lopatka, Peltonova turbína, moment hybnosti, Eulerova rovnica turbostrojov, ťah rotora

Bilancia hmotnosti odpovedá na otázku, *koľko* tekutiny preteká, a energetická bilancia na otázku, *koľko energie* sa pritom premení alebo stratí. Ani jedna z nich však neurčí *sily*. Tie potrebujeme pri návrhu uloženia potrubí, oporných blokov kolien privádzača MVE, upevnenia dýz, lopatiek turbín aj stožiarov veterných elektrární. Silu určuje zmena hybnosti tekutiny. Tretí bilančný zákon, zákon zachovania hybnosti, je druhým Newtonovým zákonom zapísaným pre kontrolný objem. Výklad nadväzuje na [1, 5].

Na zamyslenie

Privádzač malej vodnej elektrárne s priemerom 200 mm prenáša prietok len 100 L/s rýchlosťou 3 m/s. Prečo sa napriek tomu každé jeho koleno musí ukotviť betónovým blokom, ktorý odolá sile viac ako 13 kN? A prečo majú lopatky Peltonovej turbíny tvar dvojitej misky, ktorá otáča prúd vody takmer naspäť?

7.1 Hybnosť tekutiny

Hybnosť telesa s hmotnosťou m a rýchlosťou $\mathbf{v}$ je vektor $\mathbf{H} = m\mathbf{v}$. Pre tekutinu v objeme V je

$$\mathbf{H} = \int_V \rho \mathbf{v} \, dV. \quad (7.1)$$

Veličina $\rho \mathbf{v}$ je hybnosť jednotkového objemu.

Prúdiaca tekutina hybnosť *prenáša*. Cez prierez s hmotnostným prietokom $\dot{m}$ a (rovnoumernou) rýchlosťou $\mathbf{v}$ preteká za jednotku času hybnosť

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{m} \mathbf{v} \quad [\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}]. \quad (7.2)$$

Tok hybnosti má rozmer sily. Je to vektor so smerom rýchlosti. Pri nerovnomernom rýchlostnom profile ho opravujeme Boussinesqovým súčiniteľom β (odd. 4.10): $\dot{\mathbf{H}} = \beta \dot{m} \mathbf{v}$. Pri turbulentnom prúdení je $\beta \approx 1,02$ a obvykle ho zanedbávame.

7.2 Impulz sily

Druhý Newtonov zákon pre uzavretý systém hovorí, že výslednica vonkajších síl sa rovná časovej zmene hybnosti:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{H}_{\text{sys}}}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum \mathbf{F} dt = d\mathbf{H}_{\text{sys}}. \quad (7.3)$$

Súčin sily a času sa nazýva *impulz sily*. Rovnica hovorí, že impulz sily sa rovná zmene hybnosti. Ak chceme zmeniť rýchlosť alebo smer prúdu tekutiny, musí na ňu pôsobiť sila. Tekutina podľa zákona akcie a reakcie pôsobí rovnako veľkou, opačne orientovanou silou na teleso, ktoré ju odklonilo alebo zastavilo.

7.3 Bilancia hybnosti kontrolného objemu

Rovnicu (7.3) prevedieme na kontrolný objem rovnako ako pri hmotnosti (odd. 5.3). Hybnosť v KO sa mení pôsobením síl a tým, že tekutina hybnosť do KO prináša a odnáša:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \sum_{\text{vst}} \dot{m} \mathbf{v} - \sum_{\text{vst}} \dot{m} \mathbf{v} \quad (7.4)$$

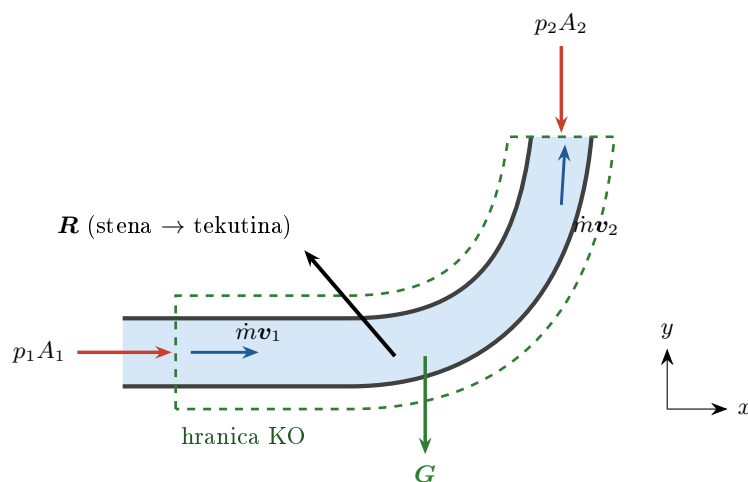
Slovne: *výslednica síl na tekutinu v KO sa rovná akumulácii hybnosti v KO plus tok hybnosti z KO mínus tok hybnosti do KO*. Je to opäť bilancia „akumulácia = prítok – odtok + zdroj“, pričom úlohu zdroja hybnosti hrajú sily.

Do $\sum \mathbf{F}$ patria *všetky* vonkajšie sily pôsobiace na tekutinu v KO:

- **tlakové sily** na vstupných a výstupných prierezoch, $p_i A_i$, smerujúce *dovnútra* KO,
- **sila steny** $\mathbf{R}$, ktorou potrubie, lopatka alebo doska pôsobí na tekutinu. Zahŕňa tlak aj trenie na stenách a obvykle je hľadanou veličinou,
- **tiaž** tekutiny v KO $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$.

Základom správneho riešenia je *diagram uvoľnenia* (angl. *free-body diagram*) kontrolného objemu (obr. 7.1). Postupujeme takto:

1. Nakreslíme hranicu KO. Vstupné a výstupné prierezy vedieme kolmo na prúd tam, kde poznáme tlak a rýchlosť. Ostatnú hranicu vedieme po vnútornej stene potrubia alebo tesne okolo telesa.
2. Zvolíme súradnicovú sústavu a vyznačíme kladné smery.
3. Zakreslíme všetky sily na tekutinu: tlakové sily na prierezoch (vždy smerom dovnútra KO), silu steny $\mathbf{R}$ s predpokladaným smerom a tiaž.



Obr. 7.1. Diagram uvoľnenia kontrolného objemu: tlakové sily na prierezoch (červené), sila steny na tekutinu, tiaž a toky hybnosti (modré).

4. Zakreslíme toky hybnosti $\dot{m}\mathbf{v}$ na vstupoch a výstupoch.
5. Zapišeme rovnicu (7.4) po zložkách. Ak vyjde zložka R záporná, pôsobí opačne, ako sme predpokladali.
6. Sila tekutiny na stenu je $\mathbf{F} = -\mathbf{R}$.

Pozor – častá chyba

Pri bilancii hybnosti treba rozlišovať *silu steny na tekutinu* ($\mathbf{R}$), ktorá patrí do diagramu uvoľnenia, a *silu tekutiny na stenu* ($\mathbf{F} = -\mathbf{R}$), ktorú potrebujeme na dimenzovanie uloženia. Najčastejšími chybami sú zabudnuté tlakové sily na prierezoch, nesprávne znamienko toku hybnosti a zámena pretlaku s absolútnym tlakom. Ak atmosférický tlak pôsobí zo všetkých strán na tekutinu aj na potrubie, jeho účinok sa ruší. Potom počítame s pretlakom.

7.4 Jednorozmerná rovnica hybnosti

Pre ustálené prúdenie kontrolným objemom s jedným vstupom (1) a jedným výstupom (2) je akumulácia nulová a hmotnostný prietok je rovnaký. Rovnica (7.4) sa zjednoduší na

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m} (\beta_2 \mathbf{v}_2 - \beta_1 \mathbf{v}_1) \approx \dot{m} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad (7.5)$$

Po zložkách:

$$\sum F_x = \dot{m} (v_{2x} - v_{1x}), \quad \sum F_y = \dot{m} (v_{2y} - v_{1y}), \quad \sum F_z = \dot{m} (v_{2z} - v_{1z}). \quad (7.6)$$

Sila potrebná na zmenu hybnosti tekutiny sa rovná súčinu hmotnostného prietoku a vektorovej zmeny rýchlosti. Rýchlosť sa môže meniť veľkosťou (zúženie, dýza) aj smerom (koleno, lopatka).

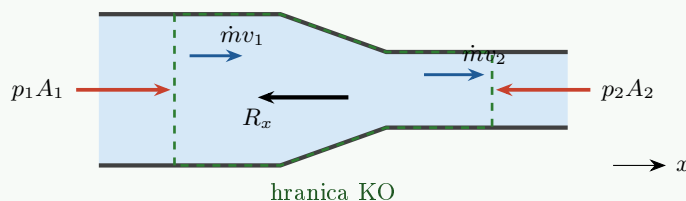
Rovnica hybnosti na rozdiel od energetickej rovnice neobsahuje straty. Nemusíme ich poznať, pretože sa prejavujú len vo veľkosti síl na stenu. Naopak, rovnicu hybnosti môžeme použiť na *určenie strát*, napríklad pri náhlom rozšírení potrubia (kap. 11).

7.5 Reakcia prúdu na potrubie

Najjednoduchším prípadom je priama redukcia, v ktorej sa mení len veľkosť rýchlosti. Prúd sa zrýchľuje a stena musí na tekutinu pôsobiť tak, aby spolu s tlakovými silami vyvolala zmenu hybnosti.

Príklad 7.1 – Sila na redukciu

Vodorovnou redukciou z priemeru 150 mm na 75 mm preteká 20 L/s vody ($\rho = 998 \text{ kg/m}^3$). Pretlak pred redukciou je 150 kPa, za ňou 140,4 kPa (pozri úlohu 1 v kap. 6). Určte silu, ktorou voda pôsobí na redukciu.



Obr. 7.2. Diagram uvoľnenia pre redukciu: tlakové sily na prierezoch smerujú dovnútra KO, sila steny R_x pôsobí proti smeru prúdenia.

Riešenie. $A_1 = 0,01767 \text{ m}^2$, $A_2 = 0,004418 \text{ m}^2$, $v_1 = 1,13 \text{ m/s}$, $v_2 = 4,53 \text{ m/s}$, $\dot{m} = 19,96 \text{ kg/s}$. Os x volíme v smere prúdenia. Sily na tekutinu v KO (obr. 7.2): $p_1 A_1$ (v smere $+x$), $p_2 A_2$ (v smere $-x$) a sila steny R_x . Rovnica (7.6):

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + R_x = \dot{m} (v_2 - v_1),$$

$$R_x = 19,96 \cdot (4,53 - 1,13) - 150\,000 \cdot 0,01767 + 140\,400 \cdot 0,004418 = 68 - 2651 + 620 = -1\,963 \text{ N}.$$

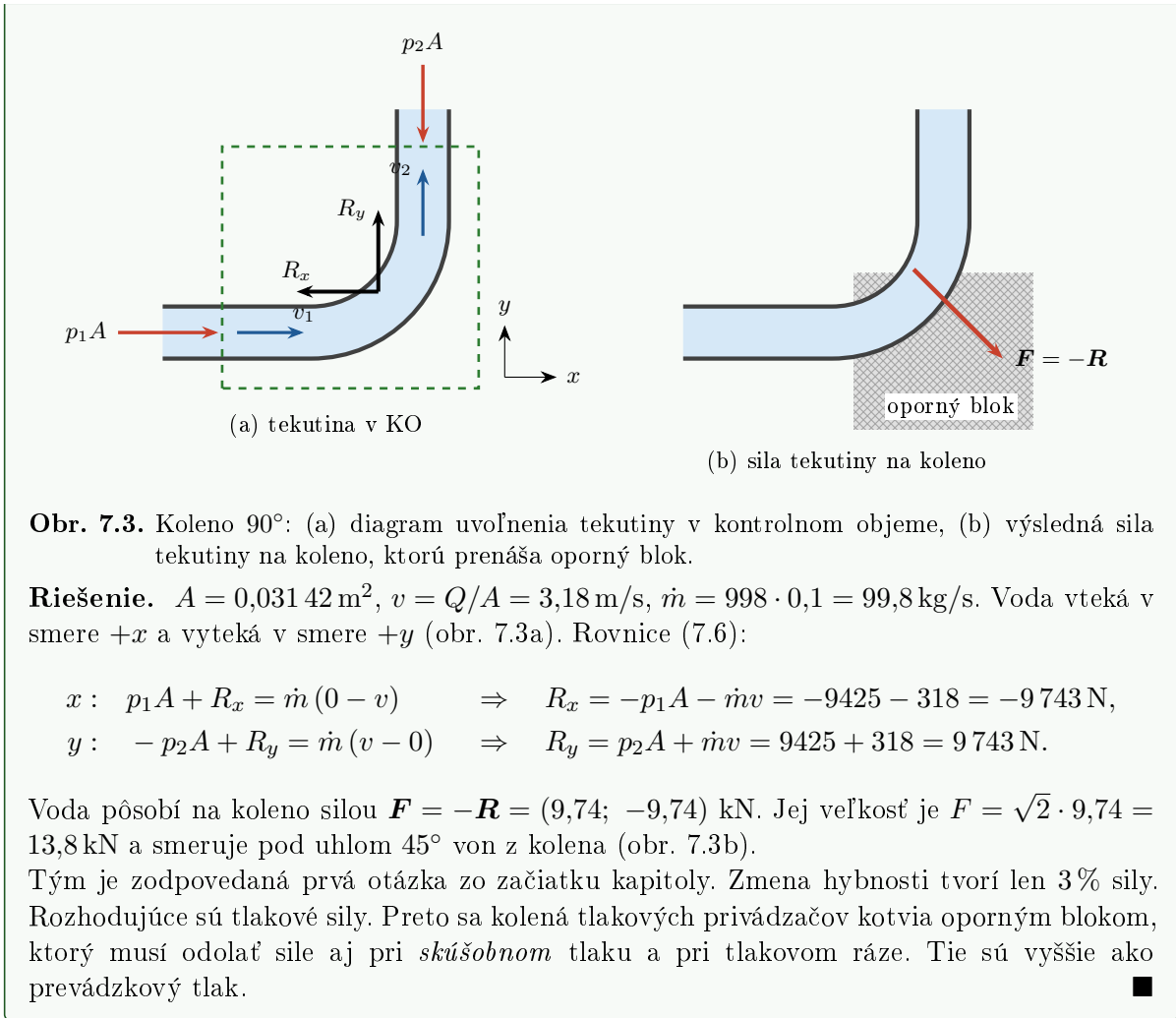
Stena pôsobí na vodu silou 1,96 kN proti smeru prúdenia. Voda pôsobí na redukciu silou $F_x = +1,96 \text{ kN}$ v smere prúdenia. Túto silu musia preniesť príruby a uloženie potrubia. Rozhodujúce sú tlakové sily. Samotná zmena hybnosti prispieva len 68 N. ■

7.6 Sily v kolenách potrubia

V kolene sa mení *smer* rýchlosti. Aj pri nezmenenej veľkosti rýchlosti sa hybnosť mení, a na koleno preto pôsobí sila. K nej sa pridávajú tlakové sily na vstupe a výstupe, ktoré v kolene nie sú v rovnováhe, pretože pôsobia v rôznych smeroch (obr. 7.3).

Príklad 7.2 – Sila na koleno privádzača MVE

Vodorovné koleno 90° privádzača malej vodnej elektrárne má priemer 200 mm. Prietok je 100 L/s, pretlak v kolene 300 kPa. Straty v kolene zanedbáme. Určte silu, ktorú musí preniesť oporný blok.



Pri kolene so všeobecným uhlom θ a rovnakým prierezom na vstupe aj výstupe dostaneme analogickým postupom veľkosť sily

$$F = 2(pA + \dot{m}v) \sin \frac{\theta}{2}. \quad (7.7)$$

Pre $\theta = 90^\circ$ je $2 \sin 45^\circ = \sqrt{2}$, pre $\theta = 180^\circ$ (spätný oblúk) je sila najväčšia, $F = 2(pA + \dot{m}v)$.

7.7 Dýzy a prúdy kvapaliny

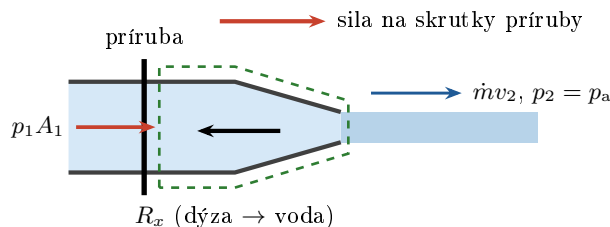
Voľný prúd kvapaliny, ktorý vyteká do atmosféry, má v celom priereze atmosférický tlak. Prúd, ktorý z dýzy vystupuje rýchlosťou v , nesie tok hybnosti $\dot{m}v = \rho Qv = \rho Av^2$. Kým sa prúd nestretne s prekážkou, jeho hybnosť sa nemení (ak zanedbáme odpor vzduchu a tiaž).

Dýza sama je vystavená sile (obr. 7.4), ktorú určíme bilanciou hybnosti rovnako ako pri redukcii. Na výstupe dýzy do atmosféry je pretlak nulový. Preto býva sila na skrutky dýzy veľká a smeruje v smere prúdu. Na hadicu hasičov alebo na dýzu Peltonovej turbíny pôsobí zároveň reakčná sila proti smeru výtoku, ktorú musí zachytiť uloženie. Rovnaký princíp reakcie využívajú raketové a prúdové motory.

Príklad 7.3 – Reakcia výtokového prúdu

Z dýzy s priemerom 25 mm vyteká voda rýchlosťou 20 m/s. Aký tok hybnosti prúd nesie?

Riešenie. $Q = \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} \cdot 20 = 9,82 \text{ L/s}$, $\dot{m}v = \rho Qv = 998 \cdot 9,82 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 196 \text{ N}$. Týmto tokom hybnosti môže prúd pôsobiť na prekážku (odd. 7.8). ■



Obr. 7.4. Diagram uvoľnenia dýzy. Na výstupe je atmosférický tlak, preto tlaková sila na vstupe nie je vyrovnaná a skrutky príruby sú namáhané v smere prúdu.

7.8 Náraz prúdu na dosku

Pevná doska

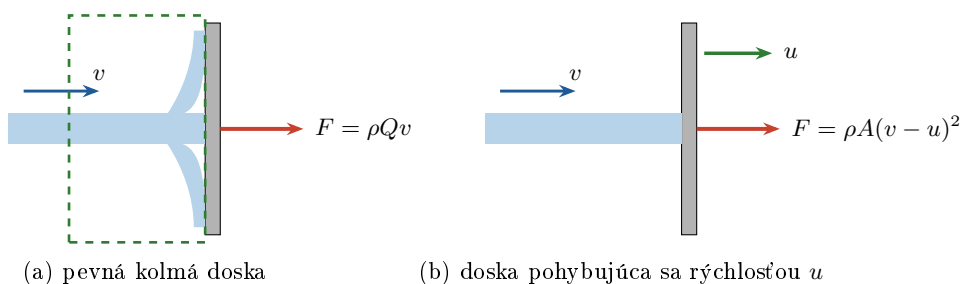
Prúd dopadá kolmo na pevnú dosku a rozteká sa po nej do strán (obr. 7.5a). Kontrolný objem zahŕňa prúd pri doske. Tlak na hranici KO je atmosférický a tiaž zanedbáme. V smere pôvodného prúdu (x) vteká hybnosť $\dot{m}v$ a nevyteká žiadna, pretože prúd odteká kolmo na os x :

$$R_x = \dot{m}(0 - v) = -\rho Qv.$$

Sila prúdu na dosku je

$$F = \rho Qv = \rho A v^2. \quad (7.8)$$

Prúd z pr. 7.3 by teda na kolmú dosku pôsobil silou 196 N. Pri doske sklonenej pod uhlom α od osi prúdu je sila kolmá na dosku $F = \rho Qv \sin \alpha$, ak zanedbáme trenie o dosku.



Obr. 7.5. Náraz prúdu na kolmú dosku: (a) pevná doska, (b) doska pohybujúca sa v smere prúdu.

Pohyblivá doska

Ak sa doska pohybuje v smere prúdu rýchlosťou u (obr. 7.5b), zvolíme kontrolný objem, ktorý sa pohybuje spolu s ňou. V ňom je prúdenie ustálené a rozhodujúca je *relatívna rýchlosť* $w = v - u$. Doska „uteká“ pred prúdom, preto do KO vteká len hmotnostný prietok $\rho A(v - u)$. Sila na dosku je

$$F = \rho A(v - u)^2, \quad (7.9)$$

výkon odovzdaný doske $P = Fu = \rho A(v - u)^2 u$. Najväčší je pri $u = v/3$. Jedna doska však využije len $8/27 \approx 30\%$ kinetickej energie prúdu, pretože voda za doskou má ešte značnú rýchlosť.

Ak prúd dopadá na *rad dosiek*, ktoré sa postupne dostávajú do prúdu (obvod kolesa), zachytí sa celý prietok $Q = Av$. Sila je potom $F = \rho Q(v - u)$ a výkon $P = \rho Q(v - u)u$ je najväčší pri $u = v/2$. Využiť sa dá polovica kinetickej energie prúdu. Takto pracovali historické vodné kolesá s rovnými lopatkami.

7.9 Zmena smeru prúdu na lopatke

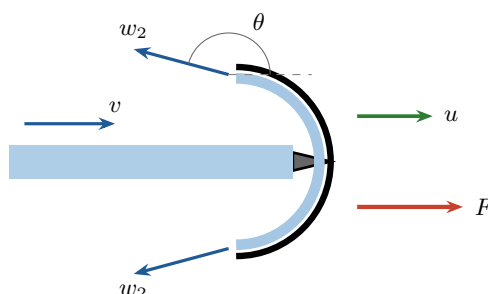
Účinnosť sa výrazne zvýši, ak prúd na lopatke nezastavíme, ale *otočíme* (obr. 7.6). Uvažujme rad lopatiek pohybujúcich sa rýchlosťou u , na ktoré dopadá prúd s prietokom Q a rýchlosťou v . V sústave spojennej s lopatkou prichádza voda relatívnou rýchlosťou $w_1 = v - u$. Ak zanedbáme trenie, odchádza rovnako veľkou relatívnou rýchlosťou $w_2 = w_1$, ale otočená o uhol θ . Zmena zložky rýchlosti v smere pohybu lopatky je $w_1 - w_2 \cos \theta = (v - u)(1 - \cos \theta)$. Sila na lopatky je

$$F = \rho Q (v - u) (1 - \cos \theta) \quad (7.10)$$

a výkon $P = Fu$. Najväčší výkon je opäť pri $u = v/2$:

$$P_{\max} = \rho Q \frac{v^2}{4} (1 - \cos \theta). \quad (7.11)$$

Pomer k výkonu prúdu $\rho Q v^2/2$ je $(1 - \cos \theta)/2$. Pre $\theta = 90^\circ$ (rovná doska) je 0,5, pre $\theta = 180^\circ$ by bol 1. Voda by vtedy odchádzala z lopatky s nulovou absolútnou rýchlosťou a odovzdala by jej všetku kinetickú energiu.



Obr. 7.6. Otočenie prúdu na lopatke Peltonovej turbíny. Voda prichádza rýchlosťou v , lopatka sa pohybuje rýchlosťou u , relatívna rýchlosť vody sa na lopatke otočí takmer o 180° .

Na tomto princípe pracuje *Peltonova turbína*. Jej lopatky majú tvar dvojitej misky s ostrým uprostred, ktoré rozdelí prúd na dve polovice. Obe polovice sa otočia o uhol približne 165° až 170° . Úplné otočenie o 180° nie je možné, pretože voda by narážala na nasledujúcu lopatku [13]. Skutočné prúdenie v lopatke je trojrozmerné a dvojfázové a skúma sa experimentálne aj metódami CFD [36].

Príklad 7.4 – Ideálny výkon Peltonovej turbíny

Peltonova turbína pracuje s čistým spádom 350 m a prietokom $0,2 \text{ m}^3/\text{s}$. Uhol otočenia prúdu je 165° . Určte rýchlosť prúdu, optimálnu obvodovú rýchlosť lopatiek a ideálny výkon. Straty v dýze a trenie na lopatke zanedbajte.

Riešenie. Rýchlosť prúdu podľa Torricelliho vzťahu (odd. 6.15): $v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 350} =$

82,9 m/s. Optimálna obvodová rýchlosť je $u = v/2 = 41,4$ m/s.

$$P = \rho Q(v - u)(1 - \cos \theta)u = 1000 \cdot 0,2 \cdot 41,4 \cdot (1 + 0,966) \cdot 41,4 = 675 \text{ kW}.$$

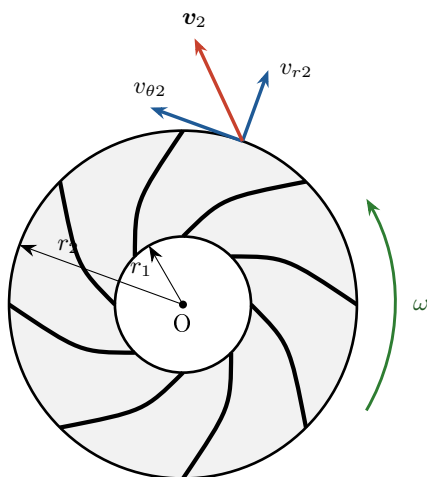
Hydraulický výkon vody je $\rho g Q H = 687$ kW. Ideálna účinnosť lopatiek je teda $(1 - \cos 165^\circ)/2 = 98,3\%$. Skutočné Peltonove turbíny dosahujú účinnosť okolo 90 %. Straty vznikajú v dýze, trením v lopatkách, rozstrekom vody a ventiláciou kolesa [13]. Tým je zodpovedaná druhá otázka zo začiatku kapitoly. ■

7.10 Moment hybnosti – základná myšlienka

V rotačných strojoch, ako sú čerpadlá, ventilátory a turbíny, nás nezaujíma sila, ale *krútiaci moment* na hriadeli. Ten určíme z bilancie *momentu hybnosti*. Moment hybnosti častice vzhľadom na os otáčania je $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Pre obežné koleso so vstupom na polomere r_1 a výstupom na polomere r_2 (obr. 7.7) platí pri ustálenom prúde analogicky s (7.5)

$$M = \dot{m}(r_2 v_{\theta 2} - r_1 v_{\theta 1}), \quad (7.12)$$

kde M je moment, ktorým koleso pôsobí na tekutinu, a v_θ je *obvodová* (tangenciálna) zložka absolútnej rýchlosti. Radiálna zložka v_r moment nevytvára, pretože smeruje do osi.



Obr. 7.7. Obežné koleso: moment na hriadeli závisí od obvodových zložiek rýchlosti na vstupe a výstupe.

Výkon je súčinom momentu a uhlovej rýchlosti, $P = M\omega$. S obvodovou rýchlosťou kolesa $u = \omega r$ dostaneme

$$P = \dot{m}(u_2 v_{\theta 2} - u_1 v_{\theta 1}). \quad (7.13)$$

Pri čerpadle je výraz v zátvorke kladný, koleso tekutine odovzdáva energiu. Pri turbíne je záporný, tekutina odovzdáva energiu kolesu.

Príklad 7.5 – Moment na obežnom kolese čerpadla

Voda vstupuje do obežného kolesa odstredivého čerpadla bez víru ($v_{\theta 1} = 0$). Na výstupe s polomerom 0,1 m má obvodovú zložku rýchlosti 12 m/s. Hmotnostný prietok je 10 kg/s, otáčky 2900/min. Určte moment, výkon odovzdaný vode a teoretickú dopravnú výšku.

Riešenie. $M = 10 \cdot 0,1 \cdot 12 = 12 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\omega = 2\pi \cdot 2900/60 = 303,7/\text{s}$, $P = M\omega = 3,64 \text{ kW}$. Energia odovzdaná jednotke hmotnosti je $P/\dot{m} = u_2 v_{\theta 2} = 30,4 \cdot 12 = 364 \text{ J/kg}$ a teoretická

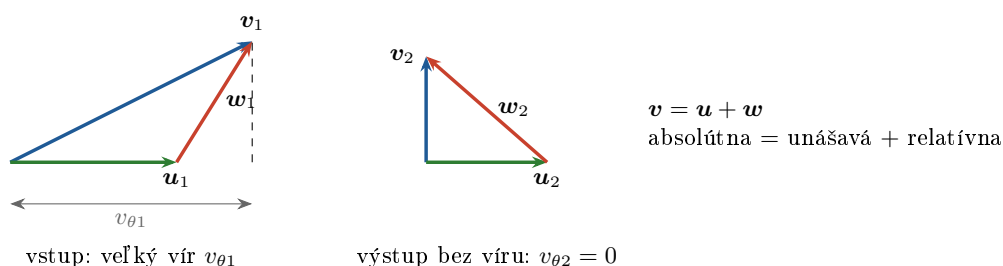
dopravná výška $H_t = u_2 v_{\theta 2} / g = 37,1 \text{ m}$. Skutočná dopravná výška je menšia o straty v čerpadle (kap. 13). ■

7.11 Vázba na hydraulické turbíny

Vydelením (7.13) tiažou prietoku $\dot{m}g$ dostaneme *Eulerovu rovnicu hydraulických strojov* (turbostrojov) vo výškovom tvare [20]. Pre turbínu, v ktorej voda vstupuje na polomere 1 a vystupuje na polomere 2, je teoretický spád spracovaný kolesom

$$H_t = \frac{u_1 v_{\theta 1} - u_2 v_{\theta 2}}{g}. \quad (7.14)$$

Turbína odoberá vode energiu tým, že jej *znižuje moment hybnosti*. Rozvádzač pred obežným kolesom roztočí vodu (vytvorí veľkú zložku $v_{\theta 1}$). Obežné koleso ju potom „odkrúti“, takže voda z neho vystupuje s malým alebo nulovým vírom ($v_{\theta 2} \approx 0$). Rovnica (7.14) platí pre všetky typy turbín: Francisovu, Kaplanovu aj Peltonovu. Pri Peltonovej turbíne je $u_1 = u_2 = u$ a rovnica prechádza na vzťah odvodený v odd. 7.9. Absolútnu rýchlosť vody $\mathbf{v}$ rozkladáme na unášavú rýchlosť kolesa $\mathbf{u}$ a relatívnu rýchlosť voči lopatke $\mathbf{w}$ (obr. 7.8). Takto vzniknuté *rýchlostné trojuholníky* a návrh turbín podrobne rozoberá kap. 14.



Obr. 7.8. Rýchlostné trojuholníky na vstupe a výstupe obežného kolesa turbíny. Koleso odoberá vode obvodovú zložku rýchlosti v_{θ} .

Ťah na rotor veternej turbíny

Bilanciu hybnosti možno použiť aj na prúdovú trubicu veternej turbíny (obr. 5.8). Tlak ďaleko pred rotorom aj za ním je atmosférický. Jedinou silou, ktorá mení hybnosť vzduchu v prúdovej trubici, je sila rotora. Podľa (7.5) je *ťah* rotora

$$T = \dot{m} (v_1 - v_3) = \rho A_r v_r (v_1 - v_3). \quad (7.15)$$

Po dosadení $v_r = v_1(1-a)$ a $v_3 = v_1(1-2a)$ z teórie aktuátorového disku (odd. 5.10) dostaneme

$$T = \frac{1}{2} \rho A_r v_1^2 \cdot 4a(1-a) = \frac{1}{2} \rho A_r v_1^2 c_T, \quad (7.16)$$

kde $c_T = 4a(1-a)$ je *súčiniteľ ťahu*. Spojením s energetickou bilanciou prúdovej trubice sa odvodí súčiniteľ výkonu $c_P = 4a(1-a)^2$ a jeho maximum $16/27$ pri $a = 1/3$, teda Betzov limit [24, 25].

Príklad 7.6 – Ťah na rotor veternej turbíny

Veterná turbína s priemerom rotora 80 m pracuje pri rýchlosti vetra 10 m/s v optimálnom režime ($a = 1/3$). Určte ťah na rotor ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

Riešenie. $c_T = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0,889$, $A_r = 5\,027\text{ m}^2$.

$$T = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 5027 \cdot 10^2 \cdot 0,889 = 274\text{ kN}.$$

Táto sila pôsobí na vrchol stožiaru a vytvára veľký ohybový moment v jeho päte. Pri stožiaru výšky 100 m je to približne 27 MN · m. Pri silnom vetre sa ťah obmedzuje natáčaním listov.



Zhrnutie kapitoly

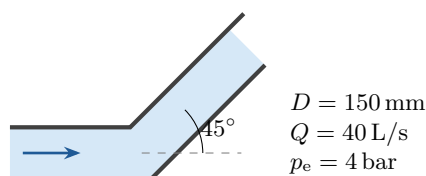
- Prúdiaca tekutina prenáša tok hybnosti $\dot{m}\mathbf{v}$, ktorý má rozmer sily.
- Bilancia hybnosti KO: výslednica síl na tekutinu = akumulácia hybnosti + tok hybnosti von – tok hybnosti dnu. Pri ustálenom prúdení s jedným vstupom a výstupom $\sum \mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$.
- Do diagramu uvoľnenia patria tlakové sily na prierezoch, sila steny na tekutinu a tiaž. Sila tekutiny na stenu je opačná.
- Pri redukciiach a kolenách tlakových potrubí prevládajú tlakové sily nad zmenou hybnosti. Kolená sa preto kotvia opornými blokmi.
- Prúd pôsobí na kolmú pevnú dosku silou ρQv . Na pohybujúcej sa lopatke rozhoduje relatívna rýchlosť.
- Otočením prúdu o uhol blízky 180° využíva Peltonova turbína takmer celú kinetickú energiu prúdu. Optimálna obvodová rýchlosť je polovicou rýchlosti prúdu.
- Bilancia momentu hybnosti vedie k Eulerovej rovnici hydraulických strojov $H_t = (u_1 v_{\theta 1} - u_2 v_{\theta 2})/g$.
- Ťah na rotor veternej turbíny je $T = \frac{1}{2} \rho A v_1^2 4a(1-a)$.

Kontrolné otázky

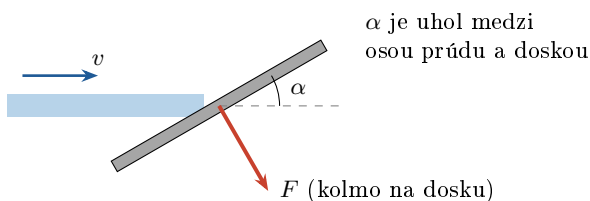
1. Aký rozmer má tok hybnosti a prečo?
2. Zapíšte bilanciu hybnosti kontrolného objemu slovne a rovnicou.
3. Ktoré sily patria do diagramu uvoľnenia KO? Ktorým smerom zakresľujeme tlakové sily na vstupe a výstupe?
4. Aký je rozdiel medzi silou steny na tekutinu a silou tekutiny na stenu?
5. Prečo rovnica hybnosti neobsahuje straty, hoci ich prúdenie má?
6. Prečo sú pri kolenách tlakových potrubí rozhodujúce tlakové sily, a nie zmena hybnosti?
7. Prečo je pri rade lopatiek optimálna obvodová rýchlosť $u = v/2$?
8. Prečo lopatky Peltonovej turbíny otáčajú prúd takmer o 180° a prečo nie presne o 180° ?
9. Ktorá zložka rýchlosti vytvára moment na obežnom kolese?
10. Ako turbína odoberá vode energiu z hľadiska momentu hybnosti?

Úlohy na precvičenie

1. Vodorovná redukcia znižuje priemer z 200 mm na 100 mm. Prietok vody je 50 L/s, pretlak pred redukciou 200 kPa. Určte pretlak za redukciou (bez strát) a silu na redukciu. [181,0 kPa; 4,62 kN]
2. Vodorovné koleno 90° (obr. 7.3) s priemerom 300 mm privádzača MVE prenáša 250 L/s pri pretlaku 8 bar. Určte silu na oporný blok. [81,2 kN]
3. Aká je sila z predchádzajúcej úlohy pri skúšobnom pretlaku 12 bar bez prietoku? [120 kN]
4. Vodorovné koleno s uhlom 45° a priemerom 150 mm prenáša 40 L/s vody pri pretlaku 4 bar. Určte veľkosť sily na koleno. [5,5 kN]



5. Prúd vody s priemerom 40 mm a rýchlosťou 15 m/s dopadá kolmo na pevnú dosku. Určte silu. Akou silou by pôsobil na dosku sklonenú pod uhlom 30° k osi prúdu? [283 N; 141 N]



6. Prúd z predchádzajúcej úlohy dopadá na jednu dosku, ktorá sa pohybuje rýchlosťou 5 m/s v smere prúdu. Určte silu a výkon. [126 N; 628 W]
7. Peltonova turbína má čistý spád 500 m a prietok 0,5 m³/s. Uhol otočenia prúdu je 170°. Určte ideálny výkon a optimálne otáčky, ak je stredný priemer kolesa 1,5 m. [2,43 MW; 631/min]
8. Voda vstupuje do obežného kolesa Francisovej turbíny na polomere 0,6 m s obvodovou zložkou rýchlosti 14 m/s a vystupuje bez víru. Otáčky sú 375/min, prietok 2 m³/s. Určte teoretický spád a výkon. [33,6 m; 659 kW]
9. Určte ťah na rotor s priemerom 120 m pri rýchlosti vetra 12 m/s a $a = 0,25$. [748 kN]
10. Ukážte, že výkon rady lopatiek $P = \rho Q(v - u)(1 - \cos \theta)u$ je najväčší pri $u = v/2$, a odvodte vzťah pre $P_{\max}$.

Časť III

Reálne tekutiny a prúdenie v potrubíach

Kapitola 8

Reálne tekutiny a viskózne prúdenie

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent vysvetlí vznik viskózných napätí, podmienku ulpievania na stene a fyzikálnu príčinu energetických strát. Z rovnováhy síl odvodí rýchlostný profil pri laminárnom prúdení medzi doskami a v potrubí a vypočíta tlakovú stratu podľa Hagenovho–Poiseuilleho zákona. Pozná Navierove–Stokesove rovnice ako mapu fyzikálnych mechanizmov a vie posúdiť, ktoré ich členy možno v konkrétnej úlohe zanedbať.

Kľúčové pojmy

ideálna a reálna tekutina, šmykové napätie, rýchlostný gradient, podmienka ulpievania, Couettovo prúdenie, Poiseuilleovo prúdenie, Hagenov–Poiseuilleov zákon, viskózna disipácia, Navierove–Stokesove rovnice, zotrvačné a viskózne sily, Reynoldsovo číslo, plazivé prúdenie, Darcyho zákon

V predchádzajúcich kapitolách sme straty zaviedli ako člen e_z v energetickej bilancii a vedeli sme, že sú nezáporné. Nevedeli sme však, *prečo* vznikajú a ako ich vypočítať. V tejto kapitole ukážeme, že ich príčinou je *viskozita* spolu s podmienkou, že tekutina na stene ulpieva. Pre laminárne prúdenie odvodíme rýchlostné profily a tlakové straty presne, bez empirických súčiniteľov. Pre turbulentné prúdenie (kap. 9 a 10) to už nebude možné.

Na záver kapitoly predstavíme Navierove–Stokesove rovnice. Nebudeme ich riešiť, ale použijeme ich ako *mapu*: každý ich člen zodpovedá jednému fyzikálnemu mechanizmu a podľa toho, ktoré členy prevládajú, vieme vybrať vhodný zjednodušený model. Tieto rovnice sú zároveň základom numerických simulácií CFD [10, 11]. Výklad nadväzuje na [1, 5].

Na zamyslenie

Zemný vrt tepelného čerpadla je naplnený zmesou vody a glykolu. V zime má kvapalina teplotu okolo 0°C a prúdi v nej pomaly. Tlaková strata vrtu je pri tom istom prietoku niekoľkokrát väčšia ako pri vode. Zároveň však býva horší prestup tepla z horniny. Ako súvisí tlaková strata s rýchlostným profilom? A prečo projektanti vrtov kontrolujú Reynoldsovo číslo, a nielen tlakovú stratu?

8.1 Ideálna a reálna tekutina

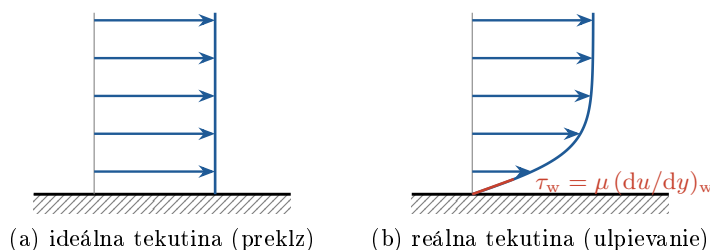
Ideálna tekutina je myšlienkový model tekutiny bez viskozity. Nemôže prenášať šmykové napätie ani v pohybe. Prúdi bez strát a pri stene sa môže voľne posúvať. Model ideálnej tekutiny vedie

k Bernoulliho rovnici a dobre opisuje prúdenie v oblastiach ďaleko od stien, napríklad v dýzach alebo pri obtekaní telies mimo tenkej vrstvy pri povrchu.

Model ideálnej tekutiny však zlyháva v dvoch dôležitých bodoch:

- neobsahuje žiadne straty. V potrubí by nevznikla tlaková strata a čerpadlo v uzavretom okruhu by nepotrebovalo žiadny výkon,
- teleso obtekané ideálnou tekutinou nemá žiadny odpor (tzv. d'Alembertov paradox). Pritom každý, kto stál vo vetre, vie, že to neplatí [1].

Reálna tekutina má viskozitu. Na stene ulpieva a pri jej pohybe vznikajú šmykové napätia (obr. 8.1). Rozdiel medzi oboma modelmi sa prejavuje najmä v blízkosti stien. Práve tam vzniká odpor, tlaková strata aj prenos tepla.

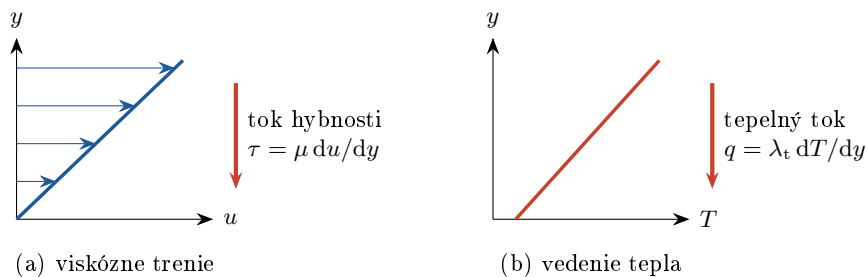


Obr. 8.1. Rýchlostný profil pri stene: (a) ideálna tekutina sa po stene posúva, (b) reálna tekutina na stene ulpieva a v blízkosti steny vzniká veľký rýchlostný gradient a šmykové napätie τ_w .

8.2 Viskozita a šmykové napätie

Šmykové napätie τ je sila pôsobiaca rovnobežne s plochou, delená jej obsahom [Pa]. V prúdiacej tekutine vzniká medzi vrstvami, ktoré sa pohybujú rôznymi rýchlosťami. Rýchlejšia vrstva ťahá pomalšiu dopredu, pomalšia brzdí rýchlejšiu.

Na úrovni molekúl ide o *prenos hybnosti* medzi vrstvami (odd. 2.4). V plynach molekuly preskakujú medzi vrstvami a prenášajú so sebou hybnosť svojej pôvodnej vrstvy. V kvapalinách prevládajú medzimolekulové sily. Šmykové napätie je teda *tok hybnosti* v smere kolmom na prúd. Vzniká v smere klesajúcej rýchlosti, podobne ako tepelný tok vzniká v smere klesajúcej teploty. Táto analógia medzi prenosom hybnosti a prenosom tepla je hlboká. Využíva sa v teórii prestupu tepla a vysvetľuje, prečo silná väzba medzi tlakovou stratou a prestupom tepla existuje v každom výmenníku. Analógiu znázorňuje obr. 8.2.



Obr. 8.2. Analógia prenosu hybnosti a tepla: (a) šmykové napätie je tokom hybnosti v smere klesajúcej rýchlosti, (b) tepelný tok smeruje v smere klesajúcej teploty. Značka λ_t označuje tepelnú vodivosť.

8.3 Newtonov zákon viskozity

Pre newtonovské tekutiny je šmykové napätie úmerné rýchlostnému gradientu (odd. 2.6):

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (8.1)$$

V tejto kapitole ho použijeme na prúdenie, v ktorom má rýchlosť jedinú zložku u v smere x a mení sa len v smere y . Všeobecne je napätie v tekutine opísané tenzorom napätia s deviatimi zložkami a Newtonov zákon spája každú šmykovú zložku s príslušnou rýchlosťou deformácie [37]. Na pochopenie podstaty viskózných strát však postačí jednoduchý tvar (8.1).

8.4 Rýchlostný gradient

Rýchlostný gradient du/dy [1/s] vyjadruje, ako rýchlo sa mení rýchlosť kolmo na smer prúdenia. Je zároveň *rýchlosťou šmykovej deformácie* elementu tekutiny. Element, ktorého horná strana sa pohybuje rýchlejšie ako spodná, sa za čas dt skosi o uhol $d\gamma = (du/dy) dt$.

Najväčší rýchlostný gradient býva *pri stene*, kde rýchlosť klesá na nulu. Šmykové napätie na stene

$$\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} \quad (8.2)$$

určuje trecí odpor. V potrubí z neho priamo vyplýva tlaková strata. Pri turbulentnom prúdení je profil pri stene oveľa strmší ako pri laminárnom (obr. 4.6). Preto je aj šmykové napätie na stene a tlaková strata väčšia (kap. 9).

8.5 Prúdenie medzi doskami

Uvažujme ustálené laminárne prúdenie nestlačiteľnej tekutiny medzi dvoma rovnobežnými doskami vzdialenými h . Dosky sú veľmi dlhé a široké. Prúdenie je *plne vyvinuté*, teda rýchlostný profil sa pozdĺž prúdu nemení: $u = u(y)$. Takéto prúdenie je rovnomerné, zrýchlenie je nulové, a sily na každý element tekutiny sú preto v rovnováhe.

Na element s rozmermi $dx \times dy$ a jednotkovou šírkou pôsobia tlakové sily na ľavej a pravej strane a šmykové sily na hornej a spodnej strane (obr. 8.3). Rovnováha v smere x :

$$p dy - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) dy + \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy \right) dx - \tau dx = 0,$$

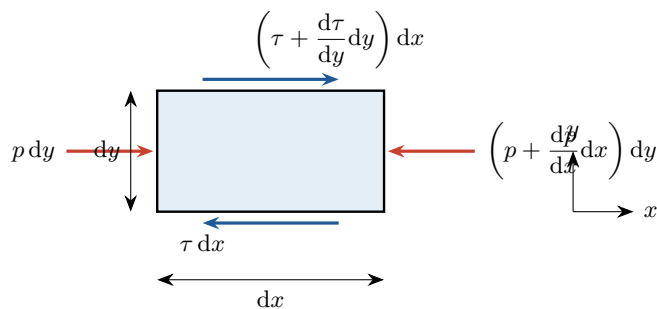
odkiaľ

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp}{dx}. \quad (8.3)$$

Zmena šmykového napätia naprieč prúdom je v rovnováhe s tlakovým gradientom pozdĺž prúdu. Tlakový spád poháňa tekutinu, viskózne sily ju brzdia.

Po dosadení Newtonovho zákona (8.1) dostaneme

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} = \text{konšt.} \quad (8.4)$$

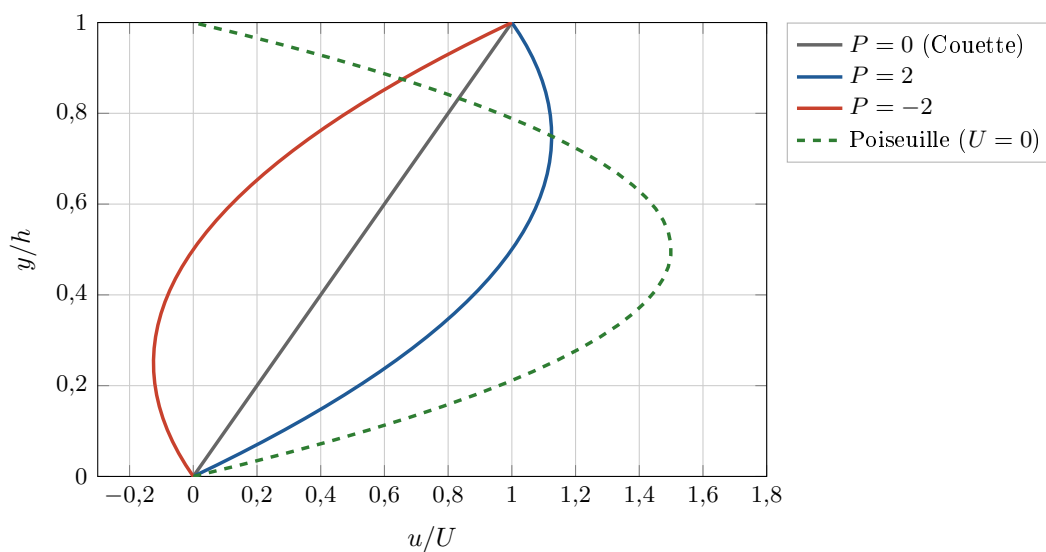


Obr. 8.3. Sily na element tekutiny pri plne vyvinutom prúdení medzi doskami.

Pravá strana je konštantná, lebo ľavá strana závisí len od y a pravá len od x . Tlak teda klesá pozdĺž prúdu lineárne. Dvojnásobnou integráciou a dosadením okrajových podmienok (odd. 8.9) na spodnej doske $u(0) = 0$ a na hornej doske $u(h) = U$ dostaneme všeobecné riešenie

$$u(y) = U \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (8.5)$$

Rýchlostný profil je súčtom lineárneho profilu vyvolaného pohybom dosky a parabolického profilu vyvolaného tlakovým spádom. Pomer oboch vplyvov vyjadruje bezrozmerný parameter $P = -\frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx}$ (obr. 8.4).



Obr. 8.4. Rýchlostné profily medzi doskami podľa (8.5). Pri $P > 0$ tlakový spád pomáha pohybu dosky, pri $P < 0$ pôsobí proti nemu a pri spodnej doske môže vzniknúť spätné prúdenie. Poiseuilleov profil je zobrazený v mierke strednej rýchlosti.

8.6 Couettovo prúdenie

Ak tlakový spád chýba ($dp/dx = 0$), tekutinu poháňa len pohybujúca doska. Profil je lineárny:

$$u(y) = U \frac{y}{h}, \quad \tau = \mu \frac{U}{h} = \text{konšt.} \quad (8.6)$$

Toto *Couettovo prúdenie* sme už použili pri definícii viskozity (obr. 2.4). Šmykové napätie je v celej vrstve rovnaké. Couettovo prúdenie dobre opisuje olejový film v klzných ložiskách turbín,

generátorov a čerpadel, v štrbinách tesnení a v rotačných viskozimetroch. Na jeho základe sa počíta trecí výkon ložísk.

8.7 Poiseuilleovo prúdenie

Medzi pevnými doskami

Ak sú obe dosky nehybné ($U = 0$), poháňa tekutinu len tlakový spád. Profil je parabolický s najväčšou rýchlosťou v strede. Integráciou (8.5) po šírke štrbiny dostaneme prietok na jednotku šírky b :

$$\frac{Q}{b} = \frac{h^3}{12\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right). \quad (8.7)$$

Prietok štrbinou rastie s *treťou* mocninou jej šírky. Zdvojnásobenie vôle v tesnení osemnásobne zväčší únik. Tento vzťah sa používa pri výpočte priesakov štrbinami tesnení a pri doskových výmenníkoch s úzkymi kanálmi.

V kruhovom potrubí

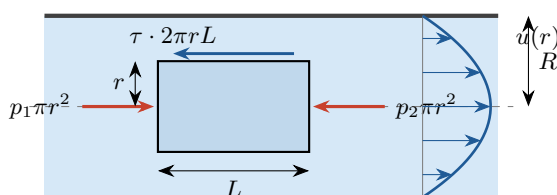
Pre kruhové potrubie s polomerom R zostavíme rovnováhu síl na valec tekutiny s polomerom r a dĺžkou L (obr. 8.5). Na čelá valca pôsobia tlakové sily a na plášť šmykové napätie:

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = \tau \cdot 2\pi r L \quad \implies \quad \tau(r) = \frac{\Delta p}{L} \frac{r}{2}.$$

Šmykové napätie rastie lineárne od nuly v osi po najväčšiu hodnotu na stene

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{L} \frac{R}{2} = \frac{\Delta p D}{4L}. \quad (8.8)$$

Tento vzťah platí pre plne vyvinuté prúdenie v kruhovom potrubí *pri laminárnom aj turbulentnom* prúdení. Vyplýva len z rovnováhy síl. Tlaková strata je priamo úmerná šmykovému napätiu na stene.



Obr. 8.5. Rovnováha síl na valci tekutiny v potrubí a parabolický rýchlostný profil laminárneho prúdenia.

Pri laminárnom prúdení dosadíme Newtonov zákon $\tau = -\mu du/dr$ (rýchlosť klesá smerom k stene). Integráciou s podmienkou $u(R) = 0$ dostaneme parabolický profil

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2), \quad (8.9)$$

ktorý sme v odd. 4.10 len uviedli. Integráciou podľa (4.6) dostaneme prietok a strednú rýchlosť:

$$\boxed{Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu L}}, \quad v = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu L}. \quad (8.10)$$

Toto je *Hagenov–Poiseuilleov zákon*. Tlaková strata pri laminárnom prúde je

$$\Delta p = \frac{32 \mu L v}{D^2}. \quad (8.11)$$

Je *priamo úmerná* viskozite a rýchlosti. Pri danom prietoku ($v \sim Q/D^2$) je nepriamo úmerná štvrtej mocnine priemeru.

Rovnicu (8.11) možno prepísať do tvaru Darcyho–Weisbachovej rovnice (6.13):

$$\Delta p = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{\rho v^2}{2}, \quad Re = \frac{\rho v D}{\mu}.$$

Pre laminárne prúdenie je teda súčiniteľ trenia

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (8.12)$$

Je to jeden z mála prípadov, keď súčiniteľ trenia poznáme presne, bez merania. Využijeme ho v kap. 10.

Príklad 8.1 – Laminárne prúdenie v zemnom vrte

Zemný vrt tepelného čerpadla má hĺbku 100 m a jednoduchú U-rúrku s vnútorným priemerom 26 mm. Preteká ňou 0,2 L/s zmesi so 40 % propylénglykolu s teplotou 10 °C ($\rho = 1042 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 7,22 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, tab. B.3). Overte režim prúdenia a určte tlakovú stratu rúrky dĺžky 200 m (bez miestnych strát).

Riešenie. $A = 5,31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $v = Q/A = 0,377 \text{ m/s}$,

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{1042 \cdot 0,377 \cdot 0,026}{7,22 \cdot 10^{-3}} = 1141.$$

Prúdenie je laminárne ($Re < 2300$, kap. 9). Podľa (8.11):

$$\Delta p = \frac{32 \cdot 7,22 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 0,377}{0,026^2} = 25,7 \text{ kPa}.$$

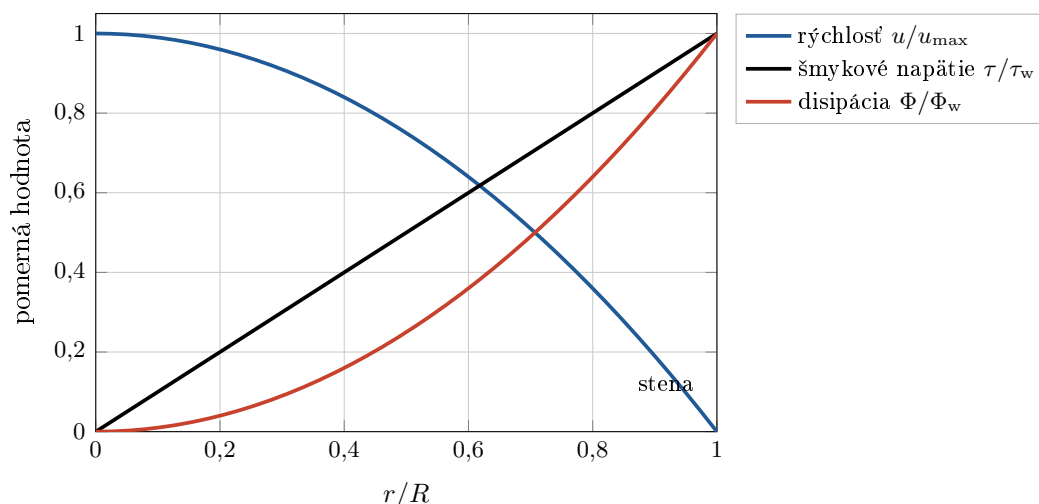
Hydraulický výkon je $Q \Delta p = 5,1 \text{ W}$. Tlaková strata je prijateľná. Laminárne prúdenie má však nevýhodu: prestup tepla zo steny do kvapaliny je pri ňom podstatne horší ako pri turbulentnom, pretože kvapalina sa v priereze nemieša. Preto sa pri návrhu vrtov kontroluje aj Reynoldsovo číslo a prietok sa volí tak, aby prúdenie bolo aspoň v prechodovej oblasti. Prípadne sa volí menšia koncentrácia glykolu alebo iná teplotonosná látka [28]. Tým je zodpovedaná úvodná otázka. ■

8.8 Viskózna disipácia energie

Viskózne napätia konajú prácu na deformujúcich sa elementoch tekutiny. Táto práca sa nevratne mení na vnútornú energiu. Výkon premenený na teplo v jednotke objemu, tzv. *disipačná funkcia*, je pre jednoduché šmykové prúdenie

$$\Phi = \tau \frac{du}{dy} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad [\text{W/m}^3]. \quad (8.13)$$

Disipácia je vždy kladná, pretože obsahuje druhú mocninu gradientu. Je najväčšia tam, kde je najväčší rýchlostný gradient, teda pri stenách (obr. 8.6).



Obr. 8.6. Rozloženie rýchlosti, šmykového napätia a disipácie v priereze potrubia pri laminárnom prúde. Disipácia rastie s druhou mocninou polomeru a je najväčšia pri stene.

Pre Poiseuilleovo prúdenie v potrubí možno overiť, že integrál disipácie cez celý objem potrubia sa rovná súčinu prietoku a tlakovej straty:

$$\int_V \Phi \, dV = Q \Delta p. \quad (8.14)$$

Výkon, ktorý čerpadlo odovzdá tekutine na prekonanie tlakovej straty, sa teda celý premení na teplo vo vnútri tekutiny. Najväčšia časť sa premení v tenkej vrstve pri stene. Toto je presný fyzikálny obsah člena e_z v energetickej bilancii (odd. 6.4) a odpoveď na otázku, kam sa podela energia čerpadla v uzavretom okruhu.

Pri turbulentnom prúde sa mechanická energia najprv premieňa na energiu turbulentných vírov. Tie sa rozpadávajú na menšie a menšie, až sa v najmenších vírových štruktúrach energia disipuje viskozitou (kap. 9). Konečným mechanizmom straty je aj v tomto prípade viskozita.

8.9 Okrajová podmienka ulpievania (no-slip)

Experimenty ukazujú, že reálna tekutina má na stene rovnakú rýchlosť ako stena. Na nehybnej stene je rýchlosť tekutiny nulová:

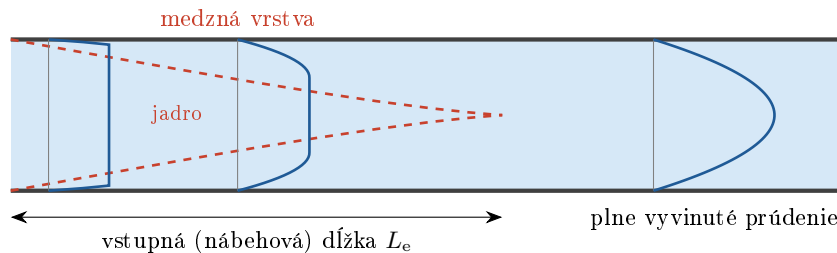
$$\mathbf{v}_{\text{tekutina}} = \mathbf{v}_{\text{stena}}. \quad (8.15)$$

Táto *podmienka ulpievania* (angl. *no-slip condition*) platí pre kvapaliny aj plyny v bežných technických podmienkach. Porušuje sa len vo veľmi zriedených plynach (odd. 1.2).

Podmienka ulpievania má zásadné dôsledky:

- na vstupe do potrubia sa pri stene vytvára medzná vrstva, ktorá postupne narastá, až vyplní celý prierez (obr. 8.7). Až za touto *vstupnou (nábehovou) dĺžkou* je prúdenie plne vyvinuté. Pri laminárnom prúde je približne $L_e \approx 0,05 Re D$, pri turbulentnom asi $10 D$ [1],
- v blízkosti každej steny vzniká oblasť s veľkým rýchlostným gradientom, *medzná vrstva*, v ktorej sa sústreďuje trenie a disipácia (kap. 9),
- tekutina pri stene sa nevymieňa s jadrom prúdu tak rýchlo ako ďalej od steny. Pri stene je preto aj najväčší odpor proti prestupu tepla,

- za telesami, napríklad za pilierom mosta alebo za stožiarom veternej turbíny, sa medzná vrstva môže od povrchu *odtrhnúť*. Vzniká úplav s vírmi a tlakovým odporom.



Obr. 8.7. Vývoj medznej vrstvy na vstupe do potrubia. Rovnomerný profil na vstupe sa mení na parabolický plne vyvinutý profil laminárneho prúdenia.

8.10 Diferenciálna bilancia hybnosti – fyzikálny význam

V kap. 7 sme zostavili bilanciu hybnosti pre konečný kontrolný objem. Poskytla nám sily na potrubie a lopatky, ale nie rozloženie rýchlosti a tlaku vo vnútri prúdu. Ak bilanciu hybnosti zostavíme pre nekonečne malý element tekutiny, podobne ako v odd. 8.5, ale pre všeobecné trojrozmerné neustálené prúdenie, dostaneme *diferenciálnu rovnicu hybnosti*. Je to druhý Newtonov zákon pre element tekutiny:

$$\underbrace{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}}_{\text{hmotnosť} \times \text{zrýchlenie}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{tlakové sily}} + \underbrace{\mathbf{f}_{\text{visk}}}_{\text{viskózne sily}} + \underbrace{\rho \mathbf{g}}_{\text{ťaž}} \quad [\text{N/m}^3]. \quad (8.16)$$

Všetky členy sú sily na jednotku objemu. Zrýchlenie na ľavej strane je materiálová derivácia rýchlosti (odd. 4.1). Hydrostatická rovnica $\nabla p = \rho \mathbf{g}$ (odd. 3.3) je špeciálnym prípadom pre tekutinu v pokoji, keď je ľavá strana a viskózne sily nulové.

8.11 Navierove–Stokesove rovnice

Pre newtonovskú nestlačiteľnú tekutinu s konštantnou viskozitou sa viskózne sily dajú vyjadriť pomocou rýchlostného poľa ako $\mathbf{f}_{\text{visk}} = \mu \nabla^2 \mathbf{v}$ [1, 37]. Rovnica (8.16) potom nadobudne tvar *Navierových–Stokesových rovníc*:

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}} \quad (8.17)$$

Spolu s rovnicou kontinuity $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (odd. 5.5) tvoria sústavu štyroch rovníc pre štyri neznáme funkcie: tri zložky rýchlosti a tlak. Pre zložku x má rovnica tvar

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x,$$

kde u, v, w sú zložky rýchlosti.

Navierove–Stokesove rovnice sú nelineárne, pretože konvektívny člen obsahuje súčin rýchlosti a jej derivácií. Analytické riešenie poznáme len pre niekoľko jednoduchých prípadov, napríklad pre prúdenie medzi doskami a v potrubí z tejto kapitoly. Technické úlohy sa riešia numericky metódami CFD. Rovnice sa pri tom diskretizujú na sieti buniek a riešia iteratívne [10, 11].

8.12 Interpretácia členov Navierových–Stokesových rovníc

Každý člen rovnice (8.17) zodpovedá jednému fyzikálnemu mechanizmu (tab. 8.1). Ak vieme, ktoré mechanizmy v danej úlohe prevládajú, vieme vybrať správny zjednodušený model.

Tabuľka 8.1. Členy Navierových–Stokesových rovníc ako mapa fyzikálnych mechanizmov.

Člen	Mechanizmus	Kde je dôležitý
$\rho \partial \mathbf{v} / \partial t$	lokálna zotrvačnosť (zmena v čase)	rozbeh a odstavenie čerpadiel, hydraulický ráz, pulzácie, turbulencia
$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$	konvektívna zotrvačnosť	dýzy, zúženia, kolená, lopatky, obtekanie telies, vznik turbulencie
$-\nabla p$	tlakové sily	všade. Poháňa prúdenie v potrubí, zrýchľuje prúd v dýze
$\mu \nabla^2 \mathbf{v}$	viskózne trenie (difúzia hybnosti)	pri stenách, v medzných vrstvách, v štrbinách, pri pomalom prúdení
$\rho \mathbf{g}$	tiaž	hydrostatika, voľná hladina, prirodzená konvekcia, vztlak

Rovnice z predchádzajúcich kapitol sú špeciálnymi prípadmi Navierových–Stokesových rovníc:

- **hydrostatika:** $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, zostáva $\nabla p = \rho \mathbf{g}$,
- **Bernoulliho rovnica:** ustálené prúdenie bez viskozity, integrácia pozdĺž prúdnice,
- **Poiseuilleovo prúdenie:** ustálené, plne vyvinuté prúdenie s nulovou konvektívnou zotrvačnosťou, rovnováha medzi tlakovým spádom a viskóznymi silami.

8.13 Kedy možno jednotlivé členy zanedbať

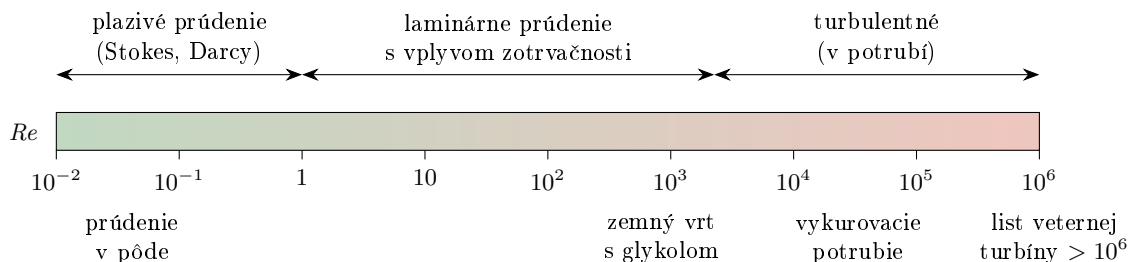
O význame jednotlivých členov rozhoduje ich *pomer*. Odhadneme ho pomocou charakteristickej rýchlosti v a charakteristického rozmeru L . Konvektívna zotrvačná sila na jednotku objemu je rádovo $\rho v^2 / L$, viskózna sila rádovo $\mu v / L^2$. Ich pomer je

$$\frac{\text{zotrvačné sily}}{\text{viskózne sily}} \sim \frac{\rho v^2 / L}{\mu v / L^2} = \frac{\rho v L}{\mu} = Re. \quad (8.18)$$

Reynoldsovo číslo teda nie je len kritériom prechodu do turbulencie. Je to *pomer zotrvačných a viskózných síl*. Podľa jeho hodnoty môžeme rovnice zjednodušiť (obr. 8.8):

- $Re \ll 1$ – **plazivé (Stokesovo) prúdenie**. Zotrvačnosť je zanedbateľná, tlakové sily sú v rovnováhe s viskóznymi. Takto prúdi podzemná voda v póroch hornín, olej v úzkych štrbinách a malé častice v tekutine. Pre prúdenie pórovitým prostredím platí *Darcyho zákon*: filtračná rýchlosť je úmerná tlakovému spádu (hydraulickému gradientu). Využíva sa pri hydrogeologických výpočtoch geotermálnych vrtov a pri návrhu otvorených systémov tepelných čerpadiel s podzemnou vodou.
- **Stredné Re – laminárne prúdenie so zotrvačnosťou**. Dôležité sú všetky členy.
- $Re \gg 1$ – **prevládajúca zotrvačnosť**. Mimo tenkých vrstiev pri stenách je viskozita zanedbateľná. Platí model ideálnej tekutiny (Eulerove rovnice, Bernoulliho rovnica).

Viskozitu treba zohľadniť len v tenkej *medznej vrstve* pri povrchu, kde vzniká trenie. Pri veľkých Re sa prúdenie v potrubí a v medzných vrstvách stáva *turbulentným* (kap. 9).



Obr. 8.8. Oblasti prúdenia podľa Reynoldsovo čísla a typické príklady z energetiky.

Podobne sa odhadne význam ostatných členov. Pomer zotrvačných síl k tiažovým určuje Froudovo číslo $Fr = v/\sqrt{gL}$. Je rozhodujúce pri prúdení s voľnou hladinou, napríklad v náhonoch a na prepadoch MVE (kap. 14). Pomer lokálnej a konvektívnej zotrvačnosti určuje, či možno prúdenie považovať za kvázistacionárne.

Príklad 8.2 – Odhad Reynoldsovo čísla

Odhadnite Reynoldsovo číslo a prevládajúce sily pre (a) vodu v potrubí s priemerom 50 mm pri rýchlosti 1 m/s, (b) podzemnú vodu v štrkopiesku so zrnami 1 mm pri filtračnej rýchlosti 10^{-5} m/s, (c) vzduch obtekajúci list veternej turbíny s hĺbkou profilu 3 m pri relatívnej rýchlosti 60 m/s. Pre vodu $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s, pre vzduch $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

Riešenie.

- (a) $Re = 1 \cdot 0,05/10^{-6} = 50\,000$: turbulentné prúdenie, zotrvačnosť prevláda, viskozita pôsobí pri stene,
- (b) $Re = 10^{-5} \cdot 10^{-3}/10^{-6} = 0,01$: plazivé prúdenie, platí Darcyho zákon,
- (c) $Re = 60 \cdot 3/(1,5 \cdot 10^{-5}) = 1,2 \cdot 10^7$: viskozita je dôležitá len v tenkej medznej vrstve na povrchu listu. Rozloženie tlaku a vztlak možno odhadnúť modelom ideálnej tekutiny, odpor trenia však nie.



Zhrnutie kapitoly

- Reálna tekutina má viskozitu a na stene ulpieva. Pri stene preto vzniká veľký rýchlostný gradient, šmykové napätie a disipácia.
- Šmykové napätie je tok hybnosti kolmo na prúd. Pri plne vyvinutom prúdení je jeho zmena naprieč prúdom v rovnováhe s tlakovým spádom.
- Medzi doskami je profil kombináciou lineárneho (Couette) a parabolického (Poiseuille) profilu.
- V kruhovom potrubí platí pre laminárne aj turbulentné prúdenie $\tau_w = \Delta p D/(4L)$. Pri laminárnom prúdení je profil parabolický a platí Hagenov–Poiseuilleov zákon $\Delta p = 32\mu Lv/D^2$, teda $\lambda = 64/Re$.
- Výkon na prekonanie tlakovej straty sa celý mení viskóznou disipáciou na teplo, najmä pri stenách.

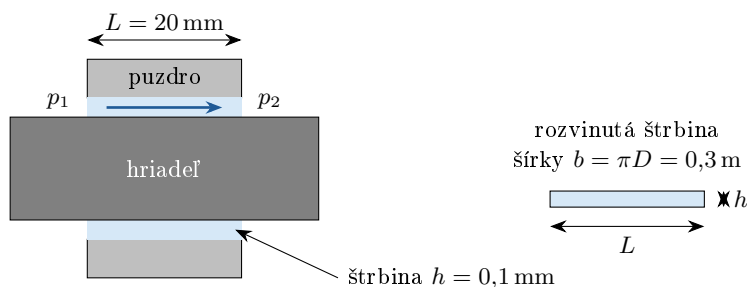
- Navierove–Stokesove rovnice sú druhým Newtonovým zákonom pre element tekutiny. Ich členy predstavujú zotrvačnosť, tlakové, viskózne a tiažové sily.
- Reynoldsovo číslo je pomer zotrvačných a viskózných síl. Pri $Re \ll 1$ prevláda viskozita (Darcy, Stokes), pri $Re \gg 1$ zotrvačnosť a viskozita pôsobí len v medznej vrstve.

Kontrolné otázky

1. Čím sa líši ideálna tekutina od reálnej? V čom model ideálnej tekutiny zlyháva?
2. Prečo možno šmykové napätie považovať za tok hybnosti?
3. Čo je podmienka ulpievania a aké má dôsledky pre prúdenie a prestup tepla?
4. Odvoďte rovnováhu síl na element tekutiny pri plne vyvinutom prúde medzi doskami.
5. Prečo tlak pri plne vyvinutom laminárnom prúde klesá pozdĺž potrubia lineárne?
6. Prečo vzťah $\tau_w = \Delta p D / (4L)$ platí aj pri turbulentnom prúde?
7. Ako závisí prietok štrbinou od jej šírky? Aký to má význam pre tesnenia?
8. Ako závisí tlaková strata pri laminárnom prúde od viskozity, rýchlosti a priemeru potrubia?
9. Kam sa podeje výkon, ktorý čerpadlo vynaloží na prekonanie tlakovej straty? Kde vzniká najväčšia disipácia?
10. Aký fyzikálny význam má Reynoldsovo číslo? Ktoré členy Navierových–Stokesových rovníc možno zanedbať pri $Re \ll 1$ a ktoré pri $Re \gg 1$?

Úlohy na precvičenie

1. Olej s viskozitou $0,08 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ vyplňa štrbinu hrúbky $0,5 \text{ mm}$ medzi pevnou a pohyblivou doskou (obr. 2.4), ktorá sa pohybuje rýchlosťou 2 m/s . Určte šmykové napätie a trecí výkon na 1 m^2 plochy. [320 Pa; 640 W/m^2]
2. Voda s teplotou 20°C prúdi laminárne potrubím s priemerom 4 mm a dĺžkou 2 m pri tlakovom rozdieli 500 Pa . Určte prietok, strednú rýchlosť a Reynoldsovo číslo. Overte, či je prúdenie laminárne. [1,57 mL/s; $0,125 \text{ m/s}$; 497]
3. Aká je najväčšia rýchlosť a šmykové napätie na stene v úlohe 2? [0,250 m/s; 0,25 Pa]
4. Štrbinou tesnenia šírky $0,1 \text{ mm}$, dĺžky 20 mm a obvodu $0,3 \text{ m}$ uniká voda ($\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$) pri tlakovom rozdieli 5 bar . Určte únik v L/h. Ako sa zmení pri dvojnásobnej šírke štrbiny? [2 250 L/h; $8 \times$ viac]



5. Tlaková strata 1,2 kPa bola nameraná na úseku potrubia s priemerom 40 mm a dĺžkou 10 m. Určte šmykové napätie na stene. [1,2 Pa]
6. Ako sa zmení tlaková strata zemného vrtu z pr. 8.1, ak teplota zmesi klesne na -5°C a viskozita vzrastie na $15\text{ mPa} \cdot \text{s}$? Prietok sa nezmení a prúdenie zostane laminárne. [53,4 kPa]
7. Ukážte, že pre laminárne prúdenie v potrubí je šmykové napätie na stene $\tau_w = 8\mu v/D$ a odvoďte z toho vzťah $\lambda = 64/Re$.
8. Integráciou (8.5) s $U = 0$ odvoďte vzťah (8.7) pre prietok štrbinou.
9. Určte Reynoldsovo číslo pre (a) vodu prúdiacu v podlahovom vykurovaní v rúrke s vnútorným priemerom 12 mm rýchlosťou 0,3 m/s pri 35°C ($\nu = 0,72 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$), (b) vzduch v štrbine vzduchového kolektora výšky 20 mm pri rýchlosti 2 m/s ($\nu = 1,7 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$, charakteristický rozmer $2h$). [5 000; 4 700]
10. Pomocou Hagenovho–Poiseuilleho zákona vysvetlite, prečo je prúdenie krvi v najmenších cievach a prúdenie podzemnej vody v póroch hornín laminárne, a odhadnite ich Reynoldsove čísla.

Kapitola 9

Laminárne a turbulentné prúdenie

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent určí režim prúdenia z Reynoldsovo čísla a vysvetlí rozdiely medzi laminárnym, prechodovým a turbulentným prúdením. Rozloží okamžitú rýchlosť na strednú hodnotu a fluktuáciu, vypočíta intenzitu turbulencie a vysvetlí pôvod turbulentného napätia. Pozná univerzálny rýchlostný profil pri stene, vypočíta hrúbku viskózne podvrstvy a posúdi, či je stena hydraulicky hladká alebo drsná. Vie zhodnotiť energetické dôsledky turbulencie pre tlakové straty, prestup tepla a miešanie v zariadeniach OZE.

Kľúčové pojmy

Reynoldsov pokus, kritické Reynoldsovo číslo, laminárne, prechodové a turbulentné prúdenie, intermitencia, víry, energetická kaskáda, Kolmogorovova mierka, fluktuácia rýchlosti, intenzita turbulencie, časová stredná hodnota, Reynoldsov rozklad, Reynoldsovo napätie, turbulentná viskozita, zmiešavacia dĺžka, trecia rýchlosť, viskózna podvrstva, logaritmický zákon, medzná vrstva, ekvivalentná drsnosť, hydraulicky hladká a drsná stena

V kap. 8 sme odvodili rýchlostné profily a tlakové straty pre laminárne prúdenie presne, len z rovnováhy síl a Newtonovho zákona viskozity. Väčšina prúdení v technickej praxi je však *turbulentná*: voda vo vykurovacom a solárnom okruhu, v tepelnej sieti aj v privádzači malej vodnej elektrárne, vzduch vo vzduchotechnike aj vietor, ktorý obteká rotor veternej turbíny. Turbulentné prúdenie je neusporiadané a rýchlosť v každom bode neustále kolíše. Presné riešenie preto nepoznáme a inžinierske výpočty sa opierajú o časovo stredné hodnoty, rozmerovú analýzu a experimenty.

Cieľom kapitoly nie je teória turbulencie. Chceme porozumieť, *kedy* prúdenie prechádza do turbulencie, *čím* sa turbulentné prúdenie odlišuje od laminárneho a *prečo* má väčšie tlakové straty, ale aj omnoho lepší prestup tepla a miešanie. Tieto poznatky priamo využijeme v kap. 10 pri výpočte súčiniteľa trenia. Výklad nadväzuje na [1, 5, 33]. Hlbší výklad turbulencie nájde čitateľ v [38, 39].

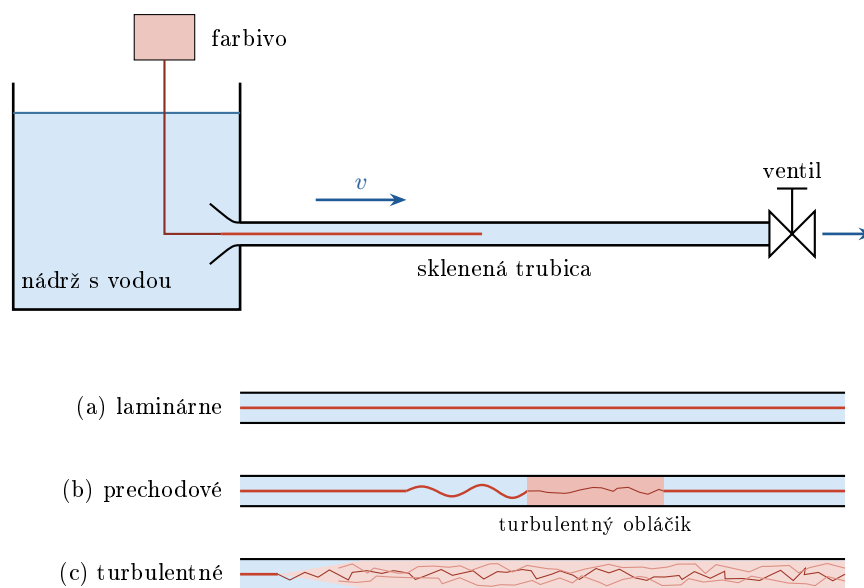
Na zamyslenie

Absorbér plochého slnečného kolektora typu „harfa“ má desať rovnobežných rúrok s vnútorným priemerom 8 mm. Pri takzvanom nízkoprietokovom režime (*low-flow*) preteká kolektorom len asi 15 L/h na m² plochy. Výrobcovia upozorňujú, že pri takomto prietoku treba použiť absorbér s jednou meandrovou rúrkou, nie harfu. Prečo? Čo sa v rúrkach zmení,

keď sa ten istý prietok rozdelí do desiatich rúrok namiesto jednej?

9.1 Reynoldsov experiment

Existenciu dvoch rôznych režimov prúdenia systematicky preukázal anglický inžinier Osborne Reynolds v roku 1883 [40]. Jeho pokus je dodnes základným laboratórnym cvičením mechaniky tekutín (obr. 9.1). Z veľkej nádrže s pokojnou vodou vytekala voda sklenenou trubicou so zaobleným vstupom. Prietok sa nastavoval ventilom na konci trubice. Tenkou ihlou sa do osi vstupu privádzalo farbivo.



Obr. 9.1. Reynoldsov pokus. Hore usporiadanie, dole vzhľad prúžku farbiva pri (a) laminárnom, (b) prechodovom a (c) turbulentnom prúdení.

Pri malej rýchlosti zostáva prúžok farbiva tenký a ostrý po celej dĺžke trubice. Farbivo sa rozširuje len molekulovou difúziou, ktorá je veľmi pomalá. Tekutina sa pohybuje v rovnobežných vrstvách, ktoré sa navzájom nemiešajú. Takéto prúdenie nazývame *laminárne* (z lat. *lamina* – vrstva, doska).

Pri väčšej rýchlosti sa prúžok začne vlniť a v niektorých úsekoch sa náhle rozpadne na víry. Tie sa šíria dolu prúdom a farbivo sa v nich rozmieša po celom priereze. Obdobia usporiadaného a neusporiadaného prúdenia sa striedajú. Hovoríme o *prechodovom* prúdení.

Pri ešte väčšej rýchlosti sa farbivo rozmieša takmer hneď za vstupom a celá trubica je rovnomerne sfarbená. Pohyb tekutiny je nepravidelný, trojrozmerný a vírivý. Takéto prúdenie nazývame *turbulentné* (z lat. *turbulentus* – nepokojný, búrlivý).

Reynolds opakoval pokus s rôznymi priermi trubíc a pri rôznych teplotách vody, teda pri rôznej viskozite. Zistil, že o režime nerozhoduje samotná rýchlosť, priemer ani viskozita, ale ich bezrozmerná kombinácia vd/ν . Dnes ju nazývame *Reynoldsovo číslo* [1, 40].

9.2 Reynoldsovo číslo

Pre prúdenie v kruhovom potrubí definujeme Reynoldsovo číslo pomocou strednej rýchlosti v a vnútorného priemeru D :

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}. \quad (9.1)$$

V odd. 8.13 sme ukázali, že Re je pomer zotrvačných a viskózných síl (rov. (8.18)). Viskozita tlmí náhodné poruchy, zotrvačnosť ich zosilňuje. Pri malom Re viskozita každú poruchu utlmí a prúdenie zostane laminárne. Pri veľkom Re sa poruchy zosilnia a prúdenie prejde do turbulencie.

Hodnota Re , pri ktorej sa to stane, sa nazýva *kritické Reynoldsovo číslo*. Nie je to presná fyzikálna konštanta. Závisí od úrovne porúch na vstupe, od vibrácií potrubia a od drsnosti steny. V starostlivo pripravených pokusoch s veľmi hladkou trubicou sa laminárne prúdenie podarilo udržať až do $Re \approx 100\,000$ [1]. Naopak, pod hodnotou približne 2000 sa každá porucha utlmí a prúdenie sa vždy vráti do laminárneho stavu. Pre technické výpočty v kruhových potrubíach používame hranice [1]

$$\begin{aligned} Re < 2300 & \text{ laminárne prúdenie,} \\ 2300 < Re < 4000 & \text{ prechodová oblasť,} \\ Re > 4000 & \text{ turbulentné prúdenie.} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Pre potrubie nekruhového prierezu (vzduchotechnické potrubie, kanál vzduchového kolektora, medzikružie výmenníka) sa v (9.1) namiesto D používa *hydraulický priemer*

$$D_h = \frac{4A}{O}, \quad (9.3)$$

kde A je plocha prierezu a O omočený obvod. Pre kruh vychádza $D_h = D$, pre obdĺžnik so stranami a, b je $D_h = 2ab/(a+b)$. Podrobnejšie sa mu venuje odd. 10.2.

Pri obtekaní telies a pri prúdení pozdĺž stien sa Reynoldsovo číslo vzťahuje na iný charakteristický rozmer, napríklad na vzdialenosť od nábežnej hrany dosky (odd. 9.10) alebo na hĺbku profilu lopatky. Kritické hodnoty sú potom iné. Pri uvádzaní Re preto treba vždy povedať, ku ktorému rozmeru sa vzťahuje.

Príklad 9.1 – Režim prúdenia v zariadeniach OZE

Určte režim prúdenia v týchto prípadoch:

- (a) rúrka absorbéra s $D = 8 \text{ mm}$, voda 40°C , $v = 0,02 \text{ m/s}$,
- (b) solárny okruh s $D = 16 \text{ mm}$, prietok 2 L/min zmesi so 40 % propylénglykolu pri 10°C a pri 65°C ,
- (c) potrubie tepelnej siete DN 100 ($D = 0,1 \text{ m}$), voda 70°C , $v = 1 \text{ m/s}$,
- (d) vzduchotechnické potrubie $400 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$, vzduch 20°C , $v = 4 \text{ m/s}$.

Viskozity vezmite z tab. B.1 až B.3.

Riešenie.

- (a) $Re = 0,02 \cdot 0,008 / 0,658 \cdot 10^{-6} = 243$: laminárne.
- (b) $v = Q/A = 3,33 \cdot 10^{-5} / 2,01 \cdot 10^{-4} = 0,166 \text{ m/s}$. Pri 10°C je $Re = 0,166 \cdot 0,016 / 6,925 \cdot 10^{-6} = 383$, pri 65°C je $Re = 0,166 \cdot 0,016 / 1,165 \cdot 10^{-6} = 2\,280$. V oboch prípadoch je prúdenie laminárne, pri 65°C však už na hranici prechodovej oblasti.
- (c) $Re = 1 \cdot 0,1 / 0,413 \cdot 10^{-6} = 242\,000$: výrazne turbulentné.

(d) $D_h = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,25 / 0,65 = 0,308 \text{ m}$, $Re = 4 \cdot 0,308 / 1,52 \cdot 10^{-5} = 81\,000$: turbulentné. Prípad (b) ukazuje, že v tom istom okruhu sa režim mení s teplotou. Ráno pri rozbehu je prúdenie laminárne, pri prevádzkovej teplote sa blíži k prechodovej oblasti. ■

9.3 Laminárne prúdenie

V laminárnom prúdení sa častice tekutiny pohybujú po hladkých dráhach. Pri ustálenom prúdení sú tieto dráhy zhodné s prúdniciami. Hybnosť, teplo aj prímese sa naprieč prúdom prenášajú len molekulovým pohybom, teda viskozitou, tepelnou vodivosťou a difúziou. Z toho vyplývajú vlastnosti, ktoré poznáme z kap. 8:

- rýchlostný profil v potrubí je parabolický a maximálna rýchlosť v osi je dvojnásobkom strednej rýchlosti (obr. 4.6),
- tlaková strata je úmerná prvej mocnine rýchlosti a nezávisí od drsnosti steny, platí $\lambda = 64/Re$ (rov. (8.12)),
- prúdenie je deterministické: pri rovnakých okrajových podmienkach dostaneme vždy rovnaký výsledok a vieme ho vypočítať,
- prenos tepla a látky naprieč prúdom je pomalý.

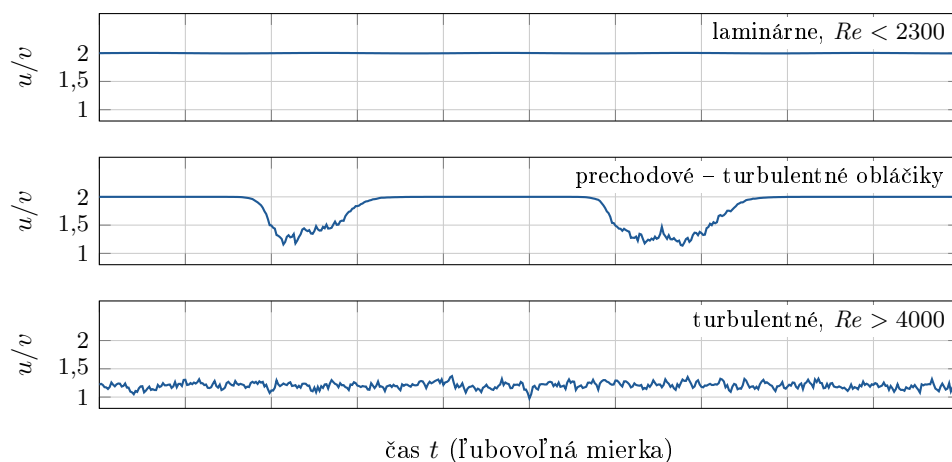
Posledná vlastnosť je pre energetiku rozhodujúca. Pri plne vyvinutom laminárnom prúdení v kruhovej rúre je Nusseltovo číslo konštantné a nezávisí od rýchlosti. Pre konštantnú hustotu tepelného toku na stene je $Nu = hD/k = 4,36$, pre konštantnú teplotu steny $Nu = 3,66$ [41]. Súčiniteľ prestupu tepla h je preto nepriamo úmerný priemeru a zväčšením prietoku ho nezvýšime.

Laminárne prúdenie sa v technike vyskytuje pri veľkej viskozite, malých rozmeroch alebo malých rýchlostiach. Príkladmi sú mazacie oleje v ložiskách a štrbinách, nemrznúce zmesi pri nízkych teplotách (pr. 8.1), mikrokanaľiky kompaktných výmenníkov tepla, prúdenie podzemnej vody v póroch hornín a nízkoprietokové solárne kolektory. Pri návrhu takých zariadení treba s laminárnym prúdením počítať vedome.

9.4 Prechodová oblasť

V oblasti $2300 < Re < 4000$ nie je prúdenie ani laminárne, ani plne turbulentné. Laminárnym prúdom postupujú oddelené turbulentné oblasti, takzvané *turbulentné obláčiky* (angl. *puffs*) a pri väčšom Re dlhšie *turbulentné zátky* (angl. *slugs*). Snímač rýchlosti v osi potrubia preto zaznamená striedanie pokojného signálu a úsekov s fluktuáciami (obr. 9.2). Tento jav sa nazýva *intermitencia*. Pri laminárnom prúdení je rýchlosť v osi $u = 2v$, v turbulentnom obláčiku je profil plochší a rýchlosť v osi klesne asi na $1,2v$ až $1,3v$.

Podiel času, keď je prúdenie v danom mieste turbulentné, sa nazýva *súčiniteľ intermitencie* γ . S rastúcim Re rastie od 0 do 1. Súčiniteľ trenia aj súčiniteľ prestupu tepla preto v prechodovej oblasti kolíšu medzi hodnotami pre laminárne a turbulentné prúdenie. Ich hodnoty sú málo spoľahlivé a závisia od histórie prúdenia, napríklad od toho, či sa prietok zvyšuje alebo znižuje [1].



Obr. 9.2. Priebeh rýchlosti v osi potrubia v čase pri laminárnom, prechodovom a turbulentnom prúdení (ilustračné dáta). Rýchlosť je vztiahnutá na strednú rýchlosť v .

Pozor – častá chyba

Návrhový prevádzkový stav zariadenia by nemal ležať v prechodovej oblasti. Tlaková strata a prestup tepla sa tam nedajú spoľahlivo predpovedať a systém môže nepravidelne „preskakovať“ medzi režimami. To sa prejaví kolísaním prietoku a teploty. Ak sa prechodovej oblasti nemožno vyhnúť, napríklad pri rozbehu solárneho okruhu, počíta sa na strane bezpečnosti. Pri tlakovej strate sa uvažuje väčšia z oboch hodnôt, pri prestupe tepla menšia.

9.5 Turbulentné prúdenie

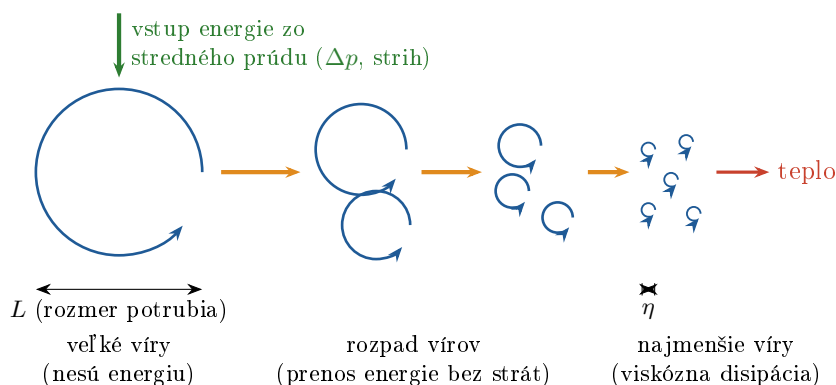
Turbulenciu nie je ľahké presne definovať. Namiesto definície sa uvádzajú jej charakteristické vlastnosti [38, 39]:

- **Nepriavidelnosť.** Rýchlosť, tlak aj teplota v každom bode náhodne kolíšu. Jednotlivý priebeh nemožno predpovedať, štatistické vlastnosti (stredné hodnoty, rozptyly) však áno.
- **Vírivosť a trojrozmernosť.** Turbulentné prúdenie je tvorené vírmi rôznych veľkostí a orientácií (odd. 4.11). Aj keď je stredné prúdenie rovinné, fluktuácie sú vždy trojrozmerné.
- **Difuzivita.** Víry rýchlo premiešavajú tekutinu naprieč prúdom. Hybnosť, teplo aj prímеси sa prenášajú o niekoľko rádov rýchlejšie ako molekulovým pohybom.
- **Disipácia.** Turbulencia neustále spotrebuje energiu stredného prúdenia a mení ju na teplo. Bez dodávky energie (tlakového spádu, strihu) turbulencia rýchlo zanikne.
- **Veľké Reynoldsovo číslo.** Turbulencia vzniká z nestability laminárneho prúdenia pri dostatočne veľkom Re .
- **Vlastnosť prúdenia, nie tekutiny.** Tá istá voda môže prúdiť laminárne aj turbulentne. Aj najmenšie víry sú oveľa väčšie ako stredná voľná dráha molekúl, takže turbulencia je jav kontinua a opisujú ju Navierove–Stokesove rovnice (odd. 8.11).

Víry a energetická kaskáda

Energii odoberá turbulencia strednému prúdu prostredníctvom *veľkých vírov*. Ich rozmer L je porovnateľný s rozmerom prúdu, napríklad s priemerom potrubia. Veľké víry sú nestabilné a

rozpadávajú sa na menšie. Tie sa znova rozpadávajú a energia tak postupuje k stále menším vírom (obr. 9.3). Tento proces sa nazýva *energetická kaskáda*. Pri prenose medzi veľkými a strednými vírmi sa energia takmer nestráca. Až v najmenších víroch sú rýchlostné gradienty také veľké, že viskozita energiu disipuje na teplo (odd. 8.8).



Obr. 9.3. Energetická kaskáda turbulencie: energia stredného prúdu prechádza z veľkých vírov na menšie, až sa v najmenších víroch s rozmerom η premení viskozitou na teplo.

Rozmer najmenších vírov závisí len od kinematickej viskozity ν a od výkonu disipovaného na jednotku hmotnosti ε [W/kg]. Z rozmerovej analýzy dostaneme *Kolmogorovovu mierku* [39]

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (9.4)$$

Pomer najväčších a najmenších vírov rastie s Reynoldsovým číslom približne ako $L/\eta \sim Re^{3/4}$ [38].

Príklad 9.2 – Veľkosť vírov v potrubí tepelnej siete

Potrubím DN 100 ($D = 0,1$ m) prúdi voda s teplotou 70°C rýchlosťou 1 m/s. Súčiniteľ trenia je $\lambda = 0,0182$ (určí sa v kap. 10). Odhadnite rozmer najmenších vírov.

Riešenie. Tlakový spád podľa Darcyho–Weisbachovej rovnice:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\lambda}{D} \frac{\rho v^2}{2} = \frac{0,0182}{0,1} \cdot \frac{977,5 \cdot 1^2}{2} = 89,0 \text{ Pa/m}.$$

Výkon na prekonanie straty sa celý disipuje. Na jednotku hmotnosti tekutiny pripadá

$$\varepsilon = \frac{Q \Delta p}{\rho A L} = \frac{v}{\rho} \frac{\Delta p}{L} = \frac{1 \cdot 89,0}{977,5} = 0,091 \text{ W/kg}.$$

Podľa (9.4):

$$\eta = \left(\frac{(0,413 \cdot 10^{-6})^3}{0,091} \right)^{1/4} = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,03 \text{ mm}.$$

Najväčšie víry majú rozmer rádovo 0,1 m, najmenšie 0,03 mm. Pomer je asi 3400. Ak by sme chceli všetky víry v úseku potrubia dĺžky jedného priemeru zachytiť výpočtovou sieťou, potrebovali by sme rádovo $3400^3 \approx 4 \cdot 10^{10}$ bodov. Preto sa pri technických výpočtoch turbulencia nerieši priamo, ale *modeluje* (odd. 9.7). ■

Priama numerická simulácia všetkých vírov (DNS, *Direct Numerical Simulation*) je preto obmedzená na výskum a malé Reynoldsove čísla. Simulácia veľkých vírov (LES, *Large Eddy Simulation*) počíta len veľké víry a vplyv malých modeluje. V inžinierskej praxi prevládajú výpočty so strednými hodnotami (RANS), v ktorých sa modeluje vplyv všetkých vírov [1, 10].

9.6 Fluktuácie rýchlosti

Ak meriame rýchlosť turbulentného prúdu v jednom bode rýchlym snímačom, dostaneme nepravidelný signál (obr. 9.4). Okamžitú rýchlosť zapíšeme ako súčet strednej hodnoty a fluktuácie:

$$u(t) = \bar{u} + u'(t). \quad (9.5)$$

Rovnako rozložíme ďalšie zložky rýchlosti, tlak aj teplotu: $v = \bar{v} + v'$, $p = \bar{p} + p'$, $T = \bar{T} + T'$.

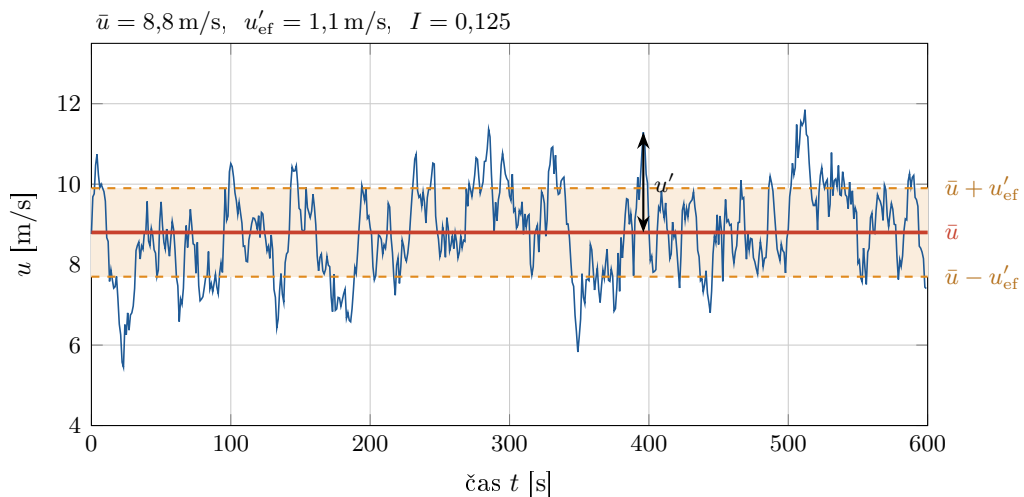
Stredná hodnota fluktuácie je z definície nulová. Jej veľkosť preto vyjadrujeme *efektívnou hodnotou* (smerodajnou odchýlkou)

$$u'_{\text{ef}} = \sqrt{u'^2}, \quad (9.6)$$

a jej pomer k strednej rýchlosti nazývame *intenzita turbulencie*

$$I = \frac{u'_{\text{ef}}}{\bar{u}}. \quad (9.7)$$

V jadre prúdu v potrubí je intenzita turbulencie rádovo niekoľko percent. Pri stene je väčšia. Fluktuácie majú frekvencie od jednotiek po tisíce hertzov [1]. Na ich meranie sa používa termoanemometer (žeraviaci drôtik), laserová dopplerovská anemometria (LDA) alebo ultrazvukový anemometer [14].



Obr. 9.4. Desaťminútový záznam rýchlosti vetra vzorkovaný s frekvenciou 1 Hz (ilustračné dáta). Vyznačená je stredná hodnota, pásmo $\bar{u} \pm u'_{\text{ef}}$ a fluktuácia u' v jednom okamihu.

Aplikácia v OZE: turbulencia vetra

Vietor pri zemi je vždy turbulentný. Vo veternej energetike sa rýchlosť vetra spracúva v desaťminútových intervaloch. Pre každý interval sa určí stredná rýchlosť a intenzita turbulencie [24, 25]. Nad rovinatým otvoreným terénom býva intenzita turbulencie vo výške náboja okolo 10 % až 15 %, nad lesom, v zástavbe a v zložitom teréne je väčšia. Norma pre návrh veterných turbín [42] delí lokality podľa referenčnej intenzity turbulencie pri rýchlosti 15 m/s do kategórií, napríklad A ($I_{\text{ref}} = 0,16$), B (0,14) a C (0,12). Väčšia turbulencia zvyšuje únavové zaťaženie listov, hriadeľa aj veže. Turbulencia má však aj priaznivý účinok. Urýchľuje premiešanie spomaleného úplavu za turbínou s okolitým vetrom, takže turbíny v parku za ňou stoja v menšom „závetří“.

Príklad 9.3 – Intenzita turbulencie vetra

Ultrazvukový anemometer zaznamenal v sekundových intervaloch tieto rýchlosti vetra v m/s: 8,2; 9,1; 7,6; 10,4; 8,8; 7,1; 9,7; 11,0; 8,5; 7,9; 9,4; 8,3. Určte strednú rýchlosť, fluktuácie, efektívnu hodnotu fluktuácií a intenzitu turbulencie.

Riešenie. Stredná rýchlosť je $\bar{u} = 106,0/12 = 8,83$ m/s. Fluktuácie $u'_i = u_i - \bar{u}$ sú $-0,63$; $0,27$; $-1,23$; $1,57$; $-0,03$; $-1,73$; $0,87$; $2,17$; $-0,33$; $-0,93$; $0,57$; $-0,53$. Ich súčet je nulový. Súčet ich druhých mocnín je 14,49, teda

$$u'_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{14,49}{12}} = 1,10 \text{ m/s}, \quad I = \frac{1,10}{8,83} = 0,124 \approx 12 \, \%.$$

V praxi sa intenzita počíta z celého desaťminútového záznamu, teda zo stoviek hodnôt (obr. 9.4). Dvanásť hodnôt slúži len na ilustráciu postupu. ■

9.7 Časová stredná hodnota a Reynoldsov rozklad

Časovú strednú hodnotu veličiny u v danom bode definujeme ako

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt. \quad (9.8)$$

Doba priemerovania T musí byť omnoho dlhšia ako časová mierka fluktuácií, aby sa výsledok s ďalším predlžovaním T už nemenil. Zároveň musí byť kratšia ako čas, za ktorý sa mení stredné prúdenie. Ak sa stredné hodnoty nemenia, prúdenie je *štatisticky ustálené* (odd. 4.4). Rozklad okamžitých veličín na strednú hodnotu a fluktuáciu (9.5) sa nazýva *Reynoldsov rozklad*.

Pri priemerovaní používame jednoduché pravidlá:

$$\overline{u'} = 0, \quad \overline{\bar{u} u'} = 0, \quad \overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2}, \quad \overline{uv} = \bar{u} \bar{v} + \overline{u'v'}. \quad (9.9)$$

Stredná hodnota súčinu dvoch fluktuácií všeobecne nie je nulová. Z toho vyplýva najdôležitejší dôsledok priemerovania.

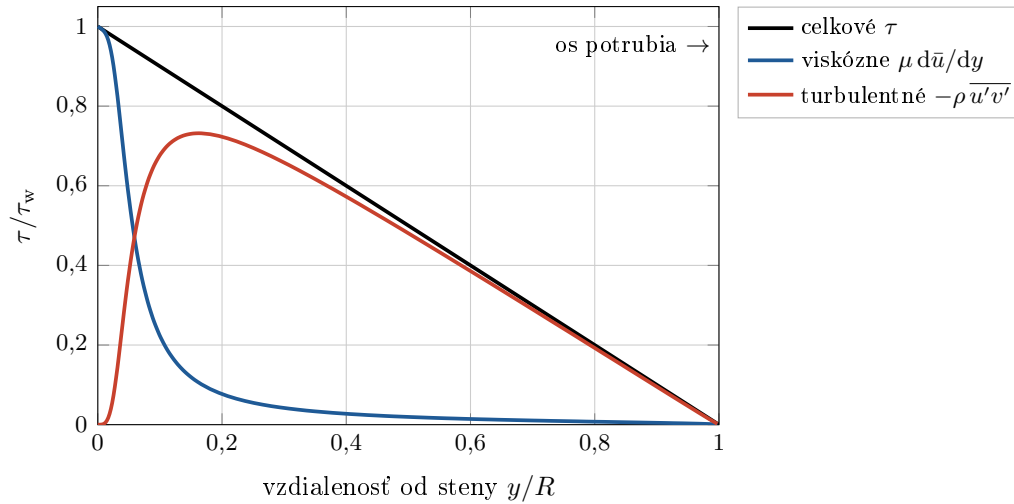
Reynoldsovo napätie

Ak Reynoldsov rozklad dosadíme do rovnice kontinuity a do Navierových–Stokesových rovníc a rovnice spriemerujeme, dostaneme rovnice pre stredné veličiny, takzvané rovnice RANS (*Reynolds Averaged Navier–Stokes*). Majú rovnaký tvar ako pôvodné rovnice, ale obsahujú navyše členy so strednými súčinnými fluktuácií. Pre jednoduché rovinné prúdenie pozdĺž steny (stredná rýchlosť $\bar{u}$ v smere x , gradient v smere y) je šmykové napätie

$$\tau = \underbrace{\mu \frac{d\bar{u}}{dy}}_{\tau_v \text{ (viskózne)}} + \underbrace{-\rho \overline{u'v'}}_{\tau_t \text{ (turbulentné)}}. \quad (9.10)$$

Člen $-\rho \overline{u'v'}$ sa nazýva *Reynoldsovo (turbulentné) napätie* [1, 39]. Nie je to napätie v pravom zmysle slova. Je to tok hybnosti, ktorý prenášajú fluktuácie rýchlosti naprieč prúdom (odd. 9.8). Pre stredné prúdenie sa však prejavuje rovnako ako šmykové napätie.

Rovnováha síl na element tekutiny v plne vyvinutom prúdení (odd. 8.7) platí aj pre stredné hodnoty. Celkové šmykové napätie τ preto aj pri turbulentnom prúdení rastie od osi potrubia lineárne až na hodnotu $\tau_w = \Delta p D / (4L)$ na stene (rov. (8.8)). Mení sa len jeho zloženie (obr. 9.5). V jadre prúdu prenášajú takmer všetku hybnosť víry. Tesne pri stene fluktuácie zanikajú, pretože na stene musí byť $u' = v' = 0$, a hybnosť prenáša len viskozita.



Obr. 9.5. Rozdelenie celkového šmykového napätia na viskóznú a turbulentnú zložku pri turbulentnom prúdení v potrubí (výpočet modelom zmiešavacej dĺžky pre malé $Re \approx 5000$). Pri väčšom Re sa oblasť s prevahou viskózneho napätia ešte zúži.

Problém uzáveru a modely turbulencie

Rovnice RANS obsahujú nové neznáme – Reynoldsove napätia. Rovníc je však rovnako veľa ako pri laminárnom prúdení. Sústava teda nie je uzavretá. Toto je takzvaný *problém uzáveru* turbulencie. Rieši sa *modelmi turbulencie*, ktoré vyjadrujú Reynoldsove napätia pomocou stredných veličín. Najčastejšie sa používa Boussinesqova hypotéza. Turbulentné napätie vyjadruje analogicky k Newtonovmu zákonu viskozity:

$$-\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad \tau = (\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (9.11)$$

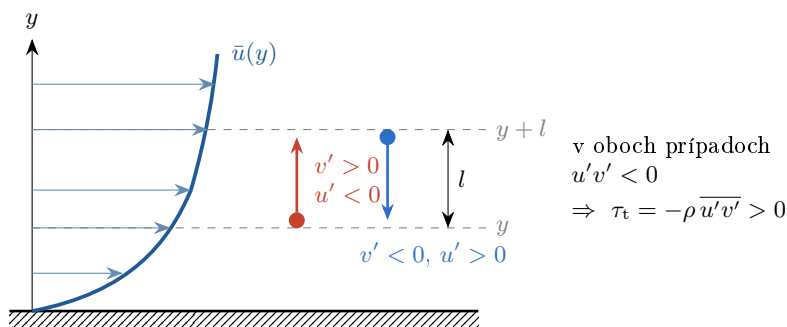
Veličina μ_t je *turbulentná (vírová) viskozita*. Na rozdiel od μ nie je vlastnosťou tekutiny, ale prúdenia. Na stene je nulová a v jadre prúdu môže byť stokrát až tisíckrát väčšia ako μ [1]. Modely turbulencie sa líšia tým, ako μ_t určujú. Najjednoduchšie používajú algebraický vzťah (odd. 9.8). V programoch CFD sa najčastejšie používajú dvojrovnícové modely $k-\varepsilon$ a $k-\omega$ SST. Riešia dve ďalšie transportné rovnice pre turbulentnú kinetickú energiu $k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ a pre rýchlosť jej disipácie.

Poznámka

Voľba modelu turbulencie môže podstatne ovplyvniť výsledok simulácie. Pri simulácii pikoturbíny napríklad jednotlivé modely dávajú rôzne rozloženie tlaku na lopatkách aj rôznu účinnosť. Výsledky CFD preto treba vždy overiť meraním alebo porovnaním s overeným riešením [10, 12].

9.8 Turbulentné miešanie

Prečo je stredná hodnota $\overline{u'v'}$ v prúde s rýchlostným gradientom nenulová a záporná? Uvažujme prúdenie pri stene, kde stredná rýchlosť rastie so vzdialenosťou y (obr. 9.6). Ak sa častica tekutiny náhodne presunie smerom od steny ($v' > 0$), prinesie do vyššej vrstvy nižšiu rýchlosť svojej pôvodnej vrstvy. Tam sa prejaví ako záporná fluktuácia $u' < 0$. Častica, ktorá sa presunie k stene ($v' < 0$), prinesie vyššiu rýchlosť a vyvolá $u' > 0$. V oboch prípadoch je súčin $u'v'$



Obr. 9.6. Prenos hybnosti turbulentnými fluktuáciami. Častica, ktorá sa presunie o zmiešavaciu dĺžku l , preniesie rýchlosť svojej pôvodnej vrstvy.

záporný, a teda $\tau_t = -\rho \overline{u'v'} > 0$. Víry teda prenášajú hybnosť z rýchlejších vrstiev do pomalších rovnako ako viskozita, len omnoho účinnejšie [1].

Prandtl túto predstavu vyjadril kvantitatívne. Predpokladal, že častica sa pred premiešaním s okolím presunie priemerne o *zmiešavaciu dĺžku* l . Fluktuácie sú potom rádovo $|u'| \approx |v'| \approx l |d\bar{u}/dy|$ a turbulentné napätie je

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad \mu_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (9.12)$$

Pri stene sú víry obmedzené jej blízkosťou a zmiešavacia dĺžka rastie lineárne so vzdialenosťou od steny, $l = \kappa y$. Konštanta $\kappa \approx 0,41$ sa nazýva *Kármánova konštanta*. Z tejto jednoduchej úvahy vyplýva logaritmický rýchlostný profil (odd. 9.9).

Rovnakým mechanizmom prenášajú víry aj teplo a látku. Turbulentný tepelný tok je $\dot{q}_t = \rho c_p \overline{v'T'}$ a turbulentná tepelná vodivosť je približne úmerná μ_t . Preto je prestup tepla pri turbulentnom prúdení omnoho intenzívnejší ako pri laminárnom. Pre plne vyvinuté turbulentné prúdenie v hladkej rúre sa často používa Dittusov–Boelterov vzťah [41]

$$Nu = \frac{hD}{k} = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} \quad (Re > 10^4, 0,7 < Pr < 160, \text{ ohrev tekutiny}), \quad (9.13)$$

kde $Pr = \mu c_p / k$ je Prandtlovo číslo. Na rozdiel od laminárneho prúdenia tu h rastie s rýchlosťou ($h \propto v^{0,8}$). Presnejší a v celej oblasti $Re > 2300$ použiteľný je Gnielinskiho vzťah [41].

Príklad 9.4 – Prestup tepla v rúre absorbéra

Kolektor s plochou $2,5 \text{ m}^2$ a absorbérom typu harfa (10 rúrok s $D = 8 \text{ mm}$, rozstup $0,1 \text{ m}$) pracuje v nízkoprietokovom režime $15 \text{ L}/(\text{h} \cdot \text{m}^2)$. Teplonosnou látkou je voda so strednou teplotou 40°C ($\nu = 0,658 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $k = 0,631 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, $Pr = 4,32$ [1, tab. A-3]). Absorbér pohlcuje $700 \text{ W}/\text{m}^2$. Určte režim prúdenia, súčiniteľ prestupu tepla a rozdiel teplôt medzi stenou rúrky a kvapalinou. Porovnajte s hypotetickým turbulentným prúdením pri $Re = 10^4$.

Riešenie. Prietok jednou rúrkou je $Q = 15 \cdot 2,5/10 = 3,75 \text{ L}/\text{h} = 1,04 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$. Rýchlosť a Reynoldsovo číslo:

$$v = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{1,04 \cdot 10^{-6}}{5,03 \cdot 10^{-5}} = 0,021 \text{ m/s}, \quad Re = \frac{0,021 \cdot 0,008}{0,658 \cdot 10^{-6}} = 252.$$

Prúdenie je laminárne. Pri približne konštantnom tepelnom toku je $Nu = 4,36$:

$$h_{\text{lam}} = \frac{4,36 \cdot 0,631}{0,008} = 344 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}).$$

Na 1 m dĺžky rúrky pripadá pás absorbéra široký 0,1 m, teda tepelný tok $\dot{q}' = 70 \text{ W/m}$. Ten musí prejsť cez vnútorný povrch rúrky $\pi D \cdot 1 \text{ m}$:

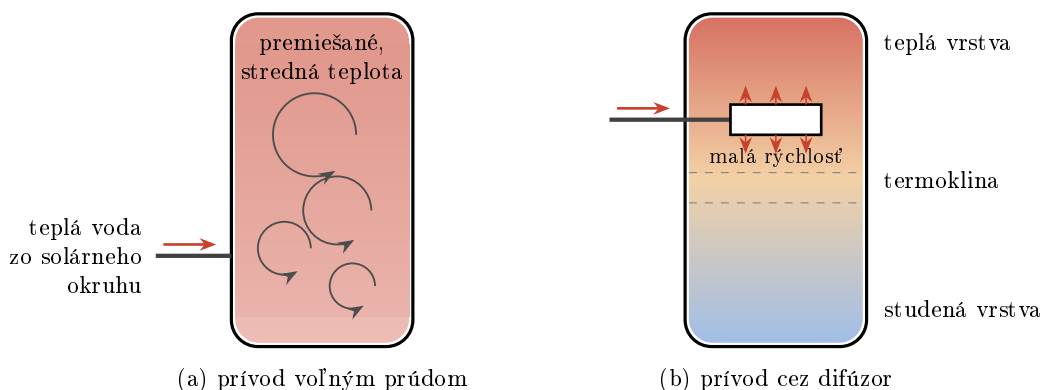
$$\Delta T_{\text{lam}} = \frac{\dot{q}'}{h \pi D} = \frac{70}{344 \cdot \pi \cdot 0,008} = 8,1 \text{ K}.$$

Pri $Re = 10^4$ by podľa (9.13) bolo $Nu = 0,023 \cdot 10\,000^{0,8} \cdot 4,32^{0,4} = 65,5$, $h = 5\,160 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$ a $\Delta T = 0,54 \text{ K}$. Takýto stav by však vyžadoval rýchlosť 0,82 m/s, teda asi 40-násobný prietok.

Pri laminárnom prúdení je teda stena absorbéra asi o 8 K teplejšia ako kvapalina. O toľko väčšie sú aj tepelné straty kolektora do okolia a jeho účinnosť klesne. Ak sa celý prietok vedie jednou meandrovou rúrkou, rýchlosť vzrastie desaťkrát a $Re \approx 2500$. Prúdenie je na hranici prechodovej oblasti. Meander má navyše mnoho ohybov, ktoré prúdenie premiešavajú, takže prestup tepla je podstatne lepší. Tým je zodpovedaná úvodná otázka. Nevýhodou meandra je väčšia tlaková strata, čo pri nízkom prietoku nevádi [6]. ■

Aplikácia v OZE: stratifikácia akumulčného zásobníka

Turbulentné miešanie nie je vždy žiaduce. V akumulčnom zásobníku solárneho systému alebo tepelného čerpadla chceme udržať *teplotnú stratifikáciu*: teplá voda hore, studená dole a medzi nimi tenká prechodová vrstva, *termoklina*. Stratifikovaný zásobník dodá spotrebiteľu vodu s vyššou teplotou a kolektoru alebo tepelnému čerpadlu vracia studenšiu vodu, čím zvyšuje ich účinnosť. Ak do zásobníka vteká voda rýchlym prúdom, turbulentný vtokový prúd zásobník premieša (obr. 9.7). Preto sa privody vybavujú difúzormi, rozdeľovacími doskami alebo stratifikačnými rúrami, ktoré znížia rýchlosť a privedú vodu do vrstvy s rovnakou teplotou.



Obr. 9.7. Vplyv vtoku na teplotnú stratifikáciu zásobníka: (a) rýchly vtokový prúd zásobník turbulentne premieša, (b) difúzor privádza vodu malou rýchlosťou a vrstvy zostanú zachované.

9.9 Rýchlostný profil pri stene

Stredný rýchlostný profil turbulentného prúdenia v potrubí je v jadre plochý a pri stene veľmi strmý (obr. 4.6). Mocninový profil (4.11) ho v jadre opisuje dobre. Na stene však dáva nekonečný gradient, a preto z neho nemožno určiť šmykové napätie. Presnejší opis vychádza z rozmerovej analýzy a z meraní [1, 43].

Blízko steny závisí stredná rýchlosť len od vzdialenosti y , od šmykového napätia na stene τ_w , od

hustoty ρ a od viskozity ν . Z τ_w a ρ zostavíme veličinu s rozmerom rýchlosti, *treciu (šmykovú) rýchlosť*

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (9.14)$$

a z ν a u_* charakteristickú dĺžku ν/u_* . Pomocou nich zavedieme bezrozmernú rýchlosť a vzdialenosť od steny:

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*}, \quad y^+ = \frac{y u_*}{\nu}. \quad (9.15)$$

Veličina y^+ má tvar Reynoldsovho čísla. Vyjadruje, či je daný bod blízko steny v zmysle viskozity. Merania v potrubí aj na doskách ukazujú, že v bezrozmerných súradniciach ležia rýchlostné profily na jednej *univerzálnej krivke* (obr. 9.8). Rozlišujeme na nej tieto oblasti:

- **Viskózna podvrstva** ($y^+ < 5$). Fluktuácie sú utlmené stenou a platí $\tau \approx \tau_w = \mu \bar{u}/y$. Profil je lineárny:

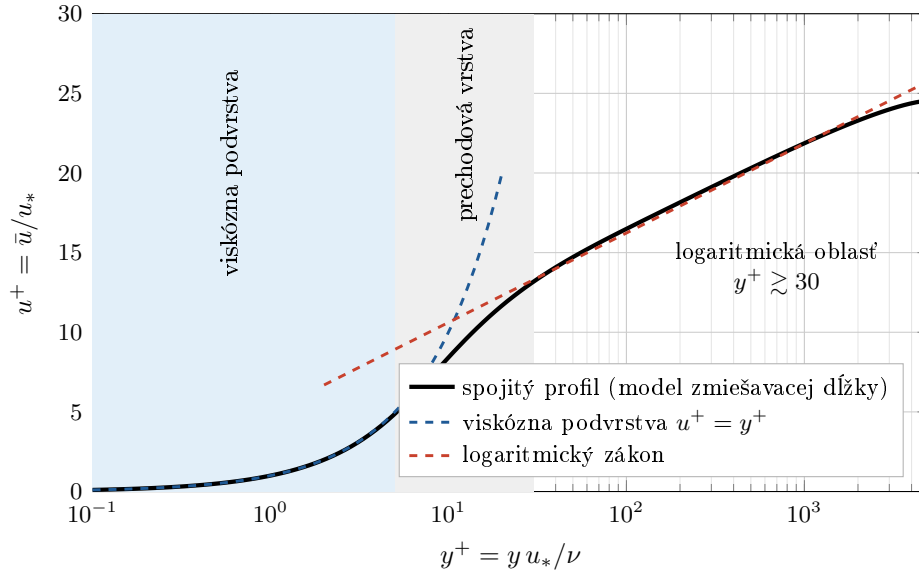
$$u^+ = y^+. \quad (9.16)$$

- **Prechodová (nárazníková) vrstva** ($5 < y^+ < 30$). Viskózne a turbulentné napätie sú porovnateľné. V tejto vrstve vzniká najviac turbulentnej energie.
- **Logaritmická oblasť** ($y^+ > 30$ až po asi 20 % polomeru potrubia alebo hrúbky medznej vrstvy). Prevláda turbulentné napätie. Zo zmiešavacej dĺžky $l = \kappa y$ a z podmienky $\tau \approx \tau_w$ dostaneme $d\bar{u}/dy = u_*/(\kappa y)$ a po integrácii *logaritmický zákon steny*

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B, \quad (9.17)$$

kde $\kappa \approx 0,41$ a $B \approx 5,0$ sú experimentálne konštanty pre hladkú stenu [1, 39].

- **Vonkajšia oblasť** (jadro prúdu). Profil sa od logaritmického zákona mierne odchyľuje a jeho tvar závisí od geometrie prúdu. Viskozita tu už nehrá rolu.



Obr. 9.8. Univerzálny rýchlostný profil pri stene. Plná čiara je spojitý profil vypočítaný modelom zmiešavacej dĺžky s tlmením pri stene, ktorý dobre vystihuje merania [39].

Hrúbka viskóznej podvrstvy je

$$\delta_v \approx \frac{5\nu}{u_*}. \quad (9.18)$$

Je nepriamo úmerná trecej rýchlosti, takže s rastúcou rýchlosťou prúdu sa znižuje. Hoci je veľmi tenká, zvyčajne omnoho menej ako 1 % priemeru potrubia, rozhoduje o trení aj o prestupe tepla. Práve v nej je rýchlostný a teplotný gradient najväčší.

Príklad 9.5 – Viskózna podvrstva v tepelnej sieti

Pre potrubie z pr. 9.2 ($D = 0,1$ m, voda 70°C , $v = 1$ m/s, $\lambda = 0,0182$) určte šmykové napätie na stene, treciu rýchlosť, hrúbku viskózne podvrstvy a hodnotu y^+ v osi potrubia.

Riešenie. Zo vzťahu $\tau_w = \Delta p D / (4L)$ a Darcyho–Weisbachovej rovnice vyplýva $\tau_w = \lambda \rho v^2 / 8$:

$$\tau_w = \frac{0,0182 \cdot 977,5 \cdot 1^2}{8} = 2,22 \text{ Pa}, \quad u_* = \sqrt{\frac{2,22}{977,5}} = 0,0477 \text{ m/s}.$$

Trecia rýchlosť je asi 5 % strednej rýchlosti. Hrúbka viskózne podvrstvy:

$$\delta_v = \frac{5 \cdot 0,413 \cdot 10^{-6}}{0,0477} = 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,043 \text{ mm}.$$

Je to menej ako 0,05 % priemeru potrubia. V osi potrubia je $y = R = 0,05$ m a $y^+ = 0,05 \cdot 0,0477 / 0,413 \cdot 10^{-6} = 5800$. ■

Poznámka

Hodnota y^+ je dôležitá pri numerických simuláciách. Ak má model turbulencie opísať prúdenie až k stene, musí mať prvá bunka výpočtovej siete $y^+ \approx 1$. Aby to nebolo potrebné, programy CFD často používajú *stenové funkcie*. Tie predpokladajú logaritmický profil (9.17) a vyžadujú, aby prvá bunka ležala v logaritmickom oblasti, zhruba $30 < y^+ < 300$. Kontrola y^+ je preto jedným z prvých krokov pri overovaní siete.

Logaritmický profil vetra

Aj atmosférická medzná vrstva nad zemským povrchom je turbulentná medzná vrstva pri stene. Terén je však drsný. Viskózna podvrstva v ňom nehrá rolu a logaritmický profil sa zapisuje pomocou *dĺžky drsnosti terénu* z_0 [24, 25]:

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}, \quad \frac{u(z)}{u(z_r)} = \frac{\ln(z/z_0)}{\ln(z_r/z_0)}. \quad (9.19)$$

Typické hodnoty sú $z_0 \approx 0,0002$ m pre vodnú hladinu, $0,03$ m pre otvorenú poľnohospodársku krajinu, $0,1$ m pre krajinu s roztrúsenými budovami a stromami a $0,5$ m až 1 m pre les a zástavbu [24]. Vzťah platí pri neutrálnej stabilite atmosféry. Je fyzikálne odôvodnenou alternatívou mocninového zákona (4.15).

Príklad 9.6 – Logaritmický profil vetra

Pre údaje z pr. 4.5 ($5,5$ m/s vo výške 10 m) odhadnite rýchlosť vetra vo výške náboja 100 m nad otvorenou krajinou so $z_0 = 0,03$ m. Určte aj treciu rýchlosť.

Riešenie. Podľa (9.19):

$$u(100) = 5,5 \cdot \frac{\ln(100/0,03)}{\ln(10/0,03)} = 5,5 \cdot \frac{8,11}{5,81} = 7,68 \text{ m/s}.$$

Trecia rýchlosť je

$$u_* = \frac{\kappa u(10)}{\ln(10/0,03)} = \frac{0,4 \cdot 5,5}{5,81} = 0,38 \text{ m/s}.$$

Mocninový zákon s $\alpha = 1/7$ dal 7,64 m/s. Pre otvorený terén sa oba prístupy zhodujú. Výkonová hustota vetra je úmerná u^3 , vo výške náboja je teda $(7,68/5,5)^3 = 2,7$ -krát väčšia ako vo výške 10 m. ■

9.10 Hydrodynamická medzná vrstva v potrubí

Pojem *medzná vrstva* zaviedol Prandtl v roku 1904. Pri obtekaní steny prúdom s veľkým Reynoldsovým číslom sa vplyv viskozity obmedzuje na tenkú vrstvu pri stene. V nej rýchlosť rastie od nuly na stene (podmienka ulpievania) na rýchlosť vonkajšieho prúdu. Mimo nej možno prúdenie považovať za neviskózne (odd. 8.13). Hrúbka medznej vrstvy δ sa obvykle definuje ako vzdialenosť od steny, kde rýchlosť dosiahne 99 % vonkajšej rýchlosti.

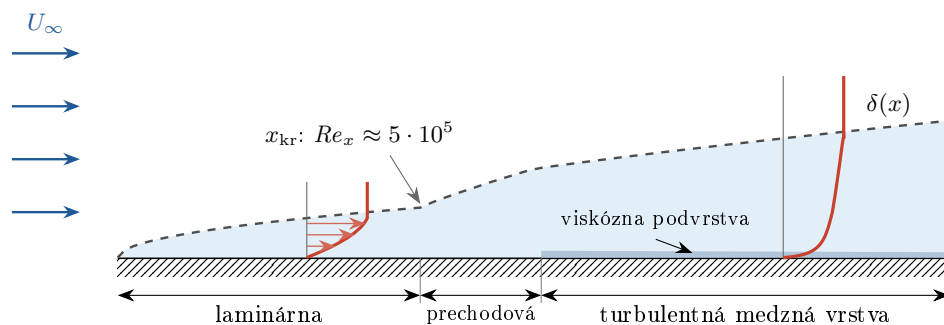
Najjednoduchším prípadom je rovinná doska obtekaná rovnobežným prúdom s rýchlosťou U_∞ (obr. 9.9). Od nábežnej hrany sa vytvára laminárna medzná vrstva, ktorej hrúbka rastie s odmocninou vzdialenosti x [1, 43]:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{4,91}{\sqrt{Re_x}}, \quad Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}. \quad (9.20)$$

Pri určitom Re_x sa laminárna medzná vrstva stane nestabilnou a po prechodovej oblasti sa zmení na turbulentnú. Pre hladkú dosku a málo turbulentný vonkajší prúd sa v inžinierskych výpočtoch používa kritická hodnota $Re_{x,kr} \approx 5 \cdot 10^5$ [1]. Turbulentná medzná vrstva je hrubšia a rastie rýchlejšie:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0,37}{Re_x^{1/5}}. \quad (9.21)$$

Pri jej spodnom okraji zostáva tenká viskózna podvrstva. Turbulentná medzná vrstva má pri stene strmší profil, a preto väčšie trenie aj prestup tepla.



Obr. 9.9. Vývoj medznej vrstvy na rovinnej doske. Hrúbka medznej vrstvy je pre názornosť výrazne zväčšená.

Medzná vrstva vo vstupnom úseku potrubia

Na vstupe do potrubia sa medzná vrstva vytvára po celom obvode steny (obr. 8.7). Postupne hrubne, až sa v osi spojí. Za touto *vstupnou (nábehovou) dĺžkou* je prúdenie hydrodynamicky plne vyvinuté a profil sa ďalej nemení. Pri laminárnom prúdení je vstupná dĺžka $L_e \approx 0,05 Re D$, teda až $115 D$ pri $Re = 2300$. Pri turbulentnom prúdení je omnoho kratšia [1]:

$$L_{e,t} \approx 1,359 D Re^{1/4}. \quad (9.22)$$

Pre $Re = 10^4$ až 10^6 vychádza $L_{e,t} \approx 14 D$ až $43 D$. V mnohých technických výpočtoch sa vplyv vstupu zanedbáva už za dĺžkou asi $10 D$ [1].

Rovnaký jav nastáva za každou poruchou: za kolenom, ventilom, čerpadlom alebo odbočkou. Rýchlostný profil je tam deformovaný, často s víriacou zložkou, a vyrovnáva sa na dĺžke desiatok priemerov. Preto výrobcovia prietokomerov a meračov tepla predpisujú pred meradlom a za ním *priame úseky* s určenou dĺžkou. Meradlo kalibrované pri plne vyvinutom profile by za kolenom meralo s chybou.

9.11 Hydraulicky hladké a drsné povrchy

Každý technický povrch má pod mikroskopom nerovnosti. Pri laminárnom prúdení drsnosť tlakovú stratu prakticky neovplyvňuje. Pri turbulentnom prúdení však rozhoduje, či nerovnosti zostanú ukryté vo viskóznej podvrstve, alebo z nej vyčnievajú.

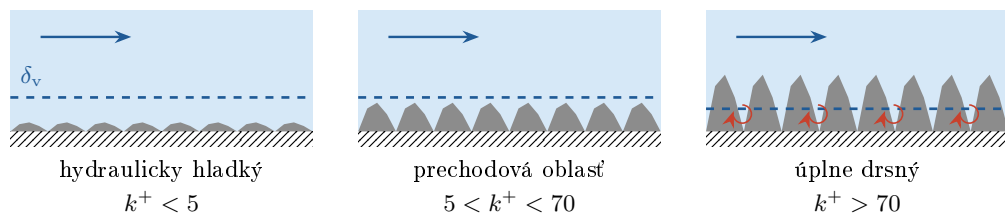
Rôzne tvary nerovností sa porovnávajú pomocou *ekvivalentnej drsnosti* k . Je to veľkosť zrn piesku, ktorý by v Nikuradseho pokusoch s rúrami s nalepeným pieskom spôsobil rovnaký súčiniteľ trenia [1, 44]. Pre nové rúry je k napríklad 0,0015 mm pre ťahané medené rúry, 0,045 mm pre oceľové, 0,26 mm pre liatinové a 0,9 mm až 9 mm pre betónové potrubie. Plastové a sklené rúry považujeme za hladké [1]. Podrobnejšie údaje uvádza kap. 10.

Drsnosť porovnávame s hrúbkou viskóznej podvrstvy pomocou bezrozmernej drsnosti

$$k^+ = \frac{k u_*}{\nu}, \quad (9.23)$$

ktorá je pomerom k a viskóznej dĺžky ν/u_* . Podľa jej hodnoty rozlišujeme tri režimy [43] (obr. 9.10):

- **hydraulicky hladká stena** ($k^+ < 5$): nerovnosti sú ukryté vo viskóznej podvrstve a trenie závisí len od Re ,
- **prechodová oblasť** ($5 < k^+ < 70$): nerovnosti čiastočne vyčnievajú, trenie závisí od Re aj od drsnosti,
- **úplne drsná stena** ($k^+ > 70$): za nerovnosťami sa odtrhávajú víriky, odpor tvoria najmä tlakové sily na nerovnostiach a trenie už nezávisí od viskozity, teda ani od Re .



Obr. 9.10. Vzťah drsnosti steny a hrúbky viskóznej podvrstvy δ_v (čiarkovane) v troch režimoch.

Pozor – častá chyba

„Hladká“ a „drsná“ nie sú vlastnosti materiálu, ale režimu prúdenia. Pri väčšej rýchlosti je viskózna podvrstva tenšia, takže tá istá rúra sa môže pri malej rýchlosti správať ako hladká a pri veľkej ako drsná. Drsnosť sa navyše mení počas prevádzky. Koróziou, inkrustáciou a usadeninami môže súčiniteľ trenia starého potrubia vzrásť aj niekoľkonásobne [1].

Príklad 9.7 – Je potrubie hydraulicky hladké?

Posúďte, či je oceľové potrubie DN 100 ($k = 0,045$ mm) z pr. 9.5 hydraulicky hladké pri rýchlostiach 0,3, 1 a 3 m/s. Súčinitele trenia podľa kap. 10 sú 0,021 1, 0,018 2 a 0,017 0. Posúďte aj rúru z PE s $k = 0,007$ mm pri 1 m/s.

Riešenie. Trecia rýchlosť je $u_* = v\sqrt{\lambda/8}$. Pre $v = 0,3$ m/s:

$$u_* = 0,3\sqrt{0,0211/8} = 0,0154 \text{ m/s}, \quad k^+ = \frac{0,045 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0154}{0,413 \cdot 10^{-6}} = 1,7.$$

Rovnako pre 1 m/s dostaneme $u_* = 0,0477$ m/s a $k^+ = 5,2$, pre 3 m/s $u_* = 0,138$ m/s a $k^+ = 15$. Oceľové potrubie je pri malej rýchlosti hydraulicky hladké, pri 1 m/s je na hranici a pri 3 m/s je v prechodovej oblasti. Rúra z PE má pri 1 m/s $k^+ = 0,8$ a je hydraulicky hladká. ■

9.12 Energetické dôsledky turbulencie

Turbulencia má pre energetické zariadenia dve tváre. Intenzívne miešanie zvyšuje prenos hybnosti, a teda trenie a tlakové straty. Rovnakým mechanizmom však zvyšuje aj prenos tepla a látky. Tab. 9.1 zhrňa hlavné rozdiely oboch režimov.

Tabuľka 9.1. Porovnanie laminárneho a turbulentného prúdenia v potrubí.

vlastnosť	laminárne	turbulentné
Reynoldsovo číslo	$Re < 2300$	$Re > 4000$
rýchlostný profil	parabolický, $u_{\max} = 2v$	plochý, $u_{\max} \approx 1,2v$
prenos naprieč prúdom	molekulový (pomalý)	vírmí (rýchly)
súčiniteľ trenia	$\lambda = 64/Re$	$\lambda = f(Re, k/D)$
vplyv drsnosti	žiadny	rastie s Re
tlaková strata	$\Delta p \propto v$	$\Delta p \propto v^{1,75}$ až v^2
prestup tepla	$Nu = \text{konšt.}$	$Nu \propto Re^{0,8}$
výpočet	presný (analytický)	empirický, modely turbulencie

Obr. 9.11 ukazuje obe tváre turbulencie pre vodu v rúre s priemerom 20 mm. Pri prechode do turbulencie tlakový spád aj súčiniteľ prestupu tepla prudko vzrastú. Tlakový spád potom rastie s mocninou rýchlosti 1,75 (hladká rúra) až 2 (drsna rúra). Čerpací výkon $P = Q \Delta p$ rastie ešte o jednu mocninu rýchlejšie, teda s $Q^{2,75}$ až Q^3 . Súčiniteľ prestupu tepla však rastie len s $v^{0,8}$. Pri návrhu výmenníkov tepla, kolektorov a zemných vrtov preto hľadáme kompromis. Chceme dostatočne turbulentné prúdenie pre dobrý prestup tepla, ale nie zbytočne veľkú rýchlosť, ktorá by zvýšila spotrebu elektriny čerpadla.

Príklad 9.8 – Stojí sa za to dosiahnuť turbulenciu v zemnom vrte?

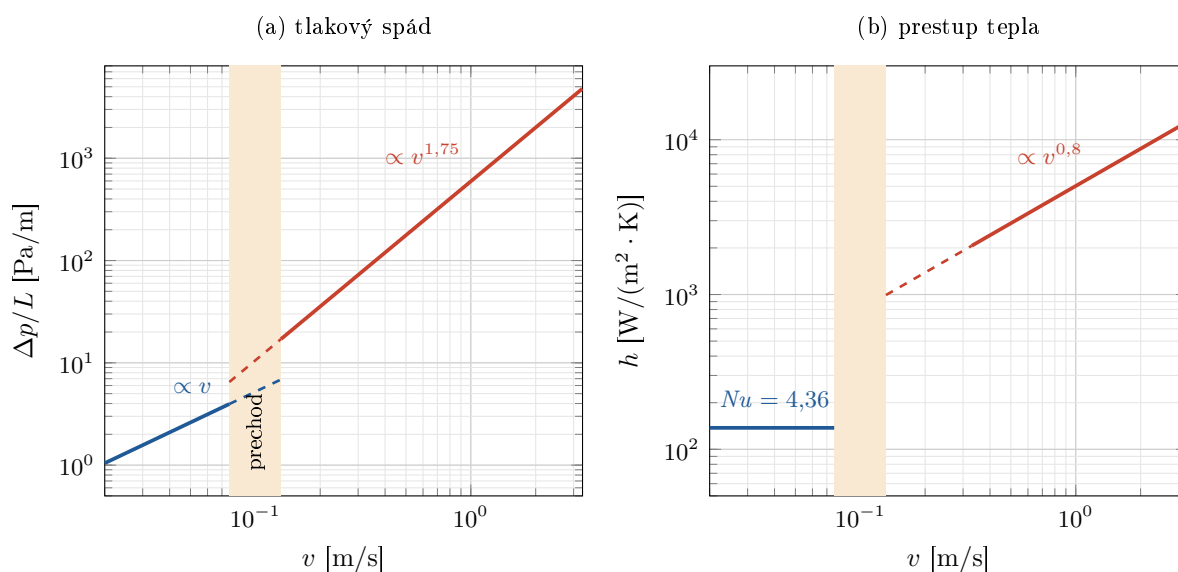
V zemnom vrte z pr. 8.1 ($D = 26$ mm, dĺžka rúrky 200 m, 40 % PG pri 10 °C, $\rho = 1042$ kg/m³, $\mu = 7,22$ mPa · s) je pri prietoku 0,2 L/s $Re = 1414$, $\Delta p = 25,7$ kPa a hydraulický výkon 5,1 W. Aký prietok, tlaková strata a hydraulický výkon by boli potrebné na dosiahnutie $Re = 4000$? Použite Blasiov vzťah $\lambda = 0,3164 Re^{-1/4}$.

Riešenie. Potrebná rýchlosť je $v = Re \mu / (\rho D) = 4000 \cdot 7,22 \cdot 10^{-3} / (1042 \cdot 0,026) = 1,07$ m/s a prietok $Q = 0,57$ L/s, teda 2,8-krát viac. Súčiniteľ trenia je $\lambda = 0,3164 \cdot 4000^{-1/4} = 0,0398$

a

$$\Delta p = 0,0398 \cdot \frac{200}{0,026} \cdot \frac{1042 \cdot 1,07^2}{2} = 181 \text{ kPa}, \quad P = Q \Delta p = 0,57 \cdot 10^{-3} \cdot 181 \cdot 10^3 = 102 \text{ W}.$$

Hydraulický výkon by vzrástol asi dvadsaťkrát. Tepelný odpor vrtu tvorí okrem prestupu tepla do kvapaliny aj vedenie tepla cez stenu rúrky, výplň vrtu a horninu. Zlepšenie prestupu tepla sa preto na celkovom výkone vrtu prejaví len čiastočne. V praxi sa preto vyžaduje len to, aby prúdenie pri návrhovom stave nebolo hlboko v laminárnej oblasti. Voľbou menšej koncentrácie glykolu alebo menšieho priemeru rúrky sa Re zvýši lacnejšie ako zväčšením prietoku. ■



Obr. 9.11. Tlakový spád (a) a súčiniteľ prestupu tepla (b) pre vodu s teplotou 40 °C v hladkej rúre s $D = 20$ mm. Oranžovo je vyznačená prechodová oblasť, čiarkovane extrapolácia vzťahov mimo ich platnosti.

Ďalšie energetické dôsledky turbulencie v zariadeniach OZE:

- **Výmenníky tepla** sa navrhujú tak, aby v nich bolo turbulentné prúdenie. Doskové výmenníky majú vlnité dosky, ktoré turbulenciu vyvolávajú už pri malých Re . V rúrkových výmenníkoch sa niekedy používajú vložky (turbulátory).
- **Veterné turbíny** sú ovplyvnené turbulenciou vetra. Zvyšuje únavové zaťaženie, ale urýchľuje obnovu rýchlosti v úplave (odd. 9.6).
- **Vodné turbíny a čerpadlá** pracujú pri veľmi veľkých Re . Turbulentné straty v nich rastú najmä pri prevádzke mimo optimálneho bodu, keď sa prúd odtrháva od lopatiek (kap. 13 a 14).
- **Miešanie** v bioplynových reaktoroch, pri spaľovaní biomasy a pri riedení prímiesí v ovzduší sa uskutočňuje turbulenciou. Molekulová difúzia by bola nepoužiteľne pomalá.
- **Akumulačné zásobníky** naopak potrebujú turbulentné miešanie potlačiť, aby zostala zachovaná stratifikácia (obr. 9.7).

Zhrnutie kapitoly

- Reynoldsov pokus ukázal dva režimy prúdenia. O režime rozhoduje Reynoldsovo číslo $Re = vD/\nu$. V potrubí je prúdenie pri $Re < 2300$ laminárne a pri $Re > 4000$ turbulentné, medzi nimi je prechodová oblasť s intermitenciou.
- Laminárne prúdenie je usporiadané. Prenos hybnosti a tepla naprieč prúdom je molekulový, $\lambda = 64/Re$ a Nu je konštantné.
- Turbulentné prúdenie je nepravidelné, trojrozmerné, vírivé a silne difúzne. Energia prechádza kaskádou od veľkých vírov k najmenším s rozmerom $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, kde sa disipuje.
- Okamžitú rýchlosť rozkladáme na strednú hodnotu a fluktuáciu, $u = \bar{u} + u'$. Veľkosť fluktuácií vyjadruje intenzita turbulencie $I = u'_{\text{ef}}/\bar{u}$.
- Priemerovaním rovníc vzniká Reynoldsovo napätie $-\rho \overline{u'v'}$, teda tok hybnosti prenášaný vírmi. Modely turbulencie ho vyjadrujú turbulentnou viskozitou μ_t .
- Pri stene platí univerzálny profil: viskózna podvrstva $u^+ = y^+$ pre $y^+ < 5$ a logaritmický zákon pre $y^+ > 30$. Tretia rýchlosť je $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ a hrúbka podvrstvy $\delta_v \approx 5\nu/u_*$.
- Medzná vrstva na doske je laminárna do $Re_x \approx 5 \cdot 10^5$. V potrubí je turbulentné prúdenie plne vyvinuté približne za $10D$ až $40D$.
- Stena je hydraulicky hladká pri $k^+ < 5$ a úplne drsná pri $k^+ > 70$. Závisí to od drsnosti aj od rýchlosti.
- Turbulencia zvyšuje tlakové straty ($\Delta p \propto v^{1,75}$ až v^2), ale aj prestup tepla a miešanie. Pri návrhu treba nájsť kompromis medzi prestupom tepla a čerpacím výkonom.

Kontrolné otázky

1. Opíšte Reynoldsov pokus. Ako sa správa prúžok farbiva pri laminárnom, prechodovom a turbulentnom prúdení?
2. Prečo o režime prúdenia nerozhoduje samotná rýchlosť, ale Reynoldsovo číslo? Aký je jeho fyzikálny význam?
3. Prečo kritické Reynoldsovo číslo nie je presná konštanta? Od čoho závisí?
4. Čo je intermitencia? Prečo by návrhový stav nemal ležať v prechodovej oblasti?
5. Vymenujte charakteristické vlastnosti turbulencie. Prečo je turbulencia vlastnosťou prúdenia, a nie tekutiny?
6. Vysvetlite energetickú kaskádu. Kde sa v turbulentnom prúdení energia disipuje na teplo?
7. Čo je Reynoldsov rozklad a časová stredná hodnota? Aké podmienky musí spĺňať doba priemerovania?
8. Prečo je $\overline{u'v'}$ v prúde pri stene záporné? Aký fyzikálny význam má Reynoldsovo napätie?
9. Čím sa líši turbulentná viskozita od dynamickej viskozity tekutiny?
10. Opíšte oblasti univerzálného rýchlostného profilu pri stene. Prečo je viskózna podvrstva dôležitá, hoci je veľmi tenká?

11. Čo znamená, že je stena hydraulicky hladká? Môže sa to isté potrubie správať raz ako hladké a raz ako drsné?
12. Prečo sa pred prietokomermi a meračmi tepla vyžadujú priame úseky potrubia?
13. Prečo sa v absorbéri kolektora snažíme o turbulentné prúdenie a v akumuláčnom zásobníku naopak turbulentné miešanie potláčame?

Úlohy na precvičenie

1. Voda s teplotou 10°C prúdi potrubím s priemerom 25 mm rýchlosťou 0,1 m/s. Určte režim prúdenia. Pri akej rýchlosti začne prechodová oblasť a pri akej bude prúdenie turbulentné? [$Re = 1910$, laminárne; 0,12 m/s; 0,21 m/s]
2. Vzduch s teplotou 20°C prúdi kanálom vzduchového kolektora s prierezom $1\text{ m} \times 0,05\text{ m}$ rýchlosťou 2 m/s. Určte hydraulický priemer a Reynoldsovo číslo. [95 mm; 12 500]
3. Solárny okruh s rúrkou s vnútorným priemerom 16 mm je naplnený zmesou so 40 % PG. Čerpadlo dodáva 2 L/min. Určte Re pri -20°C (zimný rozbeh) a pri 90°C . [57; 3 520]
4. Rýchlosti vetra zaznamenané v sekundových intervaloch sú 6,1; 7,4; 5,2; 6,8; 8,3; 5,9; 6,6; 7,1 m/s. Určte strednú rýchlosť, efektívnu hodnotu fluktuácií a intenzitu turbulencie. [6,68 m/s; 0,90 m/s; 0,135]
5. Pri prúdení vody s teplotou 20°C je šmykové napätie na stene 5 Pa. Určte treciu rýchlosť, hrúbku viskózne podvrstvy a vzdialenosť od steny, kde začína logaritmická oblasť ($y^+ = 30$). [0,070 8 m/s; 0,071 mm; 0,43 mm]
6. Odhadnite Kolmogorovovu mierku pri disipácii $\varepsilon = 1\text{ W/kg}$ pre vodu a vzduch pri 20°C . [0,032 mm; 0,24 mm]
7. Krycie sklo kolektora dĺžky 2 m je obtekané vetrom rýchlosťou 5 m/s rovnobežne s povrchom (vzduch 20°C). V akej vzdialenosti od hrany sa medzná vrstva stane turbulentnou? Aká je hrúbka laminárnej medznej vrstvy vo vzdialenosti 1 m? [1,52 m; 8,6 mm]
8. Určte turbulentnú vstupnú dĺžku v potrubí s priemerom 50 mm pri $Re = 10^5$ a vyjadrite ju v násobkoch priemeru. [1,21 m; 24 D]
9. Vo výške 10 m bola nameraná stredná rýchlosť vetra 6 m/s. Terén má dĺžku drsnosti $z_0 = 0,1\text{ m}$. Určte rýchlosť vetra vo výške 120 m podľa logaritmického profilu. [9,24 m/s]
10. Prietok v potrubí sa zvýši o 20 %. Koľkokrát vzrastie čerpací výkon potrebný na prekonanie trenia pri laminárnom prúdení, pri turbulentnom prúdení v hladkej rúre ($\Delta p \propto v^{1,75}$) a v úplne drsnej rúre? [1,44; 1,65; 1,73]
11. Pri turbulentnom prúdení v hladkej rúre sa rýchlosť zdvojnásobí. Koľkokrát vzrastie súčiniteľ prestupu tepla podľa (9.13) a koľkokrát čerpací výkon? [1,74; 6,7]
12. Pre liatinové potrubie ($k = 0,26\text{ mm}$) s vodou pri 20°C , v ktorom je trecia rýchlosť 0,1 m/s, určte k^+ a režim drsnosti. [$k^+ = 26$, prechodová oblasť]

Kapitola 10

Prúdenie v potrubiach a tlakové straty

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent určí hydraulický priemer ľubovoľného prierezu, vypočíta súčiniteľ trenia pre laminárne aj turbulentné prúdenie a tlakovú stratu potrubia podľa Darcyho–Weisbachovej rovnice. Vie používať Colebrookovu–Whiteovu rovnicu, Moodyho diagram a explicitné aproximácie. Rieši tri základné typy úloh: výpočet tlakovej straty, prietoku a potrebného priemeru. Určí čerpací výkon a ročnú spotrebu elektriny a navrhne priemer potrubia s ohľadom na technické obmedzenia a ekonomiku.

Kľúčové pojmy

menovitá svetlosť DN, vnútorný priemer, hydraulický priemer, plne vyvinuté prúdenie, tlakový gradient, Darcyho–Weisbachova rovnica, súčiniteľ trenia λ , relatívna drsnosť, Colebrookova–Whiteova rovnica, Moodyho diagram, Haalandov a Swameeho–Jainov vzťah, stratová výška, merná tlaková strata, ekonomická rýchlosť, optimálny priemer

Potrubia sú „cievnym systémom“ energetických zariadení. Vedú teplonosnú látku z kolektorov do zásobníka, vodu z vrtu do výparníka tepelného čerpadla, teplú vodu z kotolne na biomasu k odberateľom a vodu z nádrže k turbíne malej vodnej elektrárne. V každom z týchto prípadov sa časť mechanickej energie stratí trením. Túto stratu musí pokryť čerpadlo, alebo sa o ňu zmenší spád turbíny.

V kap. 6 sme straty zapísali v tvare (6.13) a súčiniteľ trenia λ sme zatiaľ považovali za známy. V kap. 8 sme ho odvodili pre laminárne prúdenie a v kap. 9 sme vysvetlili, prečo pri turbulentnom prúdení závisí aj od drsnosti steny. V tejto kapitole ukážeme, ako λ určiť pre ľubovoľný prípad a ako z neho vypočítať tlakovú stratu, čerpací výkon a vhodný priemer potrubia. Miestnym odporom sa venuje kap. 11, sieťam potrubí kap. 12. Výklad nadväzuje na [1, 5].

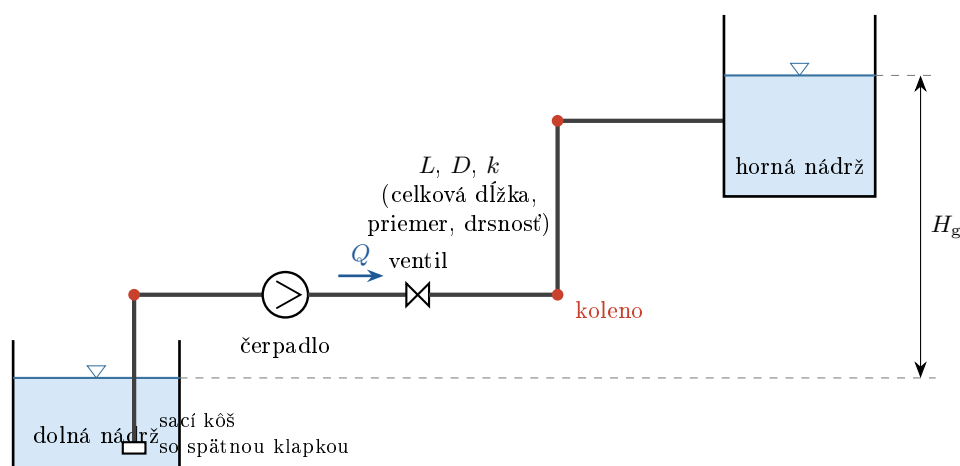
Na zamyslenie

Kotolňa na biomasu má dodávať 300 kW tepla do budovy vzdialenej 200 m. Projektant zvažuje predizolované potrubie DN 50, DN 65 alebo DN 80. Menšie potrubie je lacnejšie a má menšie tepelné straty. Koľko elektriny však spotrebuje čerpadlo? A podľa čoho sa rozhodnúť, ak väčšie potrubie stojí o desiatky tisíc eur viac?

10.1 Geometria potrubného systému

Potrubný systém tvoria rovné úseky potrubia, tvarovky (kolená, odbočky, redukcie), armatúry (ventily, klapky, filtre), stroje (čerpadlá, turbíny) a zariadenia (výmenníky, kolektory, zásobníky). Jednoduchý systém s čerpadlom ukazuje obr. 10.1. Pre hydraulický výpočet potrebujeme poznať:

- dĺžky rovných úsekov L a ich vnútorné priemery D ,
- materiál a stav vnútorného povrchu, teda drsnosť k ,
- počet a druh tvaroviek a armatúr (kap. 11),
- výškové polohy začiatku a konca a tlaky v nich,
- teplotu látky a jej teplotu, teda ρ a ν .



Obr. 10.1. Jednoduchý potrubný systém: čerpadlo dopravuje vodu z dolnej do hornej nádrže. Straty vznikajú trením po dĺžke potrubia a v miestnych odporoch (sací koš, koleno, ventil, vtok do nádrže).

Potrubia sa označujú *menovitou svetlosťou* DN (*diamètre nominal*). Je to približný vnútorný priemer v milimetroch, nie presný rozmer. Pre výpočet treba vždy použiť skutočný vnútorný priemer, ktorý závisí od vonkajšieho priemeru a hrúbky steny. Tie sú dané normou a tlakovou triedou. Plastové a medené rúry sa namiesto DN označujú vonkajším priemerom a hrúbkou steny, napríklad Cu 18 × 1 alebo PE 32 × 2,9. Orientačné rozmery bežných rúr uvádza tab. 10.1.

10.2 Hydraulický priemer

Vzťahy pre tlakovú stratu boli odvodené pre kruhové potrubie. Pre iné prierezy ich používame s *hydraulickým priemerom* (rov. (9.3)):

$$D_h = \frac{4A}{O}, \quad (10.1)$$

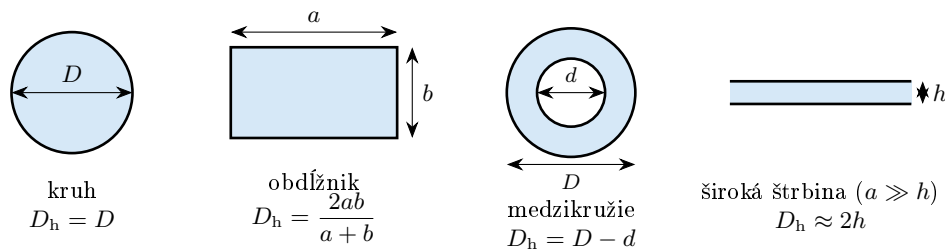
kde A je plocha prúdového prierezu a O jeho *omočený obvod*, teda dĺžka steny, ktorej sa tekutina dotýka. Zmysel definície vyplýva z rovnováhy síl na úsek potrubia dĺžky L . Tlaková sila $\Delta p A$ sa vyrovnáva s trecou silou $\tau_w O L$ na stene, preto

$$\Delta p = \frac{4 \tau_w L}{D_h}. \quad (10.2)$$

Tabuľka 10.1. Orientačné rozmery bežných rúr. Presné hodnoty treba prevziať z príslušnej normy alebo katalógu výrobcu.

oceľové rúry (stredná rada)				medené a PE rúrky		použitie
DN	d_e [mm]	s [mm]	D [mm]	rúrka	D [mm]	
15	21,3	2,6	16,1	Cu 15 × 1	13	solárne okruhy
20	26,9	2,6	21,7	Cu 18 × 1	16	solárne okruhy
25	33,7	3,2	27,3	Cu 22 × 1	20	vykurovanie
32	42,4	3,2	36,0	Cu 28 × 1,5	25	vykurovanie
40	48,3	3,2	41,9	PE-X 16 × 2	12	podlahové vykurovanie
50	60,3	3,6	53,1	PE 32 × 2,9	26,2	zemné vrty
65	76,1	3,6	68,9	PE 40 × 3,7	32,6	zemné vrty
80	88,9	4,0	80,9	PE 63 × 5,8	51,4	zberné potrubia
100	114,3	4,5	105,3			
125	139,7	5,0	129,7			
150	165,1	5,0	155,1			

Pre kruhové potrubie ($A = \pi D^2/4$, $O = \pi D$) je $D_h = D$ a dostaneme známy vzťah (8.8). Hydraulický priemer bežných prierezov ukazujú obr. 10.2.

**Obr. 10.2.** Hydraulický priemer bežných prierezov.

Pri turbulentnom prúdení dáva použitie D_h presnosť okolo 15 %, čo pre technické výpočty postačuje. Horšie výsledky dáva pre veľmi ploché alebo ostrohranné prierezy a pri laminárnom prúdení. Pre laminárne prúdenie v nekruhových prierezoch sa namiesto $64/Re$ používajú presné hodnoty súčinu λRe , napríklad $\lambda Re = 96$ pre širokú štrbinu (rov. (8.7)) [1].

Príklad 10.1 – Hydraulický priemer medzikružia a kanála

(a) Koaxiálna zemná sonda má vonkajšiu rúru s vnútorným priemerom 102 mm. V nej je stredová rúra s vonkajším priemerom 63 mm. Určte hydraulický priemer medzikružia. (b) Vzduchový kolektor má kanál s prierezom 1,2 m × 40 mm. Určte jeho hydraulický priemer.
Riešenie. (a) $A = \pi(D^2 - d^2)/4$, $O = \pi(D + d)$, teda $D_h = D - d = 102 - 63 = 39$ mm. (b) $D_h = 2ab/(a + b) = 2 \cdot 1,2 \cdot 0,04/1,24 = 0,0774$ m. Je to takmer dvojnásobok výšky kanála ($2h = 80$ mm), ako zodpovedá širokej štrbine. ■

10.3 Plne vyvinuté prúdenie

Za vstupným úsekom (odd. 9.10) sa rýchlostný profil v potrubí stálého prierezu už nemení. Takéto prúdenie nazývame *plne vyvinuté*. Pre jeho výpočet platí:

- stredná rýchlosť $v = Q/A$ je vo všetkých prierezoch rovnaká,
- rýchlostný profil, a teda aj šmykové napätie na stene τ_w , sa pozdĺž potrubia nemenia,

- kinetická energia sa nemení, straty sa kryjú len poklesom tlaku, prípadne polohovej energie.

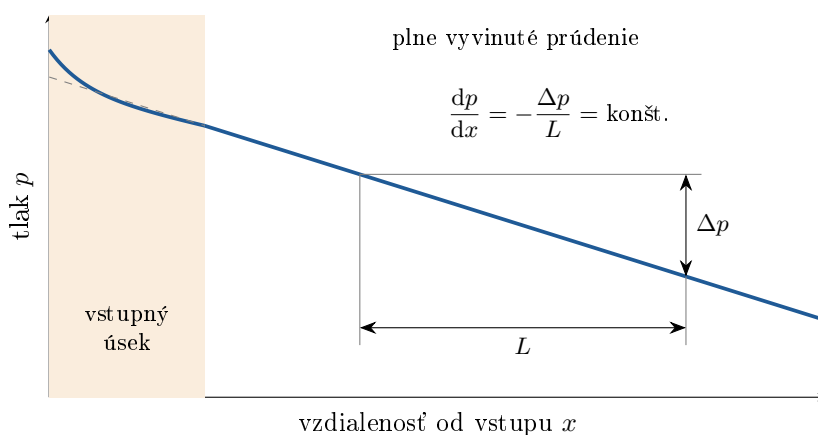
Vo vstupnom úseku je tlaková strata väčšia, lebo profil sa tam pretvára a šmykové napätie pri tenkej medznej vrstve je väčšie (obr. 10.3). V dlhých potrubiach tvorí vstupný úsek len malú časť dĺžky, a preto sa vo výpočtoch zvyčajne zanedbáva alebo zahŕňa do miestnej straty vtoku (kap. 11). V krátkych potrubíach, napríklad v rúrkach výmenníkov tepla, však jeho vplyv zanedbať nemožno.

10.4 Tlakový gradient v potrubí

Pri plne vyvinutom prúde vo vodorovnom potrubí klesá tlak pozdĺž potrubia lineárne (obr. 10.3). Tlakový gradient

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p_z}{L} = -\frac{4\tau_w}{D} \quad (10.3)$$

je konštantný. Jeho absolútna hodnota $\Delta p_z/L$ [Pa/m] sa v projekčnej praxi nazýva *merná tlaková strata* a je jedným z hlavných návrhových parametrov potrubia (odd. 10.15).



Obr. 10.3. Priebeh tlaku pozdĺž vodorovného potrubia. Vo vstupnom úseku klesá tlak rýchlejšie, za ním lineárne.

V naklonenom potrubí sa na zmene tlaku podieľa aj tiaž. Z rozšírenej energetickej rovnice (6.16) pre $v_1 = v_2$ a bez strojov vyplýva

$$p_1 - p_2 = \rho g (z_2 - z_1) + \Delta p_z. \quad (10.4)$$

Nameraný rozdiel tlakov teda nie je tlaková strata, kým neodpočítame hydrostatický rozdiel. Pri prúde nadol môže tlak v smere prúdenia dokonca rásť. Tlakovú stratu však vždy určuje pokles *piezometrickej výšky* $z + p/(\rho g)$ (odd. 6.14).

Pozor – častá chyba

Diferenčný manometer pripojený k dvom bodom potrubia s rôznou výškou meria priamo Δp_z len vtedy, ak sú obe prepojovacie hadičky naplnené rovnakou tekutinou ako potrubie. Hydrostatický tlak v hadičkách potom práve vyrovná rozdiel $\rho g (z_2 - z_1)$ v potrubí (kap. 3).

10.5 Darcyho–Weisbachova rovnica

Tlaková strata trením po dĺžke v plne vyvinutom prúde závisí od strednej rýchlosti v , priemeru D , dĺžky L , hustoty ρ , viskozity μ a drsnosti steny k . Pretože Δp_z je úmerná dĺžke, rozmerová analýza vedie na vzťah

$$\boxed{\Delta p_z = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho v^2}{2}} \quad \text{alebo} \quad \boxed{h_z = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}} \quad (10.5)$$

kde bezrozmerný súčiniteľ trenia λ môže závisieť len od bezrozmerných parametrov:

$$\lambda = f\left(Re, \frac{k}{D}\right). \quad (10.6)$$

Toto je *Darcyho–Weisbachova rovnica*. Je pomenovaná po francúzskom inžinierovi H. Darcym a nemeckom profesorovi J. Weisbachovi, ktorí ju sformulovali v polovici 19. storočia [1]. Platí pre laminárne aj turbulentné prúdenie, pre kvapaliny aj pre plyny pri malých zmenách hustoty. Všetka fyzika je skrytá v súčiniteli λ .

Z porovnania s (10.2) vyplýva súvislosť súčiniteľa trenia so šmykovým napätím na stene, ktorú sme využili v kap. 9:

$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho v^2}. \quad (10.7)$$

Ak rýchlosť vyjadríme z prietoku, $v = 4Q/(\pi D^2)$, dostaneme

$$\Delta p_z = \frac{8\lambda\rho L}{\pi^2} \frac{Q^2}{D^5}. \quad (10.8)$$

Tento tvar ukazuje dve kľúčové závislosti, ktoré sme spomenuli už v kap. 1. Pri danom priemere rastie strata približne s druhou mocninou prietoku. Pri danom prietoku klesá približne s piatou mocninou priemeru. Keďže λ s rastúcim Re mierne klesá, sú skutočné exponenty trochu menšie, pri hladkých rúrach asi $Q^{1,75}$ a $D^{-4,75}$.

Pozor – častá chyba

V americkej a britskej literatúre sa niekedy používa *Fanningov* súčiniteľ trenia $f_F = \tau_w/(\rho v^2/2)$, ktorý je štyrikrát menší ako Darcyho súčiniteľ: $\lambda = 4f_F$. Pre laminárne prúdenie je $f_F = 16/Re$. Pred použitím vzťahu alebo diagramu z cudzieho zdroja treba overiť, ktorý súčiniteľ sa v ňom používa. V tejto knihe používame výhradne Darcyho súčiniteľ λ , ktorý [1] označuje f .

10.6 Darcyho súčiniteľ trenia λ

Závislosť (10.6) sa nedá odvodiť teoreticky, s výnimkou laminárneho prúdenia. Pre turbulentné prúdenie bola určená meraním. Najznámejšie sú pokusy J. Nikuradseho z roku 1933 s rúrami, na ktorých stenu bol nalepený piesok s presne definovanou veľkosťou zrn [44]. Podľa Re a k/D rozlišujeme tieto oblasti (pozri aj odd. 9.11):

1. **Laminárna oblasť** ($Re < 2300$): $\lambda = 64/Re$, drsnosť nemá vplyv.
2. **Prechodová oblasť** ($2300 < Re < 4000$): λ je neurčité (odd. 9.4).

3. **Hydraulicky hladké potrubie:** drsnosť je ukrytá vo viskózne podvrstve a $\lambda = f(Re)$. Pre $4000 < Re < 10^5$ platí jednoduchý Blasiov vzťah

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{1/4}}, \quad (10.9)$$

pre väčšie Re Prandtlov vzťah $1/\sqrt{\lambda} = 2 \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8$ [1].

4. **Prechodová oblasť drsnosti:** $\lambda = f(Re, k/D)$. Do tejto oblasti patrí väčšina technických potrubí.
5. **Úplne drsné potrubie** (oblasť kvadratického odporu): $\lambda = f(k/D)$ nezávisí od Re a tlaková strata je presne úmerná v^2 . Platí

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{k/D}{3,7}. \quad (10.10)$$

Všetky tri turbulentné oblasti spája jediná rovnica, ktorej sa venuje odd. 10.9.

10.7 Laminárne prúdenie: $\lambda = 64/Re$

Pre laminárne prúdenie v kruhovom potrubí sme v kap. 8 odvodili presný vzťah $\lambda = 64/Re$ (rov. (8.12)). Dosadením do (10.5) dostaneme Hagenov–Poiseuilleov zákon $\Delta p_z = 32\mu Lv/D^2$ (rov. (8.11)). Z neho plynú dôležité vlastnosti laminárneho prúdenia:

- tlaková strata je úmerná prvej mocnine prietoku a hydraulický výkon jeho druhej mocnine,
- strata je priamo úmerná dynamickej viskozite. Pri nemrznúcich zmesiach, ktorých viskozita sa s poklesom teploty zväčšuje niekoľkonásobne, rastie v rovnakom pomere,
- drsnosť steny nemá vplyv.

Pre nekrhové prierezy platí $\lambda = C/Re_{D_h}$, kde konštanta C závisí od tvaru prierezu. Pre štvorec je $C = 56,9$, pre obdĺžnik s pomerom strán 1 : 4 je $C = 72,9$ a pre širokú štrbinu $C = 96$ [1].

10.8 Relatívna drsnosť

Pri turbulentnom prúdení závisí súčiniteľ trenia od *relatívnej drsnosti* k/D , teda od pomeru ekvivalentnej drsnosti steny (odd. 9.11) a priemeru potrubia. Tá istá drsnosť má v potrubí malého priemeru väčší vplyv ako vo veľkom. Hodnoty ekvivalentnej drsnosti bežných materiálov uvádza tab. 10.2.

Tabuľkové hodnoty platia pre nové rúry. Počas prevádzky sa drsnosť mení koróziou, inkrustáciou a usadeninami. Súčiniteľ trenia starých potrubí môže byť niekoľkonásobne väčší [1]. Pri návrhu dlhodobu prevádzkovaných systémov, napríklad privádzačov MVE a zásobovacích potrubí, sa preto uvažuje so zväčšenou drsnosťou. V uzavretých vykurovacích a solárnych okruhoch s upravenou vodou alebo s inhibovanou nemrznúcou zmesou je starnutie pomalé.

10.9 Colebrookova–Whiteova rovnica

C. F. Colebrook v spolupráci s C. M. Whiteom spojil v roku 1939 vzťahy pre hladké a úplne drsné potrubie do jedinej rovnice, ktorá opisuje aj prechodovú oblasť drsnosti [45]:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)} \quad (Re > 4000). \quad (10.11)$$

Tabuľka 10.2. Ekvivalentná drsnosť nových rúr [1, tab. 8-2] a orientačné hodnoty pre plastové a staré rúry. Neistota hodnôt môže byť až 60 %.

materiál a stav povrchu	k [mm]
sklo, plasty (PE, PE-X, PP, PVC)	0 (hladké) až 0,007
ťahané rúrky z medi a mosadze	0,0015
nehrdzavejúca oceľ	0,002
hladená guma	0,01
oceľ, nová (bezšvová, zváraná)	0,045
kujné železo	0,046
pozinkovaná oceľ	0,15
liatina	0,26
drevené potrubie	0,5
betón	0,9 až 9
oceľ skorodovaná, s usadeninami (orientačne)	0,2 až 1 a viac

Logaritmus je dekadický. Pre $k = 0$ prejde rovnica na Prandtlov vzťah pre hladké potrubie, pre $Re \rightarrow \infty$ na vzťah (10.10) pre úplne drsné potrubie. Rovnica bola odvodená pre technické rúry s nerovnomernou drsnosťou. Preto opisuje prechodovú oblasť plynulejšie ako Nikuradseho pokusy s pieskom. Je dnes štandardom pre výpočet potrubí a presnosť výsledkov je asi 15 % [1].

Rovnica je *implicitná*: neznáma λ je na oboch stranách. Rieši sa iteráciou. Zvolíme počiatočný odhad λ_0 , dosadíme ho na pravú stranu a vypočítame nové λ_1 . Postup opakujeme, kým sa hodnoty nezhodujú na požadovaný počet číslíc. Pri dobrom odhade (napríklad z Haalandovho vzťahu, odd. 10.11) stačia dve až tri iterácie. V tabuľkovom procesore sa dá použiť nástroj na hľadanie riešenia, v Pythone napríklad funkcia `scipy.optimize.brentq`.

Príklad 10.2 – Tlaková strata oceleového potrubia

Oceleovým potrubím DN 50 ($D = 53,1$ mm, $k = 0,045$ mm) s dĺžkou 120 m preteká 4 L/s vody s teplotou 60 °C ($\rho = 983,3$ kg/m³, $\nu = 0,475 \cdot 10^{-6}$ m²/s). Určte súčiniteľ trenia, tlakovú stratu, stratovú výšku a hydraulický výkon potrebný na jej prekonanie.

Riešenie. Rýchlosť a Reynoldsovo číslo:

$$v = \frac{4 \cdot 0,004}{\pi \cdot 0,0531^2} = 1,806 \text{ m/s}, \quad Re = \frac{1,806 \cdot 0,0531}{0,475 \cdot 10^{-6}} = 201\,900.$$

Prúdenie je turbulentné. Relatívna drsnosť je $k/D = 0,045/53,1 = 8,47 \cdot 10^{-4}$. Počiatočný odhad z Haalandovho vzťahu (10.12) je $\lambda_0 = 0,020\,27$. Iterácie Colebrookovej rovnice dávajú

$$\lambda_1 = 0,020\,41, \quad \lambda_2 = 0,020\,41.$$

Tlaková strata, stratová výška a výkon:

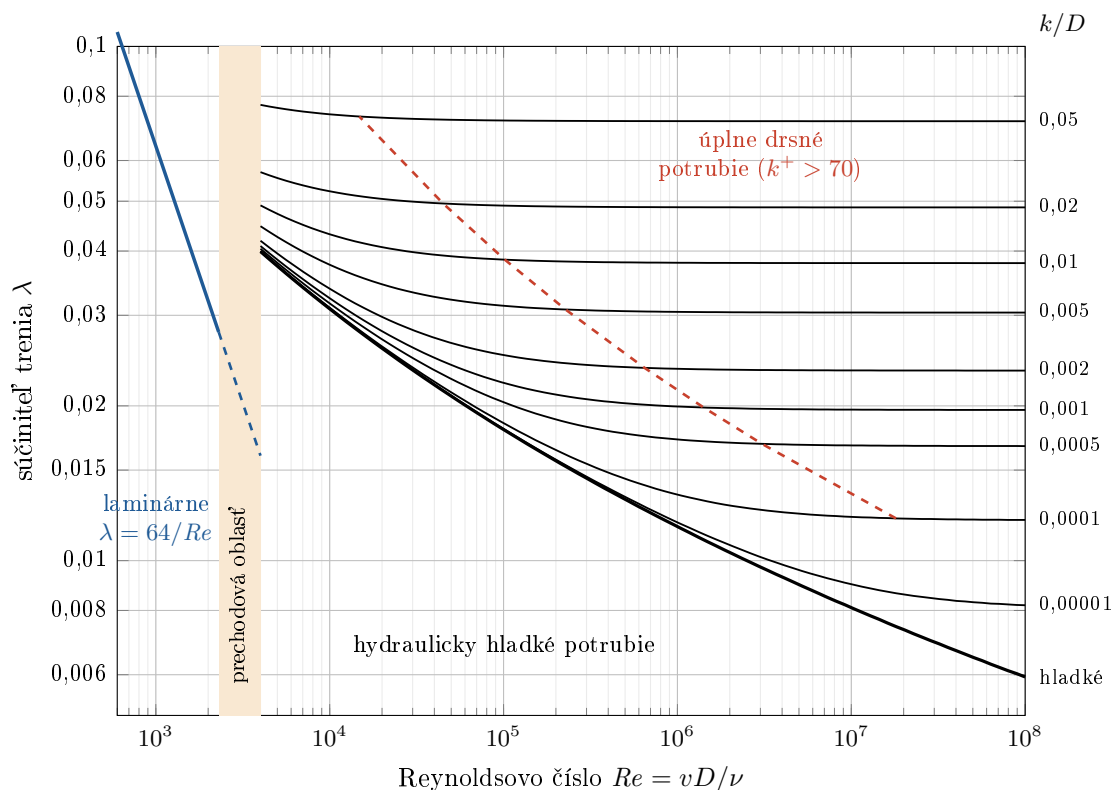
$$\Delta p_z = 0,02041 \cdot \frac{120}{0,0531} \cdot \frac{983,3 \cdot 1,806^2}{2} = 74,0 \text{ kPa}, \quad h_z = \frac{74\,000}{983,3 \cdot 9,81} = 7,67 \text{ m},$$

$$P_h = Q \Delta p_z = 0,004 \cdot 74\,000 = 296 \text{ W}.$$

Merná tlaková strata je 617 Pa/m. Pre vykurovacie potrubie je to veľa (odd. 10.15). ■

10.10 Moodyho diagram

Grafické znázornenie Colebrookovej rovnice spolu so vzťahom $64/Re$ zostavil L. F. Moody v roku 1944 [46]. *Moodyho diagram* (obr. 10.4) je jedným z najpoužívanějších diagramov v inžinierskej praxi. Na vodorovnej osi je Reynoldsovo číslo, na zvislej súčiniteľ trenia, obe v logaritmickej mierke. Parametrom kriviek je relatívna drsnosť k/D .



Obr. 10.4. Moodyho diagram vypočítaný z Colebrookovej–Whiteovej rovnice (10.11) a zo vzťahu $\lambda = 64/Re$. Oranžovo je vyznačená prechodová oblasť, červenou čiarkovanou čiarou hranica úplne drsného potrubia ($k^+ = 70$).

Z diagramu vidíme:

- v laminárnej oblasti λ klesá s Re a nezávisí od drsnosti,
- najmenší súčiniteľ trenia má hladké potrubie. Ani ten však nie je nulový, pretože aj na hladkej stene platí podmienka ulpievania,
- pri danej drsnosti λ s rastúcim Re klesá, až sa krivka vpravo od čiarkovanej hranice stane vodorovnou (úplne drsné potrubie),
- čím je potrubie drsnejšie, tým pri menšom Re prejde do oblasti úplne drsného potrubia,
- pre typické technické potrubia leží λ medzi 0,015 a 0,04.

Diagram je vhodný na rýchly odhad a na kontrolu výpočtu. Pri práci s počítačom sa používa priamo rovnica (10.11) alebo jej explicitné aproximácie.

10.11 Explicitné aproximácie súčiniteľa trenia

Aby sa predišlo iterácii, bolo navrhnutých viacero explicitných vzťahov. Najpoužívanějšíe sú:

- **Haalandov vzťah** [47]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \log \left[\left(\frac{k/D}{3,7} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re} \right], \quad (10.12)$$

- **Swameeho–Jainov vzťah** [48]

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\log \left(\frac{k/D}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad (5\,000 < Re < 10^8, \quad 10^{-6} < k/D < 10^{-2}). \quad (10.13)$$

Oba vzťahy sa od Colebrookovej rovnice líšia v celej oblasti turbulentného prúdenia najviac o 2 až 3 %, čo je omnoho menej ako neistota drsnosti. Blasiov vzťah (10.9) je jednoduchší, ale platí len pre hladké rúry a $Re < 10^5$. Pri $Re = 10^6$ podhodnocuje λ hladkej rúry o 14 % a pri drsných rúrach ešte viac.

Tab. 10.3 porovnáva uvedené vzťahy. Pre ručné výpočty odporúčame Haalandov alebo Swameeho–Jainov vzťah, pre programy Colebrookovu rovnicu s počiatočným odhadom z Haalandovho vzťahu.

Tabuľka 10.3. Odchýlka explicitných vzťahov od Colebrookovej rovnice.

Re	k/D	λ (Colebrook)	Haaland	Swamee–Jain	Blasius
10^4	0	0,030 9	0,0 %	+0,3 %	+2,5 %
10^5	0	0,018 0	−0,9 %	−0,7 %	−1,1 %
10^5	10^{-3}	0,022 2	−0,9 %	+0,8 %	−20 %
10^6	10^{-4}	0,013 4	−0,9 %	+0,5 %	−26 %
10^7	10^{-2}	0,037 9	+0,2 %	0,0 %	−85 %

10.12 Výpočet tlakovej straty

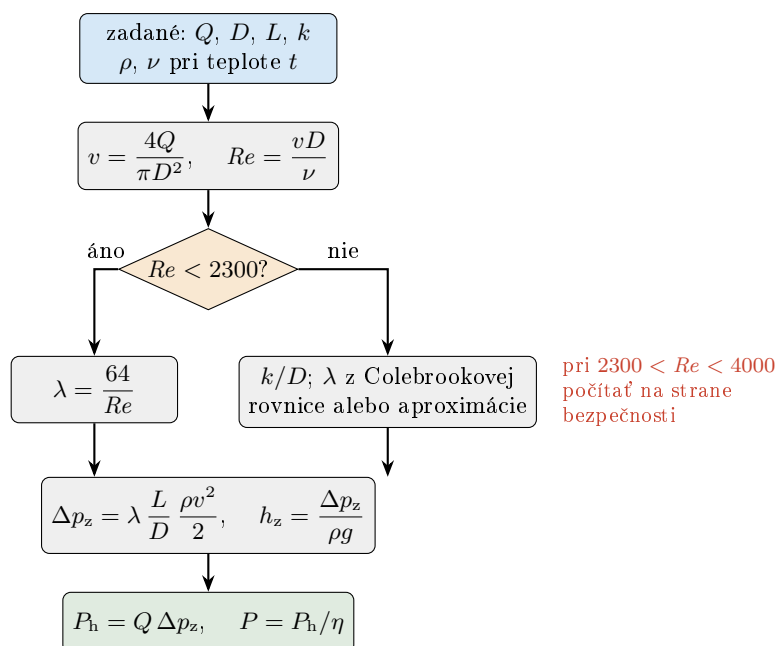
Úlohy o prúdení v potrubí sa delia na tri typy podľa toho, ktorá veličina je neznáma [1]:

1. **Výpočet tlakovej straty** (známe Q , D , L , k). Úloha je priama, postup ukazuje obr. 10.5.
2. **Výpočet prietoku** (známe Δp_z alebo h_z , D , L , k). Neznáme v vystupuje v Re , a teda aj v λ . Úlohu riešime iteráciou.
3. **Výpočet priemeru** (známe Q , prípustná strata, L , k). Neznáme D vystupuje v v , Re aj k/D . Úlohu riešime iteráciou a výsledok zaokrúhlime na najbližší väčší vyrábaný rozmer.

Prvý typ úlohy sme riešili v pr. 10.2. Pri druhom a treťom type pomáha dobrý počiatočný odhad. Pri výpočte prietoku odhadneme $\lambda_0 \approx 0,02$, vypočítame rýchlosť, z nej Re a nové λ . Pri výpočte priemeru vyjadríme D z (10.8):

$$D = \left(\frac{8 \lambda \rho L Q^2}{\pi^2 \Delta p_z} \right)^{1/5}. \quad (10.14)$$

Pretože D závisí od λ len cez piatu odmocninu, iterácia konverguje veľmi rýchlo.



Obr. 10.5. Postup výpočtu tlakovej straty po dĺžke (úloha prvého typu).

Príklad 10.3 – Samospádový prívod vody zo prameňa

Voda s teplotou 10°C ($\nu = 1,307 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) sa privádza z pramennej nádrže do budovy potrubím z PE s vnútorným priemerom 40 mm a dĺžkou 400 m ($k = 0,007 \text{ mm}$). Hladina v nádrži je 12 m nad výtokom do atmosféry. Určte prietok. Miestne straty zanedbajte.

Riešenie. Energetická rovnica medzi hladinou (1) a výtokom (2):

$$H = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \implies v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda L/D}}.$$

Iterácia s počiatočným odhadom $\lambda_0 = 0,02$:

krok	v [m/s]	Re	λ (Colebrook)
1	1,082	33 100	0,023 44
2	1,000	30 600	0,023 85
3	0,992	30 300	0,023 89
4	0,991	30 300	0,023 90

Prietok je $Q = v \pi D^2/4 = 0,991 \cdot 1,257 \cdot 10^{-3} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 1,25 \text{ L/s}$. Kinetická energia na výtoky ($v^2/2g = 0,05 \text{ m}$) je voči tretej strate zanedbateľná. Swameeho a Jainov explicitný vzťah pre prietok [48]

$$Q = -0,965 D^{2,5} \sqrt{\frac{g h_z}{L}} \ln \left[\frac{k/D}{3,7} + \left(\frac{3,17 \nu^2 L}{g D^3 h_z} \right)^{0,5} \right]$$

dáva pre $h_z = H$ rovnaký výsledok 1,25 L/s. ■

Príklad 10.4 – Priemer privádzača malej vodnej elektrárne

Privádzač MVE s dĺžkou 300 m má viesť prietok $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$. Hrubý spád je 40 m. Straty trením nemajú prekročiť 3 % hrubého spádu. Potrubie je oceľové so zohľadnením starnutia $k = 0,1 \text{ mm}$, voda má 10°C . Určte potrebný vnútorný priemer.

Riešenie. Prípustná strata je $h_z = 0,03 \cdot 40 = 1,2 \text{ m}$, teda $\Delta p_z = \rho g h_z = 11,8 \text{ kPa}$. Začneme odhadom $D_0 = 0,5 \text{ m}$, pre ktorý vychádza $v = 2,55 \text{ m/s}$, $Re = 974\,000$, $\lambda = 0,0147$. Podľa (10.14):

$$D_1 = \left(\frac{8 \cdot 0,0147 \cdot 1000 \cdot 300 \cdot 0,5^2}{\pi^2 \cdot 11\,770} \right)^{1/5} = 0,597 \text{ m}.$$

Druhý krok s D_1 dáva $\lambda = 0,0145$ a $D_2 = 0,596 \text{ m}$. Zvolíme potrubie s vnútorným priemerom 600 mm. Rýchlosť je $1,77 \text{ m/s}$ a strata $1,16 \text{ m}$, teda 2,9 % spádu. ■

10.13 Výpočet stratovej výšky

Vo výpočtoch s rozšírenou energetickou rovnicou (6.16) potrebujeme straty vo výškovom tvare. Celková stratová výška medzi bodmi 1 a 2 je súčtom strát trením vo všetkých úsekoch a miestnych strát (kap. 11):

$$h_z = \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_j \zeta_j \frac{v_j^2}{2g}. \quad (10.15)$$

Úseky s rôznym priemerom alebo prietokom sa počítajú samostatne, pretože majú rôznu rýchlosť, Re aj λ . Ak je prietok vo všetkých úsekoch rovnaký (sériové zapojenie), dá sa súčet zapísať v tvare

$$h_z = R Q^2, \quad R = \sum_i \frac{8 \lambda_i L_i}{\pi^2 g D_i^5} + \sum_j \frac{8 \zeta_j}{\pi^2 g D_j^4}, \quad (10.16)$$

kde $R [\text{s}^2/\text{m}^5]$ je *hydraulický odpor* potrubia. Pri turbulentnom prúdení v drsných rúrach je R takmer konštantný. Závislosť $h_z = R Q^2$ je potom parabola, ktorá sa nazýva *charakteristika potrubia*. Využijeme ju v kap. 12 a 13 pri hľadaní pracovného bodu čerpadla.

Stratová výška je názorná. Pri vode zodpovedá 1 m straty približne $9,8 \text{ kPa}$. Pre nemrznúce zmesi s inou hustotou treba vždy prepočítavať cez skutočnú hustotu.

10.14 Potrebný čerpací výkon

V uzavretom okruhu musí čerpadlo pokryť celú stratu (rov. (6.18)), v otvorenom systéme aj geodetický rozdiel (pr. 6.4). Hydraulický výkon a príkon čerpadla sú

$$P_h = Q \Delta p = \rho g Q H_z, \quad P = \frac{P_h}{\eta}, \quad (10.17)$$

kde η je celková účinnosť čerpadla s motorom (a prípadne s meničom frekvencie). Pri malých obehových čerpadlách vo vykurovaní a solárnych systémoch je η len asi 0,2 až 0,4, pri veľkých čerpadlách 0,7 až 0,85 [15]. Ročná spotreba elektriny je

$$E = \int P dt \approx P \tau, \quad (10.18)$$

kde τ je *ekvivalentná doba prevádzky* pri menovitom prietoku. Pri premenlivom prietoku treba zohľadniť, že výkon potrebný na prekonanie trenia klesá približne s tretou mocninou prietoku (rov. (1.7)). Prevádzka pri polovičnom prietoku vyžaduje len asi osminu výkonu.

Príklad 10.5 – O jednu dimenziu menšie potrubie

Obehové čerpadlo vykurovacieho okruhu dopravuje 0,5 L/s vody s teplotou 20 °C oceľovým potrubím s ekvivalentnou dĺžkou 60 m. Porovnajme potrubie DN 25 ($D = 27,3$ mm) a DN 20 ($D = 21,7$ mm). Účinnosť čerpadla je 0,3, ekvivalentná doba prevádzky 5 000 h/r.

Riešenie. Rovnakým postupom ako v pr. 10.2 dostaneme:

	v [m/s]	Re	λ	Δp [kPa]	P [W]	E [kW · h/r]
DN 25	0,85	23 200	0,028 5	22,8	38	190
DN 20	1,35	29 200	0,028 3	71,5	119	595

Priemer sa zmenšil o 21 %, tlaková strata aj spotreba elektriny však vzrástli 3,1-krát. Pomer zodpovedá závislosti $(27,3/21,7)^5 = 3,15$. Súčiniteľ trenia sa takmer nezmenil. ■

10.15 Návrh priemeru potrubia

Pri návrhu potrubia je prietok daný potrebou (tepelným výkonom, spotrebou vody, prietokom turbíny). Priemer volí projektant. Menší priemer znamená lacnejšie potrubie, armatúry a izoláciu, menší objem náplne a pri tepelných rozvodoch aj menšie tepelné straty. Väčší priemer znamená menšie tlakové straty, menšie a lacnejšie čerpadlo, nižšiu spotrebu elektriny a tichšiu prevádzku. Pri návrhu sa uplatňujú dve skupiny kritérií:

- **technické obmedzenia:** najväčšia prípustná rýchlosť (hluk, erózia, tlakové rázy), najmenšia rýchlosť (odvzdušnenie, usadzovanie nečistôt, pri tepelných zariadeniach aj prestup tepla), najväčšia merná tlaková strata a dostupná dopravná výška čerpadla, riziko kavitácie na sacej strane čerpadla,
- **ekonomické kritérium:** najmenšie celkové náklady za dobu životnosti, teda súčet investičných a prevádzkových nákladov (odd. 10.16).

Projekčná prax technické obmedzenia zjednodušuje do odporúčaných rýchlostí alebo odporúčaných merných tlakových strát. Orientačné hodnoty uvádza tab. 10.4. Pre konkrétny projekt treba použiť príslušné normy a odporúčania výrobcov.

Tabuľka 10.4. Orientačné rýchlosti prúdenia a merné tlakové straty pri návrhu potrubí (hodnoty z projekčnej praxe).

potrubie	rýchlosť [m/s]	poznámka
vykurovacie a solárne okruhy, malé DN	0,3 – 1,0	obmedzenie hluku
rozvody tepla, stredné a veľké DN	1 – 2,5	50 Pa/m až 200 Pa/m
sacie potrubie čerpadiel	0,5 – 1,5	riziko kavitácie
výtlačné potrubie čerpadiel	1 – 3	
privádzače vodných elektrární	1 – 3	straty 2 – 5 % spádu
vzduchotechnika	2 – 8	obmedzenie hluku

Postup návrhu:

1. Z tepelného výkonu $\dot{Q}$ a teplotného rozdielu ΔT určíme hmotnostný prietok $\dot{m} = \dot{Q}/(c_p \Delta T)$ a objemový prietok $Q = \dot{m}/\rho$.
2. Zvolíme rýchlosť alebo mernú stratu podľa tab. 10.4 a vypočítame potrebný priemer $D = \sqrt{4Q/(\pi v)}$ alebo z (10.14).

3. Zvolíme najbližší vyrábaný rozmer (tab. 10.1).
4. Pre zvolený rozmer overíme rýchlosť, mernú stratu a celkovú stratu vrátane miestnych odporov.
5. Pri viacerých vhodných rozmeroch porovnáme náklady.

10.16 Ekonomická rýchlosť prúdenia

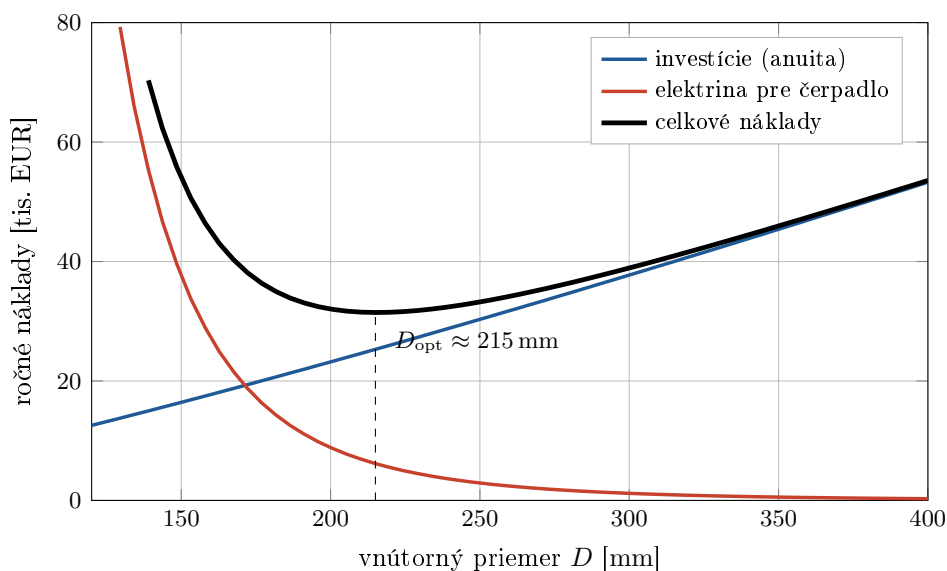
Celkové ročné náklady potrubia sú súčtom ročnej splátky investície (anuity) a ročných nákladov na elektrinu pre čerpadlo. Cena potrubia rastie s priemerom približne ako D^m , kde $m \approx 1$ až 1,5. Náklady na elektrinu sú úmerné tlakovej strate, a teda podľa (10.8) približne D^{-n} , kde $n \approx 4,8$ až 5. Celkové náklady

$$C(D) = \underbrace{a D^m}_{\text{investície}} + \underbrace{b D^{-n}}_{\text{elektrina}} \quad (10.19)$$

majú minimum pri optimálnom priemere (obr. 10.6). Z podmienky $dC/dD = 0$ dostaneme

$$m a D^m = n b D^{-n} \implies \frac{C_{\text{el}}}{C_{\text{inv}}} = \frac{m}{n} \approx 0,2 \text{ až } 0,3. \quad (10.20)$$

V optime sú teda ročné náklady na elektrinu asi štvrtinou ročnej splátky investície. Rýchlosť zodpovedajúca optimálnemu priemeru sa nazýva *ekonomická rýchlosť*. Závisí od ceny potrubia a elektriny, doby prevádzky a úrokovej miery. Pre vodovodné a zásobovacie potrubia vychádza obvykle okolo 1 m/s až 2 m/s.



Obr. 10.6. Ročné náklady na výtlačné potrubie v závislosti od priemeru (ilustračný výpočet: $Q = 50 \text{ L/s}$, $L = 1 \text{ km}$, $6\,000 \text{ h/r}$, $0,20 \text{ EUR/kWh}$, cena potrubia $2000 D^{1,2} \text{ EUR/m}$, anuita 8%).

V príklade na obr. 10.6 je optimálny priemer 215 mm a ekonomická rýchlosť 1,38 m/s. Krivka celkových nákladov je v okolí optima plochá. Priemer o jednu dimenziu väčší ako optimálny zvýši náklady len málo, priemer o dimenziu menší však podstatne viac. Pri neistote vstupných údajov (budúca cena elektriny, rast odberu) je preto rozumné voliť skôr väčší priemer.

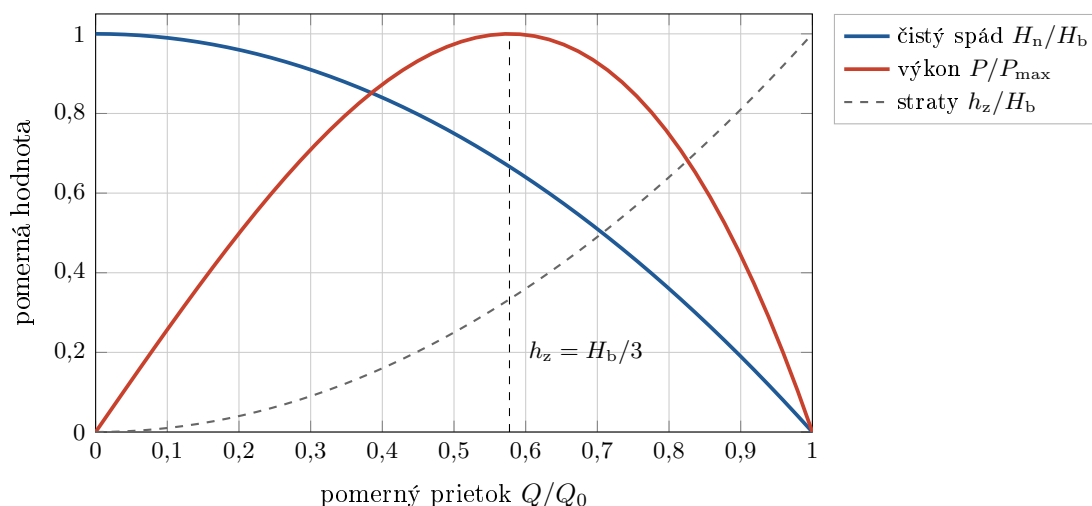
10.17 Vplyv priemeru na energetickú spotrebu

Silná závislosť strát od priemeru ($\Delta p \propto D^{-5}$) je jedným z najdôležitejších poznatkov pre energeticky úsporný návrh:

- zmenšenie priemeru o jednu dimenziu (o 20 % až 25 %) zvýši tlakovú stratu a spotrebu elektriny približne trojnásobne (pr. 10.5),
- zväčšenie priemeru o jednu dimenziu zníži spotrebu elektriny na tretinu a často umožní použiť menšie čerpadlo,
- pri rovnakom prietoku v dvoch rovnobežných potrubíach je strata štyrikrát menšia ako v jednom potrubí rovnakého priemeru.

Pre zariadenia OZE to má konkrétne dôsledky. Spotreba elektriny obehových čerpadiel znižuje čistý prínos solárnych systémov a sezónny výkonový faktor tepelných čerpadiel. Pri zemných vrtoch sa rozhoduje medzi rúrkami PE $32 \times 2,9$ a $40 \times 3,7$. Pri tepelných sieťach tvoria náklady na potrubie najväčšiu časť investície a zároveň tepelné straty rastú s priemerom. Optimálny priemer je preto menší, ako by vyplývalo len z porovnania investície a elektriny [29].

Privádzač vodnej elektrárne



Obr. 10.7. Čistý spád, straty a výkon vodnej elektrárne s daným privádzačom v závislosti od prietoku. Q_0 je prietok, pri ktorom by straty spotrebovali celý spád.

Pri vodnej elektrárni nejde o spotrebu, ale o *stratu výroby*. Pre daný privádzač so stratou $h_z = RQ^2$ je čistý spád $H_n = H_b - RQ^2$ a výkon

$$P = \eta \rho g Q (H_b - RQ^2). \quad (10.21)$$

Výkon je nulový pri $Q = 0$ aj pri prietoku Q_0 , pri ktorom straty spotrebujú celý spád. Maximum nastane pri $dP/dQ = 0$, teda pri $H_b = 3RQ^2$ (obr. 10.7):

$$h_z = \frac{H_b}{3}, \quad H_n = \frac{2}{3} H_b. \quad (10.22)$$

Ide o *technické* maximum výkonu pre daný privádzač. Tretina spádu sa pri ňom stráca v potrubí, čo by bolo neekonomické pri celoročnej prevádzke. Privádzače sa preto navrhujú na straty rádovo niekoľko percent spádu (pr. 10.4). Optimálny prietok a priemer privádzača v závislosti od typu turbíny rozoberajú [49]. Podmienka (10.22) je však užitočná pri posúdení existujúcich malých zdrojov, napríklad starých náhonov a potrubí pri obnove MVE.

10.18 Aplikácia v OZE: potrubie tepelného systému

Vráťme sa k otázke zo začiatku kapitoly.

Príklad 10.6 – Prípojka z kotolne na biomasu

Kotolňa na biomasu dodáva 300 kW tepla do budovy vzdialenej 200 m. Teplotný spád je 80/60 °C (stredná teplota 70 °C, $\rho = 977,5 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 4,19 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$, $\nu = 0,413 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). Uvažujte predizolované oceľové potrubie ($k = 0,045 \text{ mm}$) s vnútornými priermi DN 50: 54,5 mm, DN 65: 70,3 mm, DN 80: 82,5 mm. Miestne straty zahrňte zväčšením dĺžky prívodu a spiatocky (400 m) na ekvivalentnú dĺžku 500 m. Určte rýchlosť, mernú a celkovú tlakovú stratu a ročnú spotrebu elektriny čerpadla pri účinnosti 0,5 a ekvivalentnej dobe prevádzky 2 000 h/r.

Riešenie. Hmotnostný a objemový prietok:

$$\dot{m} = \frac{300\,000}{4190 \cdot 20} = 3,58 \text{ kg/s}, \quad Q = \frac{3,58}{977,5} = 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 13,2 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Výsledky výpočtu podľa obr. 10.5:

	v [m/s]	Re	λ	$\Delta p/L$ [Pa/m]	Δp [kPa]	P [W]	E [kW · h/r]
DN 50	1,57	207 000	0,020 3	448	224	1640	3280
DN 65	0,94	161 000	0,019 9	123	61,5	450	900
DN 80	0,69	137 000	0,019 8	55	27,5	200	400

Potrubie DN 50 má mernú stratu 448 Pa/m, čo je vysoko nad bežným rozsahom 50 Pa/m až 200 Pa/m. Čerpadlo by muselo mať dopravnú výšku vyše 23 m. DN 65 a j DN 80 vyhovujú. Rozdiel v spotrebe elektriny medzi nimi je asi 500 kW · h/r, pri cene 0,20 EUR/kWh teda 100 EUR za rok. Potrubie DN 80 je však drahšie a má väčšie tepelné straty. Pri trase 200 m to predstavuje rádovo tisíce eur investície a trvalo vyššie tepelné straty. Vhodnou voľbou je preto DN 65.

Príklad ukazuje, že pri malých prípojkách rozhodujú technické obmedzenia (merná strata, dopravná výška čerpadla) a tepelné straty. Spotreba elektriny je malá. Pri veľkých prietokoch a dlhých potrubíach, napríklad v hlavných vetvách tepelných sietí, v privádzačoch MVE a vo vodárenských potrubíach, sa naopak spotreba energie stáva rozhodujúcou (obr. 10.6). ■

Aplikácia v OZE: kolektorové pole

V poli slnečných kolektorov treba zabezpečiť, aby všetkými kolektormi pretekal približne rovnaký prietok. Ak je tlaková strata zberných a rozdeľovacích potrubí porovnateľná so stratou samotných kolektorov, kolektory bližšie k prípojke dostanú väčší prietok ako vzdialené a ich účinnosť sa líši. Rovnomernosť sa zlepši zapojením podľa Tichelmanna (obr. 5.4), väčším priemerom zberných potrubí alebo kolektormi s väčšou vlastnou tlakovou stratou [7]. Rozdelením prietoku v paralelných vetvách sa zaoberá kap. 12.

Projektová úloha

Optimalizácia priemeru potrubia podľa investičných a prevádzkových nákladov. Pre zadaný prietok, dĺžku a teplotu teplonosnej látky zostavte v Pythone alebo v tabuľkovom procesore výpočet súčiniteľa trenia (Colebrookova rovnica), tlakovej straty a ročnej spotreby elektriny

pre rad vyrábaných priemerov. Doplňte ceny potrubia z katalógu, cenu elektriny a anuitný faktor. Nájdite priemer s najmenšími celkovými ročnými nákladmi. Overte citlivosť výsledku na cenu elektriny ($\pm 50\%$) a na dobu prevádzky. Pri tepelných rozvodoch doplňte tepelné straty potrubia podľa údajov výrobcu a posúďte, ako zmenia optimálny priemer.

Zhrnutie kapitoly

- Pre výpočet treba poznať skutočný vnútorný priemer potrubia, nie menovitú svetlosť. Pre nekuhové prierezy sa používa hydraulický priemer $D_h = 4A/O$.
- Pri plne vyvinutom prúde klesá tlak lineárne. Tlaková strata trením je daná Darcyho–Weisbachovou rovnicou $\Delta p_z = \lambda (L/D) \rho v^2/2$.
- Súčiniteľ trenia závisí od Re a relatívnej drsnosti k/D . Pri laminárnom prúde $\lambda = 64/Re$, pri turbulentnom sa určí z Colebrookovej–Whiteovej rovnice, z Moodyho diagramu alebo z explicitných aproximácií (Haaland, Swamee–Jain).
- Tri typy úloh: výpočet straty (priamy), prietoku a priemeru (iterácia).
- Pri danom prietoku je strata úmerná približne D^{-5} . Menšie potrubie o jednu dimenziu znamená asi trojnásobnú spotrebu elektriny.
- Priemer sa navrhuje s ohľadom na technické obmedzenia (rýchlosť, merná strata) a na celkové náklady. V ekonomickom optime tvoria náklady na elektrinu asi štvrtinu ročnej splátky investície.
- Privádzač vodnej elektrárne dáva najväčší výkon pri strate tretiny spádu. Ekonomicky sa však navrhuje na straty niekoľko percent.

Kontrolné otázky

1. Čím sa líši menovitá svetlosť DN od vnútorného priemeru? Ktorý rozmer patrí do výpočtu?
2. Ako je definovaný hydraulický priemer a prečo sa v ňom vyskytuje omočený obvod?
3. Prečo je tlakový gradient pri plne vyvinutom prúde konštantný?
4. Prečo diferenčný tlak nameraný medzi dvoma bodmi naklonenej rúry nie je priamo tlaková strata?
5. Od ktorých bezrozmerných veličín závisí súčiniteľ trenia? Prečo nie priamo od rýchlosti a viskozity?
6. Aký je rozdiel medzi Darcyho a Fanningovým súčiniteľom trenia?
7. Opíšte oblasti Moodyho diagramu. V ktorej oblasti nezávisí λ od Re a prečo?
8. Prečo je Colebrookova rovnica implicitná a ako sa rieši?
9. Ktoré tri typy úloh riešime pri potrubí? Prečo druhý a tretí typ vyžadujú iteráciu?
10. Ako sa zmení tlaková strata, ak pri rovnakom prietoku zmenšíme priemer o 20%?
11. Aké kritériá rozhodujú o voľbe priemeru potrubia? Čo je ekonomická rýchlosť?

12. Prečo je optimálny priemer tepelného rozvodu menší ako optimum podľa nákladov na potrubie a elektrinu?
13. Pri akej strate dáva privádzač MVE najväčší výkon? Prečo sa na ňu privádzače nenavrhujú?

Úlohy na precvičenie

1. Určte hydraulický priemer kanála vzduchového kolektora s prierezom $1,2\text{ m} \times 40\text{ mm}$ a medzikružia koaxiálnej sondy s priermi 102 mm a 63 mm. [77,4 mm; 39 mm]
2. Rúrkou podlahového vykurovania PE-X 16×2 ($D = 12\text{ mm}$, hladká) s dĺžkou 80 m preteká 150 L/h vody s teplotou 35°C ($\rho = 994\text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,72 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$). Určte rýchlosť, Re , λ a tlakovú stratu. [0,368 m/s; 6 140; 0,035 3; 15,9 kPa]
3. Solárnym okruhom z medenej rúrky Cu 18×1 ($D = 16\text{ mm}$, $k = 0,0015\text{ mm}$) s dĺžkou 40 m preteká 6 L/min zmesi so 40 % PG pri 40°C (tab. B.3). Určte Re a tlakovú stratu. Prúdenie je v prechodovej oblasti, preto počítajte na strane bezpečnosti s turbulentným λ . [3 650; 0,041 1; 13,0 kPa]
4. Na úseku oceľového potrubia DN 100 ($D = 105,3\text{ mm}$) dĺžky 50 m bol pri rýchlosti 1,5 m/s vody s teplotou 20°C nameraný pokles tlaku 11,2 kPa. Potrubie je vodorovné. Určte súčiniteľ trenia a šmykové napätie na stene. [0,021 0; 5,9 Pa]
5. Oceľové potrubie DN 80 ($D = 80,9\text{ mm}$, $k = 0,045\text{ mm}$) s dĺžkou 250 m vedie vodu s teplotou 20°C . Aký prietok ním pretečie, ak je k dispozícii stratová výška 5 m? [6,39 L/s]
6. Určte najmenší vnútorný priemer oceľového potrubia ($k = 0,045\text{ mm}$) pre prietok 20 L/s vody s teplotou 10°C , ak merná tlaková strata nemá prekročiť 150 Pa/m. Aká je rýchlosť? [132 mm; 1,46 m/s]
7. Koľkokrát sa zväčší súčiniteľ trenia potrubia DN 100 ($D = 105,3\text{ mm}$) s vodou 20°C pri rýchlosti 1 m/s, ak drsnosť vplyvom korózie vzrastie z 0,045 mm na 0,5 mm? [z 0,019 9 na 0,030 8, 1,55×]
8. Privádzač MVE s vnútorným priemerom 0,4 m a dĺžkou 500 m ($k = 0,1\text{ mm}$, voda 10°C) vedie $0,3\text{ m}^3/\text{s}$. Hrubý spád je 60 m. Určte stratu, čistý spád a elektrický výkon pri celkovej účinnosti 0,85. Pri akom prietoku by bol výkon najväčší (pri konštantnom λ)? [5,61 m; 54,4 m; 136 kW; $0,57\text{ m}^3/\text{s}$]
9. Prietok v potrubí s konštantným λ sa zvýši o 30 %. Koľkokrát vzrastie tlaková strata a hydraulický výkon? Ako by to bolo pri laminárnom prúdení? [1,69 a 2,20; 1,30 a 1,69]
10. Vodu treba dopraviť potrubím dĺžky 1 km. Pri priemere 200 mm je tlaková strata 103 kPa. Odhadnite stratu pri priemere 250 mm za predpokladu $\Delta p \propto D^{-4,9}$. [35 kPa]
11. Ukážte, že pre celkové náklady $C = aD^m + bD^{-n}$ platí v optime $C_{\text{el}}/C_{\text{inv}} = m/n$.
12. V tabuľkovom procesore alebo v Pythone zostrojte Moodyho diagram z Colebrookovej rovnice pre $k/D = 0$; 10^{-4} ; 10^{-3} ; 10^{-2} a porovnajte ho s obr. 10.4.

Kapitola 11

Miestne hydraulické odpory

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent vysvetlí fyzikálny mechanizmus miestnych strát a definuje súčiniteľ miestneho odporu. Odvodí stratu pri náhlom rozšírení z bilancie hybnosti a energie. Pozná typické hodnoty súčiniteľov pre vstupy, výstupy, zmeny prierezu, kolená, T-kusy a armatúry. Prepočíta údaje výrobcov (hodnotu K_v , diagramy $\Delta p-Q$) na súčinitele odporu a zahrnie všetky miestne straty do energetickej bilancie potrubného systému. Vie posúdiť, kedy miestne odpory nemožno zanedbať.

Kľúčové pojmy

miestna strata, súčiniteľ miestneho odporu ζ , odtrhnutie prúdu, zúžený prierez (vena contracta), Bordova–Carnotova strata, difúzor, konfúzor, sekundárne prúdenie, T-kus, prietokový súčiniteľ K_v , ekvivalentná dĺžka, hydraulický odpor, česlicová stena

V kap. 10 sme počítali straty trením v rovných úsekoch potrubia. Skutočné potrubné systémy však obsahujú aj kolená, odbočky, zmeny priemeru, ventily, spätné klapky, filtre, merače tepla, výmenníky a vstupy do nádrží a výstupy z nich. Každý z týchto prvkov naruší prúdenie a spôsobí dodatočnú stratu energie. Takéto straty nazývame *miestne*. V dlhých potrubíach tvoria zvyčajne menšiu časť celkovej straty. V kompaktných systémoch, ako sú kotolne, strojovne tepelných čerpadel a čerpadlové skupiny solárnych systémov, však často prevládajú.

Na rozdiel od trenia v rovnom potrubí miestne straty takmer nemožno vypočítať teoreticky. Až na výnimky (náhle rozšírenie) sa určujú meraním. Výsledky sa uvádzajú ako súčinitele miestneho odporu v príručkách, najmä v rozsiahlej príručke [50], a v katalógoch výrobcov. Výklad nadväzuje na [1, 5].

Na zamyslenie

Okruh medzi kotlom na biomasu a akumulácnou nádržou je dlhý len 12 m. Má však 14 kolien, 4 guľové ventily, spätnú klapku, filter, zmiešavací ventil na ochranu spiatočky a dva T-kusy. Projektant vypočítal stratu trením v potrubí a pripočítal 20 % na miestne odpory. Čerpadlo potom nedodávalo potrebný prietok. Ako veľká je skutočne strata v tvarovkách a armatúrach?

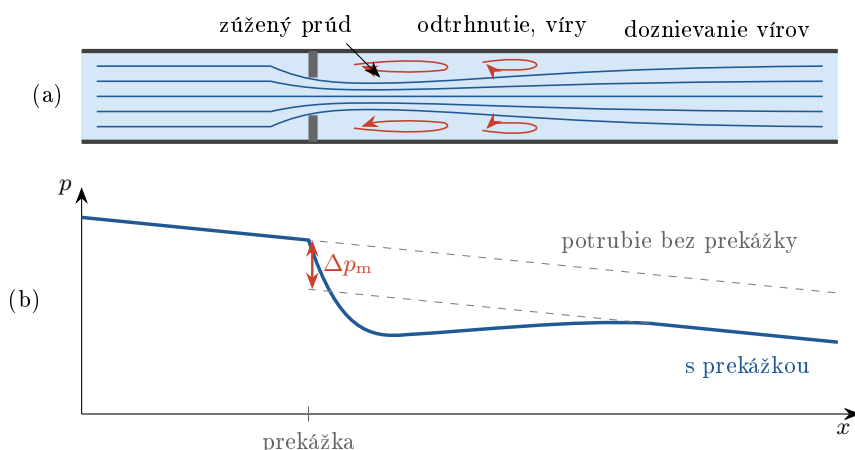
Pozor – častá chyba

Označenie „miestna strata“ neznamená, že strata energie fyzikálne vzniká iba v jednom geometrickom bode. Disipácia prebieha v celej oblasti narušeného prúdenia za prekážkou, často na dĺžke desiatok priemerov potrubia.

11.1 Mechanizmus miestnej straty

Pri náhlej zmene prierezu alebo smeru prúdenia sa tekutina nedokáže prispôbiť tvaru steny. Prúd sa od steny *odtrhne* (obr. 11.1a). Za prekážkou vznikne zúžený prúd s veľkou rýchlosťou a okolo neho oblasti spätného prúdenia s veľkými vírmi. Na rozhraní rýchleho prúdu a pomalých vírov je veľký rýchlostný gradient, a teda intenzívne turbulentné miešanie (kap. 9). Rýchly prúd sa postupne rozširuje, spomaľuje a zaplní celý prierez. Jeho kinetická energia sa však premení na tlak len čiastočne. Zvyšok sa vo vírovej kaskáde premení na teplo.

K odtrhnutiu dochádza najmä pri *spomaľovaní* prúdu, teda pri náraste tlaku v smere prúdenia (rozšírenia, vnútorná strana kolien, priestor za zúženým prierezom). Zrýchľovanie prúdu (zúženie, dýza) je naopak stabilné a málo stratové. Preto sú straty pri rozšírení spravidla väčšie ako pri zúžení rovnakého pomeru.



Obr. 11.1. (a) Prúdenie cez prekážku (clonu): zúženie prúdu, odtrhnutie a víry. (b) Priebeh tlaku pozdĺž potrubia s prekážkou a bez nej. Miestna strata Δp_m je rozdiel medzi predĺženými lineárnymi priebehmi pred prekážkou a za ňou.

Priebeh tlaku (obr. 11.1b) ukazuje, ako sa miestna strata meria. Ďaleko pred prekážkou a ďaleko za ňou klesá tlak lineárne podľa trenia. V blízkosti prekážky je priebeh zložitý. Tlak za zúženým prierezom najprv klesne a potom čiastočne narastie. Miestna strata Δp_m je *dodatočná* strata, ktorú prekážka spôsobí navyše oproti rovnému potrubiu rovnakej dĺžky. Určí sa predĺžením lineárnych úsekov do miesta prekážky [1].

11.2 Súčiniteľ miestneho odporu ζ

Miestnu stratu vyjadrujeme ako násobok rýchlostnej výšky:

$$\boxed{h_m = \zeta \frac{v^2}{2g}} \quad \text{alebo} \quad \Delta p_m = \zeta \frac{\rho v^2}{2}, \quad (11.1)$$

kde ζ je bezrozmerný *súčiniteľ miestneho odporu* (v anglickej literatúre K alebo K_L). Hovorí, koľko rýchlostných výšok sa v prvku stratí. Pri prvkoch so zmenou prierezu treba vždy uviesť, ku ktorej rýchlosti sa ζ vzťahuje. V tejto knihe ho vzťahujeme k rýchlosti v *menšom* priereze, ak nie je uvedené inak.

Súčiniteľ ζ vo všeobecnosti závisí od geometrie prvku, od Reynoldsovho čísla a od drsnosti. Pri veľkých Re , pri ktorých prúdenie v technike prevažne prebieha, je od Re takmer nezávislý. Strata je potom úmerná v^2 , a teda Q^2 . Pri malých Re (laminárne prúdenie, viskózne nemrznúce zmesi) sa ζ zväčšuje [50]. Uvádzané hodnoty treba brať ako orientačné. Súčinitele dvoch zdanlivo rovnakých ventilov od rôznych výrobcov sa môžu líšiť aj dvojnásobne [1].

Poznámka

Súčinitele sa merajú pre prvok, pred ktorým aj za ktorým je dlhé rovné potrubie. Ak sú dva prvky tesne za sebou (dve kolená, koleno a ventil), ovplyvňujú sa a ich spoločná strata sa môže od súčtu jednotlivých strát líšiť. Dve kolená v rôznych rovinách napríklad vyvolajú silné vírenie prúdu, ktoré doznieva na dĺžke mnohých priemerov. Pre bežné výpočty sa straty napriek tomu sčítavajú [50].

11.3 Náhle rozšírenie

Náhle rozšírenie je jediný prípad, v ktorom možno miestnu stratu odvodiť teoreticky (obr. 11.2). Zvolíme kontrolný objem od roviny rozšírenia po prierez 2, kde sa už prúd rozšíril na celý prierez. V rovine rozšírenia je tlak v prúde aj vo vírovej oblasti pri stene približne rovnaký, p_1 . Tlak p_1 teda pôsobí na celú plochu A_2 . Trenie o stenu na krátkom úseku zanedbáme. Bilancia hybnosti v smere prúdenia (rov. (7.5)) dáva

$$(p_1 - p_2) A_2 = \rho Q (v_2 - v_1) \implies p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2). \quad (11.2)$$

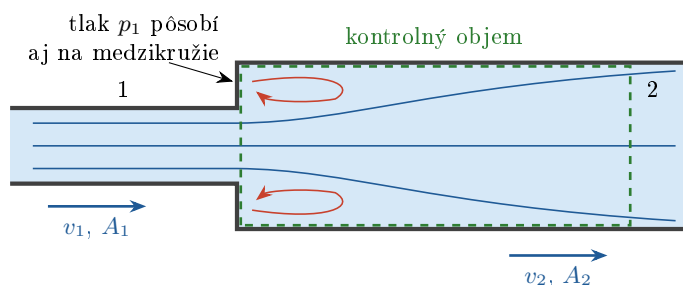
Energetická rovnica medzi prierezmi 1 a 2 (pre $\alpha = 1$) je

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_m.$$

Po dosadení (11.2) dostaneme *Bordovu–Carnotovu stratu*:

$$h_m = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \implies \zeta_1 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2, \quad (11.3)$$

kde ζ_1 sa vzťahuje k rýchlosti v_1 v menšom priereze. *Pri náhlom rozšírení sa stratí kinetická energia zodpovedajúca rozdielu rýchlostí*. Vzťah dobre súhlasí s meraniami [1].



Obr. 11.2. Náhle rozšírenie a kontrolný objem na odvodenie Bordovej–Carnotovej straty.

Pre $A_2 \rightarrow \infty$, teda pri výtoku z potrubia do veľkej nádrže, je $\zeta_1 = 1$. Stratí sa celá kinetická energia prúdu (odd. 11.5).

Príklad 11.1 – Náhle rozšírenie potrubia

Potrubie sa náhle rozširuje z priemeru 50 mm na 100 mm. Rýchlosť vody v menšom potrubí je 2 m/s. Určte stratu a zmenu tlaku. Porovnajte ju s ideálnym prípadom bez strát.

Riešenie. Z rovnice kontinuity $v_2 = v_1(D_1/D_2)^2 = 0,5$ m/s. Strata:

$$h_m = \frac{(2 - 0,5)^2}{2 \cdot 9,81} = 0,115 \text{ m}, \quad \zeta_1 = (1 - 0,25)^2 = 0,5625.$$

Tlak za rozšírením vzrastie o

$$p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2) = 1000 \cdot 0,5 \cdot 1,5 = 750 \text{ Pa}.$$

Bez strát by podľa Bernoulliho rovnice vzrástol o $\rho(v_1^2 - v_2^2)/2 = 1875$ Pa. Pri náhlom rozšírení sa teda na tlak premení len 40 % dostupnej kinetickej energie. ■

Postupné rozšírenie (difúzor)

Stratu pri rozšírení výrazne zmenšíme kužeľovým prechodom, ktorý sa nazýva *difúzor*. Pri malom uhle rozšírenia θ sa prúd od steny neodtrhne a rýchlosť sa postupne premení na tlak. Súčiniteľ vzťahovaný k rýchlosti v menšom priereze je približne 0,02 pri celkovom uhle 20° , 0,04 pri 45° a 0,07 pri 60° [1]. Pri väčších uhloch sa prúd odtrháva a strata sa blíži k strate náhleho rozšírenia. Difúzory sú dôležité všade, kde treba spätne získať kinetickú energiu. Príkladom je savka vodnej turbíny, ktorá premieňa kinetickú energiu vody vystupujúcej z obežného kola na tlak (kap. 14), alebo výstup z ventilátora.

11.4 Náhle zúženie

Pri náhlom zúžení (obr. 11.3) sa prúd nedokáže prispôbiť ostrej hrane. Za hranou sa zúži na prierez $A_c = C_c A_2$, ktorý sa nazýva *zúžený prierez* (lat. *vena contracta*). Súčiniteľ C_c je *súčiniteľ kontrakcie*. Zrýchlenie prúdu do zúženého prierezu je takmer bezstratové. Strata vzniká až pri následnom rozšírení zo zúženého prierezu na celý prierez A_2 . Podľa (11.3) je

$$h_m = \frac{(v_c - v_2)^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}, \quad \zeta_2 = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2. \quad (11.4)$$

Pre ostrú hranu pri veľkom pomere prierezov je $C_c \approx 0,62$ a $\zeta_2 \approx 0,38$. Merané hodnoty sú o niečo väčšie, pretože zahŕňajú aj trenie a nerovnomernosť prúdu. Pre technické výpočty možno použiť približný vzťah

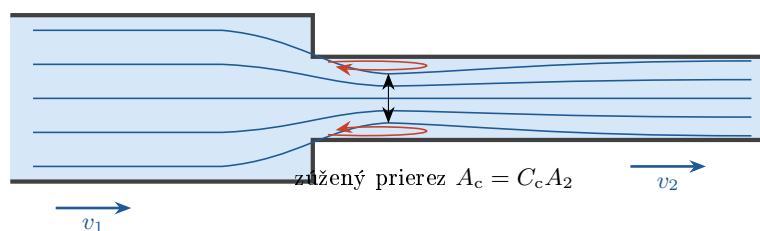
$$\zeta_2 \approx 0,5 \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right), \quad (11.5)$$

ktorý vystihuje priebeh meraných hodnôt v [1, tab. 8-4]. Súčiniteľ sa vzťahuje k rýchlosti v_2 v užšom potrubí.

Postupné zúženie (*konfúzor*) je málo stratové. Pri celkovom uhle 20° je $\zeta_2 \approx 0,30$ pre $d/D = 0,2$ a 0,10 pre $d/D = 0,8$ [1]. Zaoblením hrany sa strata zúženia ešte zmenší.

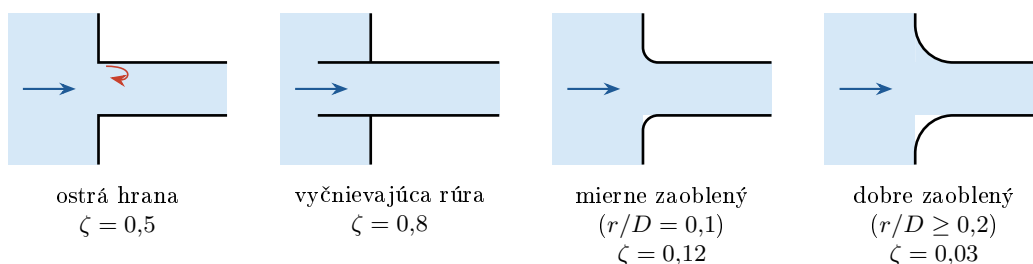
11.5 Vstup a výstup z potrubia

Vstup do potrubia z nádrže je zúženie s pomerom $A_2/A_1 \rightarrow 0$. Strata veľmi citlivo závisí od tvaru hrany (obr. 11.4). Pri ostrej hrane sa stratí polovica rýchlostnej výšky ($\zeta = 0,5$). Pri rúre



Obr. 11.3. Náhle zúženie: prúd sa za hranou zúži na prierez A_c a potom sa znova rozšíri. Strata vzniká pri tomto rozšírení.

vyčnievajúcej do nádrže musí časť tekutiny obtekať hranu o 180° a ζ vzrastie asi na 0,8. Už mierne zaoblenie hrany stratu výrazne zmenší a dobre zaoblený vstup ($r/D \geq 0,2$) má $\zeta \approx 0,03$ [1].



Obr. 11.4. Súčinitele strát rôznych tvarov vstupu z nádrže do potrubia [1].

Výstup z potrubia do nádrže je rozšírenie s $A_2 \rightarrow \infty$. Prúd sa v nádrži zmieša s okolitou tekutinou a jeho kinetická energia sa úplne premení na teplo. Súčiniteľ výstupu je preto

$$\zeta_v = \alpha, \quad (11.6)$$

teda asi 1 pri turbulentnom a 2 pri laminárnom prúdení (Coriolisov súčiniteľ, odd. 4.10). Tvar výstupu na strate nič nezmení [1]. Strata sa dá zmenšiť len zmenšením výstupnej rýchlosti, napríklad difúzorom.

Pozor – častá chyba

Pri voľbe bodov energetickej rovnice treba dávať pozor, aby sa výstupná strata nezapočítala dvakrát. Ak zvolíme bod 2 na hladine nádrže ($v_2 = 0$), treba do strát zahrnúť výstup so $\zeta = 1$. Ak zvolíme bod 2 vo výstupnom priereze potrubia, kinetická energia $v_2^2/2g$ vystupuje v rovnici priamo a výstupná strata sa nepočíta.

Aplikácia v OZE: vtokový objekt malej vodnej elektrárne

Na vtoku do privádzača MVE je *česlicová stena*, ktorá zachytáva plávajúce predmety. Pre čistú česlicovú stenu z prútov s hrúbkou s a svetlou vzdialenosťou b , sklonenú pod uhlom α od vodorovnej roviny, sa často používa Kirschmerov vzťah [19]

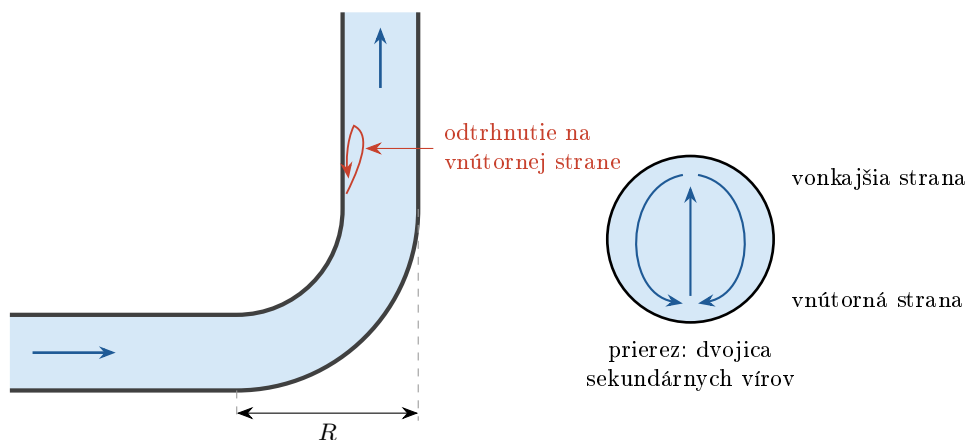
$$h_c = \beta \left(\frac{s}{b} \right)^{4/3} \sin \alpha \frac{v_0^2}{2g}, \quad (11.7)$$

kde v_0 je rýchlosť vody pred česlami a β je tvarový súčiniteľ prútov, napríklad 2,42 pre obdĺžnikové a 1,79 pre prúty s kruhovým prierezom. Pri čistých česliach je strata malá, zanesené česle ju však môžu zväčšiť mnohonásobne. Preto sa česle pravidelne čistia, často automatickým čistiacim strojom. Stratu na česliach treba sledovať meraním rozdielu hladín pred česlami a za nimi. Za česlami nasleduje vtok do privádzača, ktorý sa kvôli malej strate

tvaruje ako dobre zaoblený konfúzor.

11.6 Kolená

V kolene sa mení smer prúdenia. Na tekutinu v ňom pôsobí odstredivá sila. Tlak je preto pri vonkajšej stene väčší ako pri vnútornej. Pri vnútornej stene za ohybom prúd spomaľuje a môže sa odtrhnúť. Rýchla tekutina z jadra prúdu sa tlačí k vonkajšej stene, pomalá tekutina pri stenách sa vracia k vnútornej strane. Vzniká *sekundárne prúdenie* v podobe dvojice vírov v priereze (obr. 11.5), ktoré doznieva ďaleko za kolenom. Odtrhnutie aj sekundárne prúdenie spôsobujú stratu [1, 50].



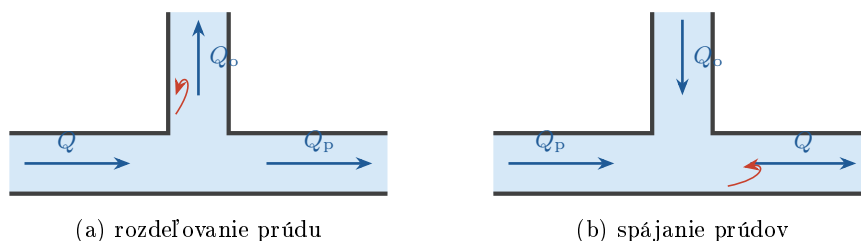
Obr. 11.5. Prúdenie v kolene: odtrhnutie na vnútornej strane a dvojica sekundárnych vírov v priereze.

Strata kolena závisí od pomeru polomeru ohybu a priemeru R/D , od uhla ohybu a od vyhotovenia. Ohýbané kolená s veľkým polomerom a hladké lisované a prírubové kolená majú malú stratu. Závitové tvarovky s ostrou vnútornou hranou a segmentové kolená zvarované z rezaných rúr (tzv. *kolená na pokos*) majú stratu väčšiu. Orientačné hodnoty uvádza tab. 11.1. Súčinitele nezahŕňajú trenie po dĺžke oblúka, ktoré sa počíta ako pre rovné potrubie s dĺžkou osi kolena. Ak sa priestor na plynulý ohyb nenájde, zmenšia stratu ostrého kolena usmerňovacie lopatky. Súčiniteľ pravouhlého kolena na pokos klesne z 1,1 na 0,2 [1].

11.7 T-kusy a odbočky

T-kusy rozdeľujú prúd do dvoch vetiev alebo ich spájajú (obr. 11.6). Strata závisí od smeru prúdenia, od pomeru prietokov vo vetvách a od pomeru prierezov. Rozlišujeme stratu pri prechode rovným smerom (priechod) a pri prechode do odbočky alebo z nej. Orientačne je $\zeta \approx 0,2$ (prírubový) až 0,9 (závitový) pre priechod a 1,0 až 2,0 pre odbočku [1].

Pri presnejších výpočtoch, napríklad rozdeľovačov a zberačov kolektorových polí alebo rozdeľovačov podlahového vykurovania, treba použiť súčinitele v závislosti od pomeru prietokov Q_o/Q [50]. Pri spájaní prúdov môže byť súčiniteľ pre jednu vetvu aj záporný. Rýchlejší prúd totiž strháva pomalší a odovzdáva mu časť svojej energie. Energia v súčte oboch vetiev však vždy klesá.



Obr. 11.6. Prúdenie v T-kuse: (a) rozdeľovanie a (b) spájanie prúdov. Q_p je prietok priechodom, Q_o prietok odbočkou.

11.8 Ventily a armatúry

Armatúry slúžia na uzatváranie (uzatváracie ventily, guľové kohúty, šupátka, klapky), na reguláciu prietoku (regulačné a vyvažovacie ventily, termostatické ventily), na ochranu (spätné klapky, poistné ventily) a na úpravu média (filtre, odlučovače nečistôt a vzduchu). Pri plne otvorených uzatváracích armatúrach chceme čo najmenšiu stratu. Regulačné armatúry naopak prietok riadia práve zmenou straty (kap. 12).

Tabuľka 11.1. Orientačné súčinitele miestnych odporov pre turbulentné prúdenie [1, tab. 8-4]. Pre konkrétne výrobky treba použiť údaje výrobcu.

prvok	ζ
vstup z nádrže: ostrá hrana / vyčnievajúca rúra / dobre zaoblený	0,5 / 0,8 / 0,03
výstup do nádrže (turbulentné / laminárne prúdenie)	1 / 2
koleno 90° hladké: prírubové / závitové	0,3 / 0,9
koleno 90° na pokos: bez lopatiek / s lopatkami	1,1 / 0,2
koleno 45° závitové	0,4
oblúk 180°: prírubový / závitový	0,2 / 1,5
T-kus, priechod: prírubový / závitový	0,2 / 0,9
T-kus, odbočka: prírubový / závitový	1,0 / 2,0
závitové spojenie (šróbenie)	0,08
guľový ventil, otvorený	0,05
šupátko: otvorené / $\frac{1}{4}$ / $\frac{1}{2}$ / $\frac{3}{4}$ zatvorené	0,2 / 0,3 / 2,1 / 17
priamy (sedlový) ventil, otvorený	10
rohový ventil, otvorený	5
spätná klapka	2

Z tabuľky vidíme veľké rozdiely. Plne otvorený guľový ventil má zanedbateľnú stratu, sedlový ventil rovnakej svetlosti stratí desať rýchlostných výšok. Pri čiastočnom zatvorení strata všetkých armatúr prudko rastie. Šupátko zatvorené na tri štvrtiny má $\zeta = 17$.

Prietokový súčiniteľ K_v

V európskej praxi sa hydraulické vlastnosti armatúr neudávajú súčiniteľom ζ , ale *prietokovým súčiniteľom* K_v [m³/h]. Je to prietok vody (s hustotou 1 000 kg/m³), ktorý armatúrou pretečie pri tlakovej strate 1 bar. Pretože strata je úmerná Q^2 , platí

$$\Delta p = \left(\frac{Q}{K_v} \right)^2 \quad [\Delta p] = \text{bar}, [Q] = [K_v] = \text{m}^3/\text{h}. \quad (11.8)$$

Pre inú hustotu sa pravá strana násobí pomerom $\rho/1\,000\text{ kg/m}^3$. Hodnota pri plnom otvorení ventilu sa označuje K_{vs} . Porovnaním (11.8) s (11.1) dostaneme prepočet

$$\zeta = 1,6 \cdot 10^{-3} \frac{D^4}{K_v^2} \quad [D] = \text{mm}, [K_v] = \text{m}^3/\text{h}, \quad (11.9)$$

kde D je vnútorný priemer pripojovacieho potrubia. V americkej literatúre sa používa obdobný súčiniteľ C_v v amerických jednotkách, $K_v \approx 0,865 C_v$.

Príklad 11.2 – Zónový ventil s danou hodnotou K_{vs}

Zónový ventil s $K_{vs} = 2,5\text{ m}^3/\text{h}$ je osadený v potrubí DN 20 ($D = 21,7\text{ mm}$). Preteká ním $0,9\text{ m}^3/\text{h}$ vody. Určte tlakovú stratu a súčiniteľ ζ .

Riešenie. Podľa (11.8) je $\Delta p = (0,9/2,5)^2 = 0,130\text{ bar} = 13,0\text{ kPa}$. Súčiniteľ podľa (11.9):

$$\zeta = 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{21,7^4}{2,5^2} = 56,8.$$

Ventil stratí takmer 57 rýchlostných výšok. Kontrola: $v = 0,676\text{ m/s}$, $\zeta \rho v^2/2 = 56,8 \cdot 1000 \cdot 0,676^2/2 = 13,0\text{ kPa}$. Na zónovom ventile sa teda stratí viac ako na 20 m potrubia DN 20 (pr. 10.5). ■

11.9 Metóda ekvivalentnej dĺžky

Miestnu stratu možno nahradiť stratou trením v rovnom potrubí takej dĺžky, ktorá má rovnakú stratu. Z rovnosti $\zeta v^2/2g = \lambda (L_e/D) v^2/2g$ vyplýva *ekvivalentná dĺžka*

$$L_e = \frac{\zeta D}{\lambda}. \quad (11.10)$$

Celkovú stratu potom vypočítame ako stratu trením v potrubí s dĺžkou $L + \sum L_e$. Metóda je názorná a v projekčnej praxi sa často používa, napríklad v tvare „každé koleno zodpovedá 1 m potrubia“. Treba však mať na pamäti, že L_e závisí od λ , a teda od Re a drsnosti. Tabuľkové ekvivalentné dĺžky platia len pre podmienky, pre ktoré boli určené. Metóda súčiniteľov ζ je všeobecnejšia [1]. Paušálne zvýšenie dĺžky potrubia o určité percento na miestne odpory, aké sme použili v pr. 10.6, je vhodné len pre predbežný návrh dlhých potrubí s malým počtom tvaroviek.

Príklad 11.3 – Ekvivalentná dĺžka kolena

Potrubím DN 25 ($D = 27,3\text{ mm}$, $k = 0,045\text{ mm}$) preteká $1,2\text{ m}^3/\text{h}$ vody s teplotou 70°C . Určte ekvivalentnú dĺžku závitového kolena so $\zeta = 0,9$.

Riešenie. $v = 0,569\text{ m/s}$, $Re = 0,569 \cdot 0,0273/0,413 \cdot 10^{-6} = 37\,600$, z Colebrookovej rovnice $\lambda = 0,0266$.

$$L_e = \frac{0,9 \cdot 0,0273}{0,0266} = 0,93\text{ m}.$$

Jedno koleno zodpovedá asi 1 m potrubia, teda približne $34 D$. ■

11.10 Súčet miestnych a dĺžkových strát

Celkovú stratu medzi dvoma bodmi systému dostaneme súčtom strát trením vo všetkých úsekoch a všetkých miestnych strát (rov. (10.15)):

$$h_z = \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_j \zeta_j \frac{v_j^2}{2g} + \sum_k \frac{\Delta p_k}{\rho g}, \quad (11.11)$$

kde posledný člen zahŕňa prvky zadané priamo tlakovou stratou (výmenníky, kotly, kolektory, prvky s údajom K_v). Pre potrubie stáleho priemeru sa prvé dva členy zlúčia:

$$h_z = \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (11.12)$$

Toto je vzťah (6.13) z kap. 6, ktorý teraz vieme vyčíslieť.

Príklad 11.4 – Okruh kotol – akumulčná nádrž

Vyčíslite tlakovú stratu okruhu z úvodnej otázky. Potrubie je oceľové DN 25 ($D = 27,3$ mm) s dĺžkou 12 m, voda má 70°C ($\rho = 977,5$ kg/m³), prietok je 1,2 m³/h. Okruh obsahuje 14 závitových kolien ($\zeta = 0,9$), 4 guľové ventily (0,05), spätnú klapku (2), dva T-kusy v priechode (0,9), vstup do nádrže a výstup z nej (0,5+1). Filter má $K_v = 10$ m³/h, zmiešavací ventil $K_{vs} = 6,3$ m³/h. Kotol má podľa výrobcu stratu 5 kPa pri 1,5 m³/h.

Riešenie. Z pr. 11.3: $v = 0,569$ m/s, $\lambda = 0,0266$, dynamický tlak $\rho v^2/2 = 158,5$ Pa. Trenie: $\lambda L/D = 0,0266 \cdot 12/0,0273 = 11,7$, teda 1,85 kPa. Miestne odpory v potrubí:

$$\sum \zeta = 14 \cdot 0,9 + 4 \cdot 0,05 + 2 + 2 \cdot 0,9 + 1,5 = 18,1 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 18,1 \cdot 158,5 = 2,87 \text{ kPa}.$$

Prvky s údajmi výrobcov:

filter:	$\Delta p = (1,2/10)^2 = 0,0144 \text{ bar} = 1,44 \text{ kPa},$
zmiešavací ventil:	$\Delta p = (1,2/6,3)^2 = 0,0363 \text{ bar} = 3,63 \text{ kPa},$
kotol:	$\Delta p = 5 \cdot (1,2/1,5)^2 = 3,20 \text{ kPa}.$

Celková strata je 13,0 kPa, teda $h_z = 1,35$ m. Trenie v potrubí tvorí len 14 % celkovej straty (obr. 11.7). Pripočítanie 20 % na miestne odpory by dalo 2,2 kPa, teda šesťkrát menej, než je skutočnosť. Tým je zodpovedaná úvodná otázka. ■

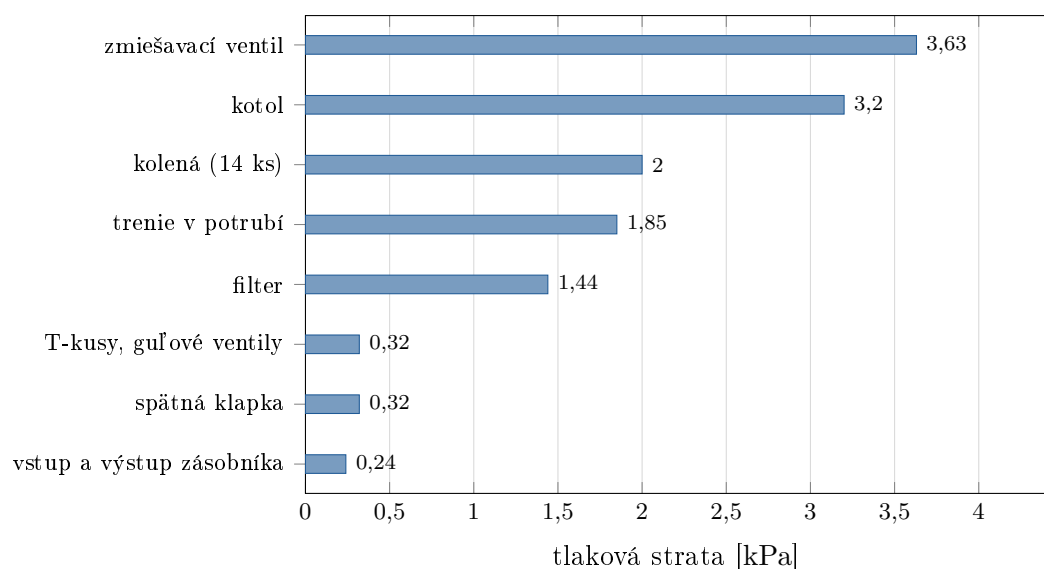
11.11 Praktické údaje výrobcov

Pre zariadenia so zložitou vnútornou geometriou (kotly, výmenníky tepla, kolektory, merače tepla, filtre, tepelné čerpadlá) výrobcovia udávajú tlakovú stratu:

- hodnotou K_v alebo K_{vs} (armatúry, filtre),
- jedným bodom – stratou pri menovitom prietoku (kotly, výmenníky, tepelné čerpadlá),
- diagramom Δp – Q (kolektory, merače, výmenníky), často v logaritmickej mierke, kde je kvadratická závislosť priamkou so sklonom 2.

Ak je strata daná jedným bodom ($Q_0, \Delta p_0$), pre iný prietok pri turbulentnom prúde platí

$$\Delta p = \Delta p_0 \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^2. \quad (11.13)$$



Obr. 11.7. Podiel jednotlivých prvkov na tlakovej strate okruhu kotol – akumulčná nádrž z pr. 11.4.

Pri laminárnom alebo prechodovom prúde v úzkych kanáloch (doskové výmenníky pri malom prietoku, absorbéry kolektorov) je exponent menší, bližší k 1. Výrobcom preto niekedy udávajú celú krivku alebo vzťah $\Delta p = aQ + bQ^2$.

Pozor – častá chyba

Údaje výrobcov platia spravidla pre vodu s teplotou okolo 20 °C. Pri nemrznúcich zmesiach s väčšou viskozitou je strata väčšia, najmä v prvkoch s úzkymi kanálmi. Niektorí výrobcovia udávajú korekčné súčinitele pre zmesi glykolu. Ak nie sú k dispozícii, treba stratu odhadnúť na strane bezpečnosti. Pri kvadratickej závislosti sa aspoň prepočíta pomerom hustôt.

11.12 Kedy miestne odpory nemožno zanedbať

Rýchle posúdenie umožňuje porovnanie súčtu súčiniteľov $\sum \zeta$ s „súčiniteľom trenia“ celého potrubia $\lambda L/D$ (rov. (11.12)). Pri $\lambda \approx 0,02$ až $0,03$ zodpovedá $\lambda L/D = 1$ dĺžke potrubia 30 až 50 priemerov. Miestne odpory nemožno zanedbať:

- v krátkych potrubíach s mnohými tvarovkami a armatúrami (kotolne, strojovne, čerpadlové skupiny, rozdeľovače), kde $\sum \zeta$ býva porovnateľné s $\lambda L/D$ alebo väčšie (pr. 11.4),
- pri čiastočne zatvorených a regulačných armatúrach, ktoré majú ζ desiatky až stovky,
- pri zariadeniach s vlastnou tlakovou stratou (výmenníky, kolektory, kotly, merače),
- pri výtoku do atmosféry alebo do nádrže, kde môže byť výstupná strata významnou časťou spádu, napríklad pri krátkych násoskách a výpustiach,
- pri laminárnom prúde viskózných kvapalín, kde sú súčinitele väčšie ako tabuľkové.

Naopak v dlhých potrubíach s malým počtom tvaroviek, ako sú privádzače MVE, diaľkové vodovody a hlavné vetvy tepelných sietí, tvoria miestne straty zvyčajne len 5 % až 20 % celkovej straty.

Príklad 11.5 – Miestne straty v privádzači MVE

Privádzač z pr. 10.4 ($D = 0,6 \text{ m}$, $L = 300 \text{ m}$, $Q = 0,5 \text{ m}^3/\text{s}$, strata trením $1,16 \text{ m}$) má na vtoku česle z obdĺžnikových prútov ($s = 12 \text{ mm}$, $b = 40 \text{ mm}$, sklon 60°) s nátokovou rýchlosťou $0,8 \text{ m/s}$. Ďalej má vtok s ostrou hranou, dve kolená so $\zeta = 0,3$ a klapku pred turbínou so $\zeta = 0,3$. Určte miestne straty a ich podiel na celkovej strate.

Riešenie. Rýchlostná výška v potrubí je $v^2/2g = 1,768^2/19,62 = 0,159 \text{ m}$. Česle podľa (11.7):

$$h_c = 2,42 \cdot (12/40)^{4/3} \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{0,8^2}{19,62} = 2,42 \cdot 0,201 \cdot 0,866 \cdot 0,0326 = 0,014 \text{ m}.$$

Ostatné miestne straty: $(0,5 + 2 \cdot 0,3 + 0,3) \cdot 0,159 = 0,223 \text{ m}$. Spolu sú miestne straty $0,24 \text{ m}$, teda 17% celkovej straty $1,40 \text{ m}$. Zaoblením vtoku ($\zeta = 0,03$) by sa strata zmenšila o $0,075 \text{ m}$. Pri prietoku $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ to zodpovedá asi $0,3 \text{ kW}$ výkonu. Výstupná kinetická energia z turbíny sa tu nezapočítava, pretože patrí k účinnosti turbíny a savky (kap. 14). ■

Zhrnutie kapitoly

- Miestne straty vznikajú odtrhnutím prúdu, vírmi a sekundárnym prúdením za tvarovkami a armatúrami. Disipácia prebieha na dĺžke mnohých priemerov za prekážkou.
- Vyjadrujú sa súčiniteľom ζ ako násobok rýchlostnej výšky, $h_m = \zeta v^2/2g$. Pri zmenách prierezu treba uviesť referenčnú rýchlosť.
- Pri náhlom rozšírení sa stratí kinetická energia rozdielu rýchlostí (Bordova–Carnotova strata), $\zeta_1 = (1 - A_1/A_2)^2$. Pri výtoku do nádrže sa stratí celá kinetická energia, $\zeta = \alpha$.
- Strata pri zúžení vzniká až pri rozšírení zo zúženého prierezu. Vstup s ostrou hranou má $\zeta = 0,5$, zaoblený len asi $0,03$.
- Súčinitele kolien, T-kusov a armatúr sú empirické a pre konkrétne výrobky sa berú z údajov výrobcov. Európski výrobcovia armatúr udávajú hodnotu K_v , pričom $\Delta p = (Q/K_v)^2$.
- Miestnu stratu možno vyjadriť aj ekvivalentnou dĺžkou $L_e = \zeta D/\lambda$.
- V kompaktných systémoch (kotle, čerpadlové skupiny) miestne straty často prevládajú nad trením. V dlhých potrubíach tvoria len niekoľko až desiatky percent celkovej straty.

Kontrolné otázky

1. Aký je fyzikálny mechanizmus miestnej straty? Prečo je strata pri rozšírení väčšia ako pri zúžení?
2. Ako sa miestna strata určí z nameraného priebehu tlaku pozdĺž potrubia?
3. Prečo treba pri súčiniteli ζ uvádzať referenčnú rýchlosť?
4. Odvoďte Bordovu–Carnotovú stratu. Ktoré predpoklady sa pri odvodení použijú?
5. Čo je zúžený prierez (vena contracta) a ako súvisí so stratou pri náhlom zúžení a na vstupe do potrubia?
6. Prečo tvar výstupu z potrubia do nádrže nemá vplyv na stratu?

7. Prečo je súčiniteľ výstupu pri laminárnom prúde rovný 2?
8. Čo spôsobuje stratu v kolene? Ako ju možno zmenšiť?
9. Ako je definovaná hodnota K_v ? Ako sa prepočíta na ζ ?
10. Aké sú výhody a nevýhody metódy ekvivalentnej dĺžky?
11. Kedy nemožno miestne straty zanedbať? Uveďte príklady zo zariadení OZE.
12. Prečo treba česle vtokového objektu MVE pravidelne čistiť?

Úlohy na precvičenie

1. Potrubie sa náhle rozširuje z DN 25 ($D = 27,3$ mm) na DN 50 ($D = 53,1$ mm). Prietok vody je 1 L/s. Určte stratu, súčinitele ζ_1 a ζ_2 a nárast tlaku. [0,081 m; 0,541; 7,75; 0,57 kPa]
2. Voda vyteká z potrubia s priemerom 100 mm rýchlosťou 1,5 m/s pod hladinu nádrže. Aká je strata pri výtoku? O koľko by sa zmenšila difúzorom, ktorý zväčší výstupný priemer na 150 mm so súčiniteľom difúzora 0,05 (vzhľadom na vstupnú rýchlosť)? [0,115 m; 0,086 m]
3. Určte stratu náhleho zúženia z DN 50 ($D = 53,1$ mm) na DN 25 ($D = 27,3$ mm) pri prietoku 1 L/s podľa (11.5). [$\zeta_2 = 0,37$; 0,054 m]
4. Ventil s $K_{vs} = 4$ m³/h je v potrubí DN 25 ($D = 27,3$ mm). Určte stratu pri prietoku 1,5 m³/h a súčiniteľ ζ . [14,1 kPa; 55,5]
5. Aký musí byť K_{vs} vyvažovacieho ventilu, ktorý má pri prietoku 0,6 m³/h ubrať 8 kPa? [2,12 m³/h]
6. Doskový výmenník má podľa výrobcu stratu 18 kPa pri 2 m³/h. Aká bude strata pri 1,4 m³/h za predpokladu kvadratickej závislosti? Určte jeho K_v . [8,8 kPa; 4,71 m³/h]
7. Určte ekvivalentnú dĺžku spätnej klapky ($\zeta = 2$) v potrubí DN 50 ($D = 53,1$ mm) pri $\lambda = 0,022$. [4,8 m]
8. Voda vyteká z nádrže vodorovným potrubím s priemerom 50 mm a dĺžkou 20 m do atmosféry. Hladina je 4 m nad osou výtoku, $\lambda = 0,025$. Porovnajte prietok pri vstupe s ostrou hranou a so zaobleným vstupom ($\zeta = 0,03$). [5,13 L/s; 5,24 L/s]
9. Solárna čerpadlová skupina má guľové ventily, spätný ventil ($\zeta = 4$), prietokomer s $K_v = 1,5$ m³/h a výmenník so stratou 10 kPa pri 0,6 m³/h. Určte stratu prietokomeru a výmenníka pri 0,4 m³/h vody. [7,1 kPa; 4,4 kPa]
10. Určte stratu čistých česlí z prútov s kruhovým prierezom ($\beta = 1,79$), $s = 10$ mm, $b = 30$ mm, sklon 70°, pri nátokovej rýchlosti 1 m/s. Koľkokrát sa strata zväčší, ak zanesenie zmenší svetlú vzdialenosť na polovicu a nátoková rýchlosť sa nezmení? [0,020 m; 2,5×]
11. V potrubí DN 20 s dĺžkou 8 m ($\lambda = 0,03$) je 10 kolien ($\zeta = 0,9$) a 2 guľové ventily. Aký podiel celkovej straty tvoria miestne odpory? [45 %]
12. Porovnajte súčiniteľ ζ plne otvoreného sedlového ventilu ($\zeta = 10$) a guľového ventilu (0,05) v potrubí DN 32 ($D = 36$ mm) pri rýchlosti 1 m/s. Aký je rozdiel tlakových strát? Koľko metrov potrubia ($\lambda = 0,025$) zodpovedá sedlovému ventilu? [4,98 kPa; 14,4 m]

Kapitola 12

Potrubné siete

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent určí výslednú charakteristiku potrubí zapojených do série a paralelne a rozdelenie prietoku medzi paralelné vetvy. Zostaví uzlové a slučkové rovnice potrubnej siete a vyrieši jednoduchú sieť iteratívne, aj Hardyho–Crossovou metódou. Vysvetlí tlakové pomery v uzavretom okruhu a význam polohy expanznej nádoby, určí kritickú vetvu rozvetvanej siete a navrhne hydraulické vyvažovanie. Pozná úlohu regulačných ventilov a ich autority a posúdi, ako sa sieť správa pri zmene prevádzkového stavu.

Kľúčové pojmy

sériové a paralelné zapojenie, hydraulický odpor, uzlová a slučková rovnica, charakteristika potrubného systému, statická výška, neutrálny bod, expanzná nádoba, rozvetvená a okružová sieť, kritická vetva, Hardyho–Crossova metóda, hydraulické vyvažovanie, vyvažovací ventil, regulačný ventil, autorita ventilu, tlakový diagram siete

Skutočné potrubné systémy zriedka tvorí jediné potrubie. Solárne kolektorové pole má desiatky paralelne zapojených kolektorov, vykurovací systém desiatky vykurovacích telies, pole zemných vrtov tepelného čerpadla niekoľko až stovky vrtov. Tepelná sieť spája zdroj so stovkami odberateľov. V takých sieťach nestačí poznať celkovú tlakovú stratu. Treba vedieť, ako sa prietok *rozdelí* medzi vetvy, a zabezpečiť, aby každý spotrebič dostal potrebné množstvo teplonosnej látky.

Kapitola využíva poznatky z kap. 10 a 11. Strata každého úseku siete sa vyjadrí v tvare $\Delta p = RQ^2$ a sieť sa rieši pomocou dvoch zákonov, ktoré poznáme z elektrických obvodov. Na rozdiel od nich je však závislosť medzi „napätím“ (tlakovou stratou) a „prúdom“ (prietokom) nelineárna. Výklad nadväzuje na [1, 5, 29].

Na zamyslenie

V dome s tromi vykurovacími vetvami sú miestnosti na konci najdlhšej vetvy chladné, kým v blízkosti kotolne sa prehrieva. Majiteľ nechal vymeniť obehové čerpadlo za výkonnejšie. Chladné miestnosti sa oteplili len málo, spotreba elektriny vzrástla a termostatické ventily v blízkych miestnostiach začali písať. Čo sa v sieti deje a ako to riešiť správne?

Poznámka

Jednoduché siete sa dajú riešiť v tabuľkovom procesore alebo v Pythone (odd. 12.13). Fyzikálny model, teda rovnice pre uzly a vetvy, však musí študent najprv vedieť zostaviť

ručne.

12.1 Potrubia v sérii

Pri turbulentnom prúde je strata každého úseku potrubia, armatúry alebo zariadenia približne úmerná druhej mocnine prietoku (rov. (10.16)):

$$h = R Q^2 \quad \text{alebo} \quad \Delta p = R Q^2, \quad (12.1)$$

kde R je *hydraulický odpor*. Vo výškovom tvare s Q v m^3/s má jednotku s^2/m^5 . V tepelnej technike sa častejšie používa tlakový tvar s Δp v kPa a Q v m^3/h . Pre prvok s hodnotou K_v je $R = 100/K_v^2$ (rov. (11.8)). Z (10.16) pre úsek potrubia s dĺžkou L , priemerom D a súčtom miestnych súčiniteľov $\sum \zeta$ platí

$$R = \frac{8}{\pi^2 g D^4} \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right) \quad [\text{s}^2/\text{m}^5]. \quad (12.2)$$

Pri *sériovom* zapojení (obr. 12.1a) preteká všetkými prvkami rovnaký prietok a straty sa sčítajú:

$$Q = Q_1 = Q_2 = \dots, \quad h = h_1 + h_2 + \dots = \left(\sum_i R_i \right) Q^2. \quad (12.3)$$

Výsledný odpor je súčtom odporov, $R_s = \sum R_i$. Graficky dostaneme charakteristiku sériového spojenia sčítaním strát pri rovnakom prietoku, teda „zvislým“ sčítaním kriviek.

Príklad 12.1 – Dve potrubia v sérii

Voda s prietokom 2 L/s prúdi potrubím DN 50 ($D = 53,1 \text{ mm}$, $L = 100 \text{ m}$, $\lambda = 0,022$, $\sum \zeta = 5$) a za ním potrubím DN 40 ($D = 41,9 \text{ mm}$, $L = 50 \text{ m}$, $\lambda = 0,024$, $\sum \zeta = 3$). Určte odpory úsekov a celkovú stratu.

Riešenie. Podľa (12.2):

$$R_1 = \frac{8 (0,022 \cdot 100/0,0531 + 5)}{\pi^2 \cdot 9,81 \cdot 0,0531^4} = 4,83 \cdot 10^5 \text{ s}^2/\text{m}^5, \quad R_2 = 8,48 \cdot 10^5 \text{ s}^2/\text{m}^5.$$

Celková strata: $h = (R_1 + R_2) Q^2 = 1,331 \cdot 10^6 \cdot 0,002^2 = 5,32 \text{ m}$. Kratšie potrubie s menším priemerom má takmer dvojnásobný odpor. ■

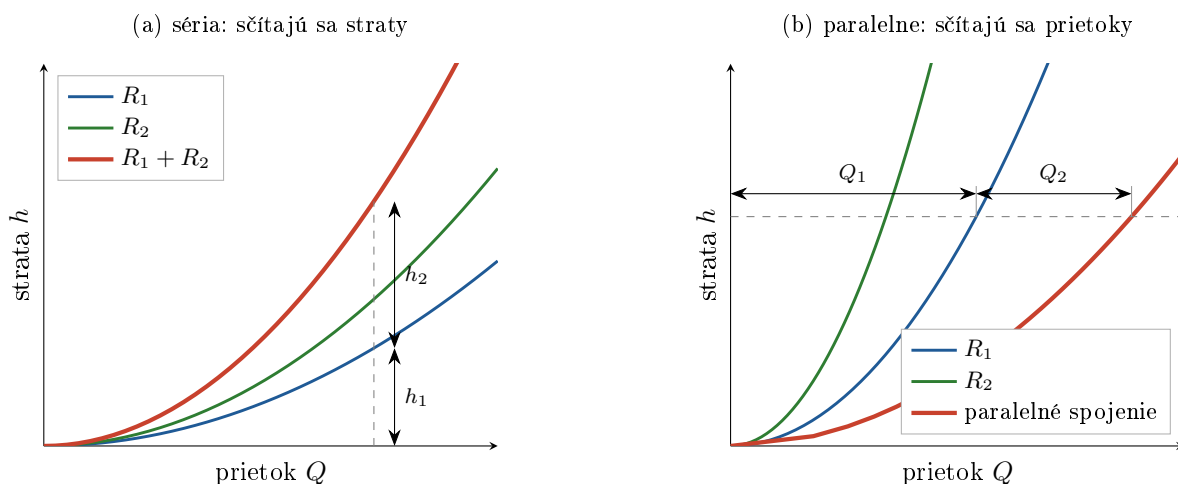
12.2 Paralelné potrubia

Pri *paralelnom* zapojení (obr. 12.1b) majú všetky vetvy spoločný začiatok aj koniec. Rozdiel energetických výšok medzi uzlami je jeden, takže *strata je vo všetkých vetvách rovnaká*. Prietoky sa sčítajú:

$$h = h_1 = h_2 = \dots, \quad Q = Q_1 + Q_2 + \dots = \sqrt{h} \sum_i \frac{1}{\sqrt{R_i}}. \quad (12.4)$$

Výsledný odpor R_p paralelného spojenia je daný vzťahom

$$\frac{1}{\sqrt{R_p}} = \sum_i \frac{1}{\sqrt{R_i}}, \quad (12.5)$$



Obr. 12.1. Charakteristiky potrubí zapojených (a) do série, (b) paralelne.

a prietok sa medzi vetvy rozdelí v pomere

$$\frac{Q_i}{Q} = \frac{1/\sqrt{R_i}}{\sum_j 1/\sqrt{R_j}}. \quad (12.6)$$

Vetva s menším odporom dostane väčší prietok. Pomer prietokov však závisí len od *odmocniny* pomeru odporov. Ak má jedna vetva štvornásobný odpor, dostane polovičný prietok. Dve rovnaké paralelné vetvy majú odpor $R/4$, teda pri rovnakom celkovom prietoku štvrtinovú stratu.

Príklad 12.2 – Dve paralelné vetvy kolektorového poľa

Dva rady kolektorov sú zapojené paralelne. Odpor bližšieho radu vrátane prípojok je $R_A = 2,0 \text{ kPa}/(\text{m}^3/\text{h})^2$, vzdialenejšieho $R_B = 4,5 \text{ kPa}/(\text{m}^3/\text{h})^2$. Celkový prietok je $2 \text{ m}^3/\text{h}$. Určte stratu a prietoky v radoch.

Riešenie. Podľa (12.5): $1/\sqrt{R_p} = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{4,5} = 0,7071 + 0,4714 = 1,1785$, teda $R_p = 0,720$. Strata je $\Delta p = 0,720 \cdot 2^2 = 2,88 \text{ kPa}$. Prietoky:

$$Q_A = \sqrt{2,88/2,0} = 1,2 \text{ m}^3/\text{h}, \quad Q_B = \sqrt{2,88/4,5} = 0,8 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Vzdialenejší rad dostane o tretinu menej ako bližší. Jeho kolektory budú mať vyššiu teplotu a menšiu účinnosť. Nápravou je Tichelmannovo zapojenie (obr. 5.4), pri ktorom majú oba rady rovnakú dĺžku prípojok, alebo vyvažovací ventil v bližšom rade (odd. 12.9). ■

12.3 Uzlová bilancia prietoku

Všeobecná potrubná sieť sa skladá z *uzlov* (miest spojenia, odberov a prítokov) a *vetiev* (úsekov medzi uzlami). Sieť bez uzavretých slučiek je *rozvetvená* (lúčová). Sieť so slučkami je *okružná* (zokružovaná). Riešenie siete znamená určiť prietoky vo všetkých vetvách a tlaky vo všetkých uzloch. Na to slúžia dve skupiny rovníc:

1. **Uzlové rovnice** (bilancia hmotnosti v uzle, odd. 5.7). Súčet prietokov do uzla a z neho, vrátane odberov, je nulový:

$$\sum_{\text{vetvy v uzle}} Q_i + Q_{\text{ext}} = 0. \quad (12.7)$$

2. **Slučkové rovnice** (bilancia energie). Pri obehu po ľubovoľnej uzavretej slučke sa vrátíme do toho istého bodu, súčet strát so znamienkom podľa smeru prúdenia je preto nulový. Ak slučka obsahuje čerpadlo, pripočíta sa jeho dopravná výška:

$$\sum_{\text{slučka}} \pm R_i Q_i |Q_i| = \sum H_{\text{č}}. \quad (12.8)$$

Zápis $Q|Q|$ zabezpečí správne znamienko straty pri prúdení proti zvolenému kladnému smeru. Rovnice sú analógiou Kirchhoffových zákonov (tab. 12.1).

Tabuľka 12.1. Analógia potrubnej siete a elektrického obvodu.

potrubná sieť	elektrický obvod
prietok Q	prúd I
tlaková strata Δp , výška h	napätie U
čerpadlo	zdroj napätia
hydraulický odpor, $\Delta p = R Q^2$ (nelineárny)	odpor, $U = R I$ (lineárny)
sériové spojenie: $R_s = \sum R_i$	$R_s = \sum R_i$
paralelné spojenie: $1/\sqrt{R_p} = \sum 1/\sqrt{R_i}$	$1/R_p = \sum 1/R_i$
uzlová rovnica	1. Kirchhoffov zákon
slučková rovnica	2. Kirchhoffov zákon

Sieť s n uzlami a m vetvami má $n-1$ nezávislých uzlových rovníc (posledná vyplýva z ostatných) a $m-n+1$ nezávislých slučiek. Spolu je to m rovníc pre m neznámych prietokov. Rozvetvená sieť nemá slučky ($m = n-1$). Prietoky v nej určia samotné uzlové rovnice postupne od koncov siete k zdroju.

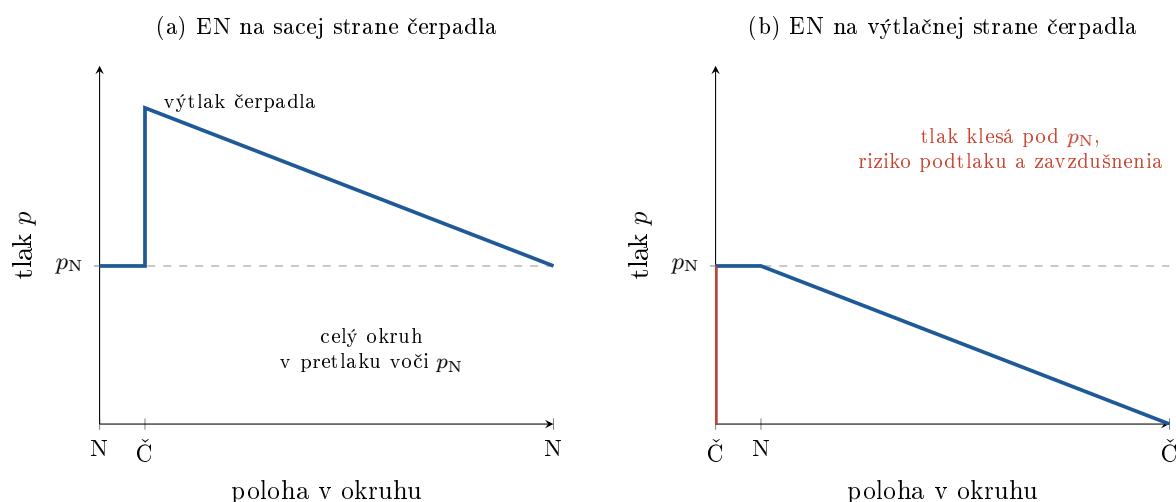
12.4 Tlakové pomery v sieti

Uzlové a slučkové rovnice určia prietoky a rozdiely tlakov. Absolútnu úroveň tlaku však neurčia. V otvorenom systéme je daná tlakom na hladine nádrže. V uzavretom okruhu ju určuje *expanzná nádoba* alebo iné zariadenie na udržiavanie tlaku. Bod jej pripojenia sa nazýva *neutrálny bod* N. Tlak v ňom zostáva stály bez ohľadu na to, či čerpadlo beží. Mení sa len s teplotou a objemom kvapaliny v okruhu (kap. 3).

Od polohy neutrálneho bodu závisí rozloženie tlaku v okruhu (obr. 12.2). Ak je expanzná nádoba pripojená na *sacej* strane čerpadla, čerpadlo tlak zvyšuje a celý okruh je pri prevádzke v pretlaku voči p_N . Ak je pripojená na *výtlačnej* strane, tlak v celom okruhu za neutrálnym bodom klesá až pod p_N . Na sacej strane čerpadla je potom najnižší tlak v okruhu. Môže vzniknúť podtlak, cez odvzdušňovacie ventily a netesnosti sa môže nasávať vzduch a na sacej strane čerpadla hrozí kavitácia (kap. 13). Preto sa expanzná nádoba pripája spravidla na sacej strane čerpadla, v solárnych systémoch do spiatočky pred čerpadlo.

Okrem toho musí tlak v každom mieste siete spĺňať technické požiadavky:

- v najvyššom bode musí byť pretlak, aby sa nenasával vzduch,
- v horúcovodných a solárnych okruhoch musí byť tlak väčší ako tlak sýtej pary pri najvyššej teplote, aby kvapalina nevrela,
- na sacej strane čerpadla musí byť dostatočná rezerva proti kavitácii (NPSH, kap. 13),
- v najnižšom bode nesmie tlak prekročiť dovolený tlak potrubia, armatúr a zariadení.



Obr. 12.2. Priebek tlaku v uzavretom okruhu. N – neutrálny bod (pripojenie expanznej nádoby, EN), Č – čerpadlo. Priebek výšky a statický tlak od polohy nad čerpadlom sú pre názornosť vynechané.

Tlakové pomery sa znázorňujú v *tlakovom diagrame* siete (odd. 12.12), ktorý je obdobou piezometrickej čiary (odd. 6.14).

12.5 Charakteristika potrubného systému

Závislosť dopravnej výšky, ktorú systém potrebuje, od prietoku sa nazýva *charakteristika potrubného systému*. Pre otvorený systém, napríklad čerpanie vody zo studne do nádrže, z rozšírenej energetickej rovnice (6.16) vyplýva

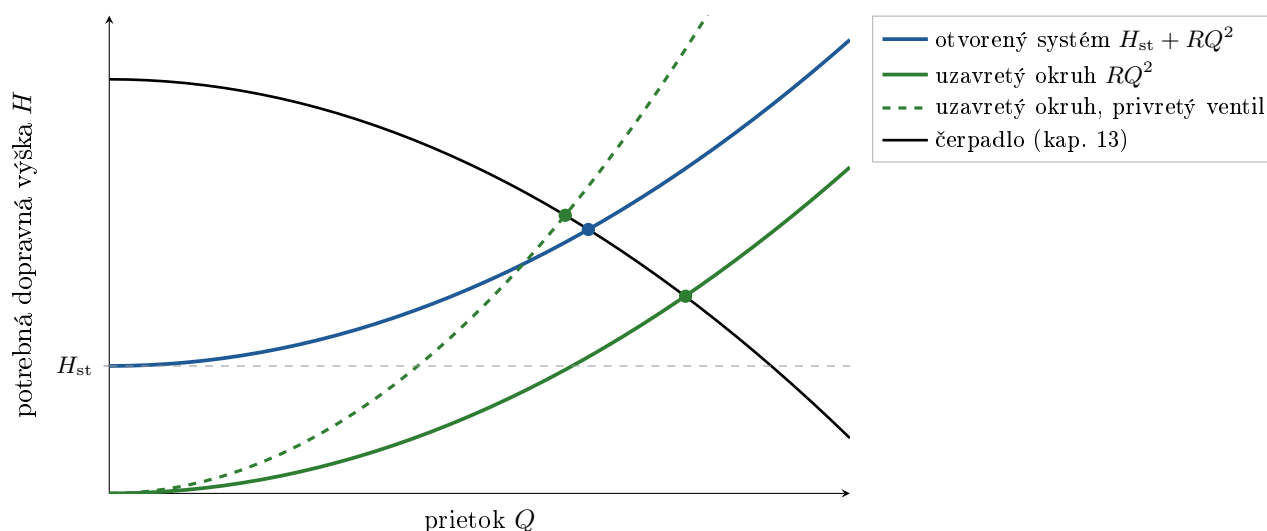
$$H_{\text{sys}}(Q) = \underbrace{(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho g}}_{H_{\text{st}}} + RQ^2, \quad (12.9)$$

kde H_{st} je *statická výška* (geodetický rozdiel hladín a rozdiel tlakov nad nimi) a R je výsledný odpor celej trasy. V uzavretom okruhu je $H_{\text{st}} = 0$ (rov. (6.18)) a charakteristika je parabola s vrcholom v počiatku (obr. 12.3).

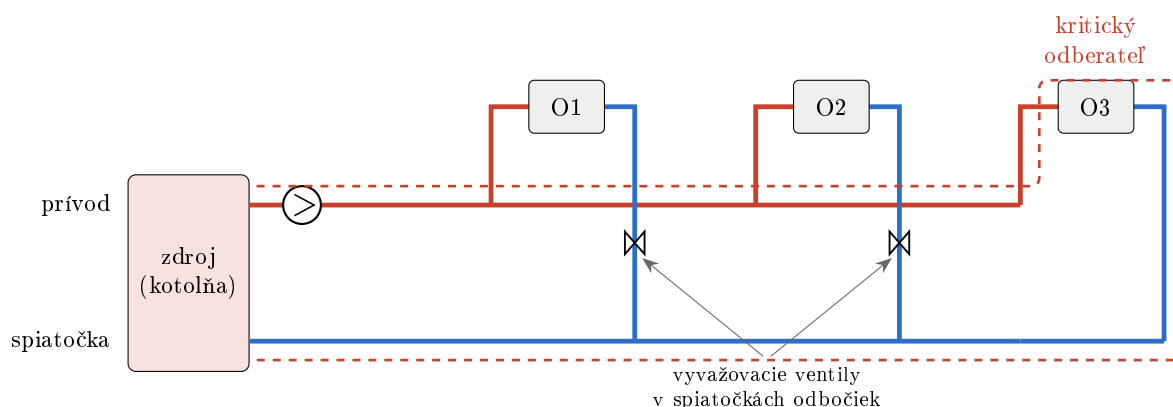
Charakteristika systému je jeden z dvoch podkladov pre voľbu čerpadla. Druhým je charakteristika čerpadla. Ich priesečník určuje *pracovný bod*, v ktorom čerpadlo dodá presne toľko energie, koľko systém pri danom prietoku potrebuje. Podrobne sa mu venuje kap. 13. Charakteristiku systému zmeníme zmenou odporu (privretie ventilu, zanesenie filtra, uzavretie vetvy) alebo zmenou statickej výšky (kolísanie hladín).

12.6 Rozvetvené siete

Vykurovacie sústavy, rozvody solárnych a geotermálnych systémov a väčšina malých tepelných sietí sú *rozvetvené*. Z hlavného potrubia odbočujú vetvy k jednotlivým odberateľom (obr. 12.4). Každý odberateľ má prírodné a vratné potrubie. Prietoky vo vetvách sú dané potrebou odberateľov, $Q_i = \dot{Q}_i / (\rho c_p \Delta T_i)$. Prietoky v hlavných úsekoch dostaneme z uzlových rovníc sčítaním od konca siete.



Obr. 12.3. Charakteristiky potrubných systémov. Priesečník s charakteristikou čerpadla je pracovný bod (kap. 13). Privretím ventilu sa zväčší odpor a pracovný bod sa posunie k menšiemu prietoku.



Obr. 12.4. Rozvetvená sieť s tromi odberateľmi. Čiarkovane je vyznačená kritická vetva, teda cesta s najväčšou stratou.

Čerpadlo musí pokryť stratu na ceste od zdroja k odberateľovi a späť. Tá je pre každého odberateľa iná. Dopravnú výšku čerpadla určuje cesta s najväčšou stratou, ktorá sa nazýva *kritická vetva* (kritický okruh, indexový okruh). Zvyčajne vedie k najvzdialenejšiemu odberateľovi, nie však vždy. Kritickým môže byť aj bližší odberateľ s veľkou vlastnou stratou, napríklad s výmenníkom tepla alebo regulačným ventilom. Ostatní odberatelia majú k dispozícii väčší tlakový rozdiel, ako potrebujú. Prebytok treba *zmariť*, inak dostanú väčší prietok na úkor kritického odberateľa (odd. 12.9).

Príklad 12.3 – Sieť s dvoma odberateľmi

Zo spoločného úseku s odporom $R_0 = 1,0 \text{ kPa}/(\text{m}^3/\text{h})^2$ (prívod a spiatka) odbočujú dve vetvy: bližšia s odporom $R_1 = 2,0$ a vzdialenejšia s $R_2 = 8,0$ (vrátane odberateľov, v rovnakých jednotkách). Potrebné prietoky sú $Q_1 = 1,2 \text{ m}^3/\text{h}$ a $Q_2 = 0,8 \text{ m}^3/\text{h}$. Určte potrebný tlakový rozdiel čerpadla, kritickú vetvu a stratu, ktorú treba zmariť vo vetve 1. Ako by sa prietok rozdelil bez vyváženia?

Riešenie. Straty vetiev pri potrebných prietokoch: $\Delta p_1 = 2,0 \cdot 1,2^2 = 2,88 \text{ kPa}$, $\Delta p_2 =$

$8,0 \cdot 0,8^2 = 5,12 \text{ kPa}$. Kritická je vetva 2. Čerpadlo musí dodať

$$\Delta p_c = R_0 (Q_1 + Q_2)^2 + \Delta p_2 = 1,0 \cdot 2^2 + 5,12 = 9,12 \text{ kPa}.$$

Vo vetve 1 treba zmariť $5,12 - 2,88 = 2,24 \text{ kPa}$. Vyvažovací ventil vo vetve 1 musí mať $K_v = Q_1 / \sqrt{\Delta p} = 1,2 / \sqrt{0,0224} = 8,0 \text{ m}^3/\text{h}$ (tlak v baroch).

Bez vyváženia sa pri rovnakom celkovom prietoku $2 \text{ m}^3/\text{h}$ vetvy správajú ako paralelné odpory 2 a 8. Podľa (12.6) dostane vetva 1 prietok $1,33 \text{ m}^3/\text{h}$ a vetva 2 len $0,67 \text{ m}^3/\text{h}$, teda o 17 % menej, ako potrebuje. ■

12.7 Iteračné riešenie siete

V okruhovými sieťach a v sieťach, kde nie sú známe prietoky, ale tlaky (napríklad čerpadlo s danou charakteristikou), tvoria uzlové a slučkové rovnice sústavu nelineárnych rovníc. Rieši sa iteratívne. Používajú sa najmä dva prístupy:

- **Metóda slučkových korekcií** (Hardy Cross). Vychádza sa z odhadu prietokov, ktoré spĺňajú uzlové rovnice. V každej slučke sa prietoky opravujú tak, aby bola splnená slučková rovnica. Metóda je vhodná na ručný výpočet.
- **Newtonova metóda** pre celú sústavu. Neznámymi sú prietoky vo vetvách alebo tlaky v uzloch. Sústava sa linearizuje a rieši maticovo. Tento postup používajú programy na výpočet sietí.

Ak sa v priebehu výpočtu mení Re vo vetvách, treba spolu s prietokmi aktualizovať aj súčinitele trenia, a teda aj odpory R_i . Pri turbulentnom prúdení v drsných rúrach je táto oprava malá. Pri laminárnom prúdení, napríklad vo vrtoch s viskóznou zmesou pri nízkej teplote, sa však odpor mení výrazne a strata je úmerná prvej mocnine prietoku.

12.8 Základy Hardyho Crossovej metódy

H. Cross navrhol v roku 1936 jednoduchú metódu, ktorá umožnila ručne riešiť rozsiahle vodovodné siete. Postup:

1. Zvolíme kladný zmysel obehu v každej slučke (napríklad v smere hodinových ručičiek).
2. Odhadneme prietoky vo všetkých vetvách tak, aby spĺňali uzlové rovnice. Prietok v kladnom zmysle je kladný.
3. Pre každú slučku vypočítame opravu prietoku

$$\Delta Q = - \frac{\sum R_i Q_i |Q_i|}{\sum 2 R_i |Q_i|}. \quad (12.10)$$

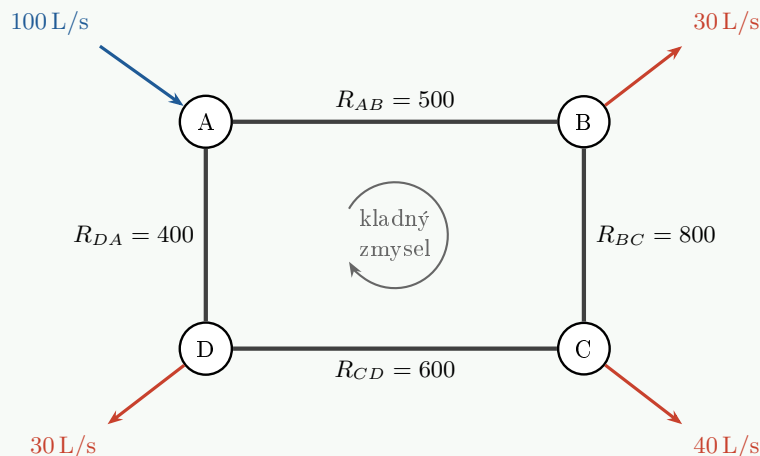
Čitateľ je súčet strát so znamienkom (nesplnenie slučkovej rovnice), menovateľ je derivácia tohto súčtu podľa Q . Ide teda o jeden krok Newtonovej metódy pre jednu neznámu.

4. Opravu ΔQ pripočítame ku všetkým prietokom v slučke. Uzlové rovnice zostanú splnené, pretože oprava do uzla vtečie aj z neho vytečie.
5. Kroky 3 a 4 opakujeme, kým nie sú opravy zanedbateľné.

Ak vetva patrí do dvoch slučiek, opravujú ju obe korekcie, každá so svojím znamienkom.

Príklad 12.4 – Okruhová sieť so štyrmi uzlami

Do uzla A siete na obr. 12.5 vteká 100 L/s. V uzloch B, C a D sa odoberá 30, 40 a 30 L/s. Určte prietoky vo vetvách.



Obr. 12.5. Jednoduchá okruhová sieť so štyrmi uzlami. Odpory sú v s^2/m^5 , pre stratovú výšku v metroch.

Riešenie. Kladný zmysel volíme v smere hodinových ručičiek ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$). Odhad spĺňajúci uzlové rovnice: $Q_{AB} = 60$, $Q_{BC} = 30$, $Q_{CD} = -10$, $Q_{DA} = -40$ (L/s). Záporné prietoky tečú proti kladnému zmyslu, teda z D do C a z A do D. Prvá oprava:

$$\sum RQ|Q| = 500 \cdot 0,06^2 + 800 \cdot 0,03^2 - 600 \cdot 0,01^2 - 400 \cdot 0,04^2 = 1,820 \text{ m},$$

$$\sum 2R|Q| = 2(500 \cdot 0,06 + 800 \cdot 0,03 + 600 \cdot 0,01 + 400 \cdot 0,04) = 152,$$

$$\Delta Q = -\frac{1,820}{152} = -0,01197 \text{ m}^3/\text{s} = -11,97 \text{ L/s}.$$

Nové prietoky sú 48,03; 18,03; -21,97; -51,97 L/s. Druhá oprava je $\Delta Q = -0,30$ L/s a ďalšie sú zanedbateľné. Výsledok:

$$Q_{AB} = 47,7 \text{ L/s}, \quad Q_{BC} = 17,7 \text{ L/s}, \quad Q_{DC} = 22,3 \text{ L/s}, \quad Q_{AD} = 52,3 \text{ L/s}.$$

Kontrola: strata na ceste A-B-C je $1,139 + 0,251 = 1,39$ m, na ceste A-D-C $1,093 + 0,298 = 1,39$ m. Obe cesty majú rovnakú stratu, ako vyžaduje slučková rovnica. ■

12.9 Hydraulické vyvažovanie

Hydraulické vyvažovanie je nastavenie siete tak, aby každý spotrebič pri návrhovom stave dostal návrhový prietok. V nevyváženej sieti dostávajú spotrebiče blízko čerpadla nadbytok a vzdialené nedostatok (pr. 12.3). Prejavuje sa to takto:

- vzdialené miestnosti alebo kolektory majú nedostatočný výkon,
- spiatočka má vyššiu teplotu, čo zhoršuje účinnosť kondenzačných kotlov a tepelných čerpadiel a zvyšuje straty tepelných sietí,
- prevádzkovateľ zväčší dopravnú výšku čerpadla. Tým sa zvýši prietok vo všetkých vetvách, najviac v tých, ktoré ho nepotrebuje. Spotreba elektriny rastie a na ventiloch s veľkým tlakovým rozdielom vzniká hluk.

Motivačný príklad zo začiatku kapitoly je presne takýto prípad. Výkonnejšie čerpadlo zvýšilo prietok blízkych vetiev viac ako vzdialenej. Správnym riešením je vyváženie, nie väčšie čerpadlo.

Vyvažuje sa tak, že vo vetvách s prebytkom tlaku sa pridá odpor, ktorý prebytok zmari. Používajú sa na to:

- **statické vyvažovacie ventily** s nastaviteľnou hodnotou K_v a meracími vývodmi na kontrolu prietoku,
- **prednastavenie termostatických ventilov** vykurovacích telies,
- **regulátory tlakového rozdielu a regulátory prietoku**, ktoré udržiavajú nastavený stav automaticky aj pri zmene prevádzky (odd. 12.11),
- **geometrické riešenie**: Tichelmannovo zapojenie, pri ktorom majú všetky paralelné vetvy rovnakú dĺžku (obr. 5.4). Používa sa v kolektorových poliach a v poliach zemných vrtov.

Potrebnú hodnotu K_v vyvažovacieho ventilu určíme z prebytku tlaku Δp_v a návrhového prietoku vetvy (rov. (11.8)):

$$K_v = \frac{Q}{\sqrt{\Delta p_v}} \quad [K_v] = [Q] = \text{m}^3/\text{h}, \quad [\Delta p_v] = \text{bar}. \quad (12.11)$$

Aplikácia v OZE: kolektorové polia a polia vrtov

V kolektorovom poli spôsobí nerovnomerný prietok rozdielne teploty kolektorov. Kolektory s malým prietokom sa prehrievajú a v lete môže v nich skôr nastať stagnácia. Rovnomernosť prietoku zlepšuje Tichelmannovo zapojenie, dostatočný priemer rozdeľovacích a zberných potrubí a to, aby mali samotné kolektory dostatočnú tlakovú stratu v porovnaní s rozvodmi [7]. Pri poli zemných vrtov sa vrtvy pripájajú na rozdeľovač a zberač, často tiež podľa Tichelmannu. Nerovnomerný prietok vedie k nerovnomernému odberu tepla z horniny. Dlhodobu tak klesá teplota v niektorých vrtovoch a znižuje sa výkonový faktor tepelného čerpadla [28].

12.10 Regulačné ventily

Kým vyvažovací ventil sa nastaví raz, *regulačný ventil* mení prietok počas prevádzky podľa potreby tepla. Patria sem dvojcestné ventily s pohonom, termostatické ventily vykurovacích telies a trojcestné zmiešavacie a rozdeľovacie ventily. Trojcestný ventil mení pomer prietokov v dvoch vetvách pri približne stálom celkovom prietoku. Dvojcestný ventil mení celkový prietok vetvy.

Závislosť prietoku od zdvihu ventilu pri stálom tlakovom rozdieli na ventile je *vnútorná charakteristika* ventilu. Najčastejšie sú lineárna (K_v rastie úmerne zdvihu) a ekvipercentuálna (rovnaký prírastok zdvihu zväčší K_v o rovnaké percento). Vo vetve siete však tlakový rozdiel na ventile nie je stály. Pri privieraní ventilu klesá prietok, a teda aj strata ostatných prvkov vetvy (potrubia, výmenníka), takže na ventile zostáva väčšia časť tlaku. Skutočná, *prevádzková* charakteristika je preto deformovaná. Mieru deformácie vyjadruje *autorita ventilu*

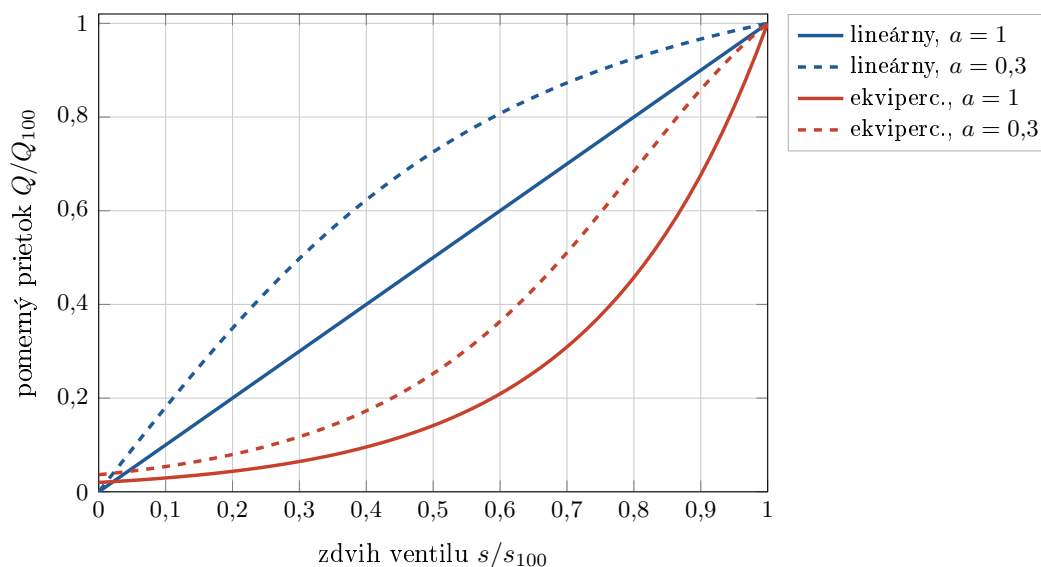
$$a = \frac{\Delta p_{v,100}}{\Delta p_{v,100} + \Delta p_r}, \quad (12.12)$$

kde $\Delta p_{v,100}$ je strata úplne otvoreného ventilu a Δp_r strata ostatných prvkov regulovanej vetvy pri návrhovom prietoku. Pri stálom tlakovom rozdieli na vetve a kvadratickej závislosti strát

platí pre pomerný prietok

$$\frac{Q}{Q_{100}} = \frac{1}{\sqrt{(1-a) + a(K_{vs}/K_v)^2}}, \quad (12.13)$$

kde K_v/K_{vs} je vnútorná charakteristika pri danom zdvihu. Pri malej autorite ventil v podstatnej časti zdvihu prietok takmer nemení a reguluje až tesne pred zatvorením (obr. 12.6). Regulácia je potom nestabilná. V praxi sa odporúča autorita aspoň 0,3 až 0,5. Ekvipercentuálna charakteristika pri menšej autorite približne kompenzuje deformáciu a dáva takmer lineárnu prevádzkovú závislosť, preto sa vo vykurovaní používa najčastejšie.



Obr. 12.6. Prevádzková charakteristika regulačného ventilu s lineárnou a ekviperc. vnútornou charakteristikou pri autorite 1 a 0,3 (výpočet podľa (12.13), rozsah regulácie ventilu 50).

Vysoká autorita znamená, že na ventile sa pri plnom otvorení stratí veľká časť tlaku. Ventil tak spotrebúva energiu čerpadla. Návrh regulačného ventilu je preto kompromisom medzi kvalitou regulácie a spotrebou energie.

12.11 Vplyv zmeny prevádzkového stavu

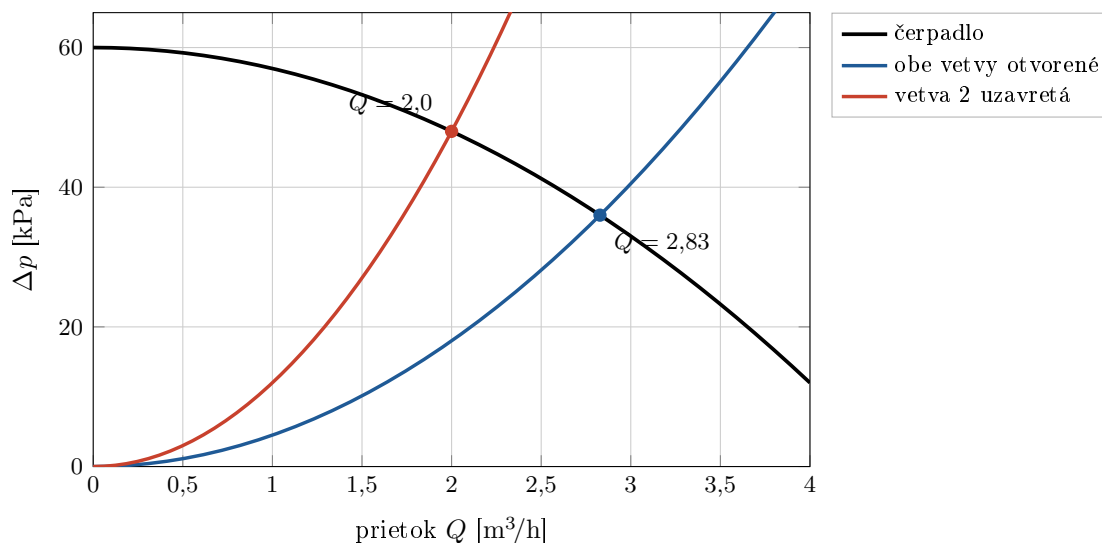
Vetvy siete sa navzájom ovplyvňujú. Ak sa v jednej vetve uzavrie ventil, klesne prietok v spoločných úsekoch, a teda aj ich strata. Na ostatných vetvách potom zostane väčší tlakový rozdiel a ich prietok vzrastie. Pri čerpadle so stálymi otáčkami navyše pri menšom prietoku vzrastie jeho dopravná výška (kap. 13). Oba vplyvy sa sčítajú.

Príklad 12.5 – Uzavretie jednej vetvy

Čerpadlo s charakteristikou $\Delta p = 60 - 3Q^2$ (kPa, m³/h) napája cez spoločný úsek s odporom $R_0 = 2$ dve rovnaké paralelné vetvy s odporom $R_1 = R_2 = 10$. Určte prietok vo vetve 1, keď sú otvorené obe vetvy a keď sa vetva 2 uzavrie.

Riešenie. Obe vetvy otvorené: $R_p = R/4 = 2,5$, celkový odpor 4,5. Pracovný bod: $60 - 3Q^2 = 4,5Q^2$, teda $Q = 2,83$ m³/h a v každej vetve 1,41 m³/h. Tlakový rozdiel na vetve je $10 \cdot 1,41^2 = 20$ kPa.

Vetva 2 uzavretá: celkový odpor $2 + 10 = 12$, $60 - 3Q^2 = 12Q^2$, $Q = 2,0 \text{ m}^3/\text{h}$. Tlakový rozdiel na vetve 1 vzrástol na 40 kPa a jej prietok o 41 % (obr. 12.7). ■



Obr. 12.7. Posun pracovného bodu po uzavretí jednej z dvoch paralelných vetiev (pr. 12.5).

Pri dvojcestnej regulácii sa vo vykurovacích a tepelných sieťach prietok neustále mení podľa odberu. Aby sa vetvy navzájom neovplyvňovali a na termostatických ventiloch nevznikal hluk, používajú sa:

- čerpadlá s reguláciou otáčok, ktoré udržiavajú stály alebo s prietokom klesajúci tlakový rozdiel (kap. 13),
- regulátory tlakového rozdielu na päte stúpačiek alebo v odovzdávacích staniciach,
- pri tepelných sieťach regulácia tlakového rozdielu u kritického odberateľa.

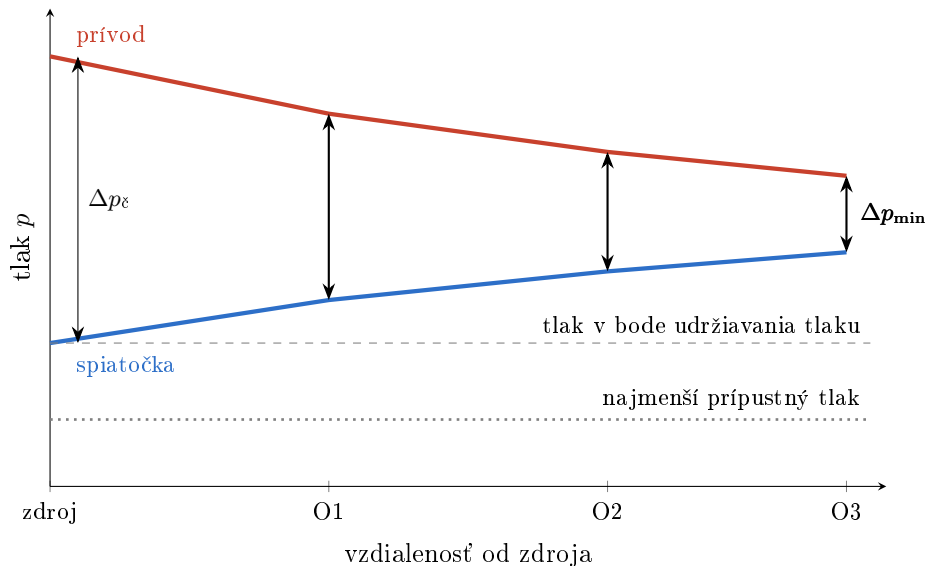
Tieto opatrenia zároveň znižujú spotrebu elektriny, pretože pri menšom odbere sa zmenší aj dopravná výška čerpadla.

12.12 Tepelné a distribučné siete

Tepelná sieť (systém centralizovaného zásobovania teplom) prepravuje teplo zo zdroja, napríklad z kotolne na biomasu, zo solárneho poľa, z geotermálneho vrtu alebo z odpadového tepla, k odberateľom. Tvorí ju prírodné a vratné potrubie, obvykle z predizolovaných rúr uložených v zemi. Hmotnostný prietok je daný tepelným výkonom a teplotným rozdielom $\dot{m} = \dot{Q}/(c_p \Delta T)$ [29].

Tlakový diagram siete (obr. 12.8) ukazuje priebeh tlaku v privode a spiatočke pozdĺž siete. Čerpadlo vo zdroji vytvára tlakový rozdiel $\Delta p_{\text{č}}$. Pozdĺž siete klesá tlak v privode a rastie v spiatočke, takže tlakový rozdiel k dispozícii u odberateľov sa znižuje. U kritického odberateľa musí zostať aspoň rozdiel Δp_{min} potrebný na prekonanie straty jeho odovzdávacej stanice. Úroveň tlaku určuje zariadenie na udržiavanie tlaku, spravidla pripojené na spiatočku pred čerpadlom (odd. 12.4). Tlak nikde nesmie klesnúť pod hodnotu potrebnú proti varu a nasávaniu vzduchu ani prekročiť dovolený tlak.

Z hydraulického hľadiska je dôležitý najmä *teplotný rozdiel* privodu a spiatočky. Pri danom výkone je prietok nepriamo úmerný ΔT a čerpací výkon rastie približne s tretou mocninou



Obr. 12.8. Tlakový diagram tepelnej siete s tromi odberateľmi O1 až O3. Tlakový rozdiel u odberateľov (šípky) klesá so vzdialenosťou od zdroja.

prietoku. Ak sa pre zle nastavené odovzdávacie stanice zmenší teplotný rozdiel z 30 K na 20 K, prietok vzrastie o 50 % a čerpací výkon asi $1,5^3 = 3,4$ -krát. Zároveň stúpne teplota spiatočky, čo zhorší využitie kondenzačného tepla, solárnych kolektorov a tepelných čerpadel vo zdroji. Moderné nízkotepelné siete preto kladú dôraz na veľký teplotný rozdiel, vyváženie a reguláciu tlakového rozdielu [29].

Rozvetvené siete sú lacnejšie a jednoduchšie na výpočet. Okruhovité siete zvyšujú spoľahlivosť dodávky, pretože pri poruche úseku možno odberateľa napájať z druhej strany. Umožňujú aj pripojenie viacerých zdrojov v rôznych miestach siete, čo je pri zdrojoch OZE časté.

12.13 Digitálny výpočet potrubnej siete

Rozsiahle siete sa počítajú špecializovanými programami. Pre vodovodné siete sa často používa voľne dostupný program EPANET. Pre vykurovacie a tepelné siete existujú programy výrobcov armatúr a komerčné simulačné nástroje. Všetky riešia rovnaké uzlové a slučkové rovnice ako v tejto kapitole. Na výučbu a na menšie úlohy postačí tabuľkový procesor alebo niekoľko riadkov v Pythone. Nasledujúci program rieši sieť z pr. 12.3 bez vyvažovacieho ventilu pri čerpadle so stálym tlakovým rozdielom 9,12 kPa:

```
from scipy.optimize import fsolve

R0, R1, R2 = 1.0, 2.0, 8.0      # odpory, kPa/(m3/h)^2
dp_c = 9.12                    # tlakový rozdiel čerpadla, kPa

def rovnice(q):
    q1, q2 = q
    Q = q1 + q2                  # uzlova rovnica
    return [R0*Q*abs(Q) + R1*q1*abs(q1) - dp_c,  # slucka cez vetvu 1
            R0*Q*abs(Q) + R2*q2*abs(q2) - dp_c]  # slucka cez vetvu 2

q1, q2 = fsolve(rovnice, [1.0, 1.0])
print(f"Q1 = {q1:.3f} m3/h, Q2 = {q2:.3f} m3/h")
```

Výsledok je $Q_1 = 1,465 \text{ m}^3/\text{h}$ a $Q_2 = 0,732 \text{ m}^3/\text{h}$. Bez vyváženia dostane vzdialený odberateľ o 8 % menej, ako potrebuje, hoci celkový prietok je o 10 % väčší ako návrhový. Pri práci s programom treba vždy skontrolovať, či výsledok spĺňa uzlové a slučkové rovnice, či majú prietoky fyzikálne zmysluplné smery a či rýchlosti a tlaky ležia v prípustných medziach.

Zhrnutie kapitoly

- Strata každého prvku siete sa vyjadří ako $\Delta p = RQ^2$. Pri sériovom zapojení sa odpory sčítajú. Pri paralelnom je strata vo všetkých vetvách rovnaká a platí $1/\sqrt{R_p} = \sum 1/\sqrt{R_i}$.
- Sieť sa rieši uzlovými rovnicami (bilancia prietokov) a slučkovými rovnicami (bilancia energie), ktoré sú obdobou Kirchhoffových zákonov, ale sú nelineárne.
- Absolútny tlak v uzavretom okruhu určuje neutrálny bod (expanzná nádoba). Tá sa pripája na sacej strane čerpadla.
- Charakteristika systému $H = H_{st} + RQ^2$ spolu s charakteristikou čerpadla určuje pracovný bod.
- V rozvetvovej sieti určuje dopravnú výšku čerpadla kritická vetva. Prebytok tlaku v ostatných vetvách treba zmariť vyvažovaním.
- Okruhovú sieť sa riešia iteračne, pri ručnom výpočte Hardyho–Crossovou metódou.
- Regulačný ventil musí mať dostatočnú autoritu, aspoň 0,3 až 0,5. Zmena prietoku v jednej vetve ovplyvní ostatné vetvy.
- V tepelných sieťach je rozhodujúci teplotný rozdiel prívodu a spiatočky, ktorý určuje prietok a čerpací výkon.

Kontrolné otázky

1. Ako sa určí výsledný odpor potrubí zapojených do série a paralelne? V čom sa líši od elektrických obvodov?
2. Prečo je strata vo všetkých paralelných vetvách rovnaká?
3. Ako sa rozdelí prietok medzi dve paralelné vetvy, ak má jedna štvornásobný odpor?
4. Formulujte uzlovú a slučkovú rovnicu. Koľko nezávislých rovníc má sieť s n uzlami a m vetvami?
5. Čo je neutrálny bod? Prečo sa expanzná nádoba pripája na sacej strane čerpadla?
6. Čím sa líši charakteristika otvoreného a uzavretého systému?
7. Čo je kritická vetva siete a ako sa určí?
8. Prečo výmena čerpadla za výkonnejšie nerieši problém nevyváženej siete?
9. Vysvetlite princíp Hardyho–Crossovej metódy. Prečo oprava prietoku nenaruší uzlové rovnice?
10. Čo je autorita regulačného ventilu? Aké má dôsledky malá autorita?
11. Ako sa zmení prietok v ostatných vetvách, keď sa jedna vetva uzavrie? Ako tomu zabrániť?
12. Prečo je malý teplotný rozdiel prívodu a spiatočky v tepelnej sieti nežiaduci?

Úlohy na precvičenie

1. Tri prvky so K_v 6, 10 a $4 \text{ m}^3/\text{h}$ sú zapojené do série. Určte výsledný odpor v $\text{kPa}/(\text{m}^3/\text{h})^2$, výslednú hodnotu K_v a stratu pri $2 \text{ m}^3/\text{h}$. [10,03; $3,16 \text{ m}^3/\text{h}$; 40,1 kPa]
2. Dve paralelné vetvy majú odpory 3 a $12 \text{ kPa}/(\text{m}^3/\text{h})^2$. Celkový prietok je $3 \text{ m}^3/\text{h}$. Určte prietoky vo vetvách a stratu. [2 a $1 \text{ m}^3/\text{h}$; 12 kPa]
3. Pole zemných vrtov má 6 rovnakých vrtov zapojených paralelne, každý s odporom $40 \text{ kPa}/(\text{m}^3/\text{h})^2$. Celkový prietok je $4,8 \text{ m}^3/\text{h}$. Určte stratu poľa. Aká by bola strata, keby sa jeden vrt uzavrel? [25,6 kPa; 36,9 kPa]
4. Z nádrže s hladinou 20 m nad odberným miestom vedie potrubie s odporom $R_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ s}^2/\text{m}^5$ do uzla, z ktorého pokračujú dve paralelné vetvy s odpormi $8 \cdot 10^5$ a $3,2 \cdot 10^6 \text{ s}^2/\text{m}^5$ s výtokom do atmosféry na rovnakej úrovni. Kinetickú energiu na výtok zanedbajte. Určte prietoky. [6,0; 4,0 a $2,0 \text{ L/s}$]
5. V sieti z pr. 12.3 sa pridá tretí odberateľ s odporom $R_3 = 6,0$ a prietokom $1,0 \text{ m}^3/\text{h}$, pripojený k rovnakému uzlu. Určte kritickú vetvu, potrebný tlakový rozdiel čerpadla a K_v vyvažovacích ventilov v ostatných vetvách. [vetva 3; 15,0 kPa; 6,8 a $8,5 \text{ m}^3/\text{h}$]
6. Určte charakteristiku otvoreného systému, ktorý čerpá vodu do nádrže o 12 m vyššie, ak strata pri 5 L/s je 4 m. Akú dopravnú výšku treba pri 6 L/s ? [$H = 12 + 1,6 \cdot 10^5 Q^2$; 17,8 m]
7. Vyriešte sieť z pr. 12.4 pre prípad, keď sa odber v uzle C zväčší na 50 L/s a v uzle D zmenší na 20 L/s . Stačia dve opravy. [$Q_{AB} = 49,8$; $Q_{BC} = 19,8$; $Q_{DC} = 30,2$; $Q_{AD} = 50,2 \text{ L/s}$]
8. Regulačný ventil má pri plnom otvorení stratu 8 kPa. Ostatné prvky regulovanej vetvy majú pri návrhovom prietoku stratu 24 kPa. Určte autoritu ventilu. Aký pomerný prietok dá lineárny ventil pri polovičnom zdvihu? [0,25; 0,76]
9. Pri danom výkone tepelnej siete sa teplotný rozdiel zväčší zo 25 K na 35 K. Koľkokrát sa zmení prietok a čerpací výkon (pri $\Delta p \propto Q^2$)? [0,714; 0,364]
10. Čerpadlo s charakteristikou $\Delta p = 50 - 2Q^2$ (kPa, m^3/h) napája tri rovnaké paralelné vetvy s odporom 18 bez spoločného úseku. Určte prietok vetvou pri troch otvorených vetvách a pri jednej otvorenej vetve. [1,18 a $1,58 \text{ m}^3/\text{h}$]
11. V Pythone alebo v tabuľkovom procesore naprogramujte Hardyho–Crossovu metódu pre jednu slučku a overte výsledok pr. 12.4.

Časť IV

Hydraulické stroje a energetické systémy

Kapitola 13

Čerpadlá a čerpacie systémy

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent vysvetlí princíp odstredivého čerpadla z Eulerovej rovnice a opíše jeho charakteristiky $H(Q)$, $P(Q)$ a $\eta(Q)$. Určí pracovný bod čerpadla v potrubnom systéme, a to aj pri sériovom a paralelnom zapojení čerpadiel. Použije afinitné zákony, porovná reguláciu škrtením a zmenou otáčok a vypočíta ročnú spotrebu elektriny. Posúdi nebezpečenstvo kavitácie pomocou NPSH a vyberie čerpadlo z katalógových údajov.

Kľúčové pojmy

odstredivé čerpadlo, obežné koleso, špirálová skriňa, Eulerova rovnica, dopravná výška, charakteristika čerpadla, hydraulický, mechanický a elektrický príkon, účinnosť, bod najvyššej účinnosti (BEP), špecifické otáčky, pracovný bod, sériové a paralelné zapojenie, afinitné zákony, regulácia škrtením, frekvenčný menič, kavitácia, NPSH, obehové čerpadlo

Čerpadlo je „srdcom“ každého kvapalinového systému. Dodáva tekutine mechanickú energiu, ktorú potrubný systém spotrebuje na prekonanie strát a prípadne na zdvihnutie tekutiny do výšky. V systémoch OZE sa čerpadlá vyskytujú všade: obehové čerpadlá solárnych okruhov, vykurovania a akumulácie, čerpadlá primárnych okruhov tepelných čerpadiel, studňové čerpadlá, sieťové čerpadlá tepelných sietí aj čerpadlá v bioplynových staniciach. Prečerpávacie vodné elektrárne používajú reverzibilné stroje, ktoré pracujú striedavo ako čerpadlo a ako turbína.

Na čerpadlá pripadá významná časť svetovej spotreby elektriny. Spotreba čerpadla v zariadení OZE priamo znižuje jeho čistý prínos (odd. 1.9). Správny výber a regulácia čerpadla patria preto k najúčinnnejším opatreniam na úsporu energie. V tejto kapitole spojíme charakteristiku potrubného systému z kap. 12 s charakteristikou čerpadla. Výklad nadväzuje na [1, 5, 15].

Na zamyslenie

Vykurovací okruh bytového domu má čerpadlo navrhnuté na $50 \text{ m}^3/\text{h}$. Počas väčšiny vykurovacej sezóny však stačí polovičný prietok. Kúrenár ho nastavil privretím ventilu za čerpadlom. Prečo sa spotreba elektriny čerpadla takmer nezmenila? A koľko by sa ušetrilo, keby sa namiesto privretia ventilu znížili otáčky?

Projektová úloha

Porovnajte reguláciu škrtením a frekvenčné riadenie z hľadiska ročnej spotreby elektriny. Pre vybrané čerpadlo z katalógu (charakteristiky $H(Q)$ a $\eta(Q)$) a zadaný potrubný systém

zostavte v Pythone alebo v tabuľkovom procesore výpočet pracovného bodu pri rôznych prietokoch pre oba spôsoby regulácie. Z odhadnutého ročného priebehu prietoku (napríklad podľa denostupňov) vypočítajte ročnú spotrebu elektriny, úsporu a návratnosť frekvenčného meniča. Posúďte vplyv statickej výšky systému na úsporu.

13.1 Úloha čerpadla v energetickom systéme

Z energetickej rovnice (6.16) vieme, že čerpadlo musí dodať dopravnú výšku

$$H_c = H_{st} + h_z(Q), \quad (13.1)$$

teda pokryť statickú výšku (v otvorenom systéme) a straty pri danom prietoku. V uzavretom okruhu je $H_{st} = 0$ a čerpadlo pokrýva len straty (rov. (6.18)). Požiadavky na čerpadlo sú teda dané potrubným systémom. Na druhej strane čerpadlo určitých rozmerov a otáčok dokáže dodať len určitú výšku pri určitom prietoku. Ako sa tieto dve požiadavky stretnú, je témou tejto kapitoly.

Energetický význam čerpadla v systéme OZE vyjadruje pomer spotreby elektriny čerpadla a užitočnej energie zariadenia. Pri solárnom systéme je to pomer spotreby obehového čerpadla k solárnym ziskom, pri tepelnom čerpadle zem–voda podiel spotreby čerpadla primárneho okruhu na celkovej spotrebe. Obehové čerpadlo s príkonom 30 W v prevádzke 1 800 h/r spotrebuje 54 kW · h. Pri solárnych ziskoch 2 500 kW · h/r to sú viac ako 2 %. Samotný hydraulický výkon potrebný v okruhu je pritom často len niekoľko wattov. Malé obehové čerpadlá majú celkovú účinnosť rádovo len 10 % až 30 %.

13.2 Základné druhy čerpadiel

Podľa princípu prenosu energie delíme čerpadlá na dve skupiny [1, 15]:

- **Hydrodynamické (lopatkové) čerpadlá** odovzdávajú energiu tekutine prostredníctvom obežného kolesa s lopatkami. Mení sa moment hybnosti tekutiny (odd. 7.10). Patria sem odstredivé (radiálne), diagonálne a axiálne (vrtuľové) čerpadlá. Majú plynulý prietok a pri danej rýchlosti otáčania im zodpovedá určitá závislosť dopravnej výšky od prietoku.
- **Objemové čerpadlá** (piestové, membránové, zubové, skrutkové, vretenové) uzatvárajú určitý objem tekutiny a vytláčajú ho do výtlaku. Prietok je takmer nezávislý od tlaku. Používajú sa pre malé prietoky a veľké tlaky, na dávkovanie a na veľmi viskózne látky, napríklad kaly a substráty v bioplynových staniciach.

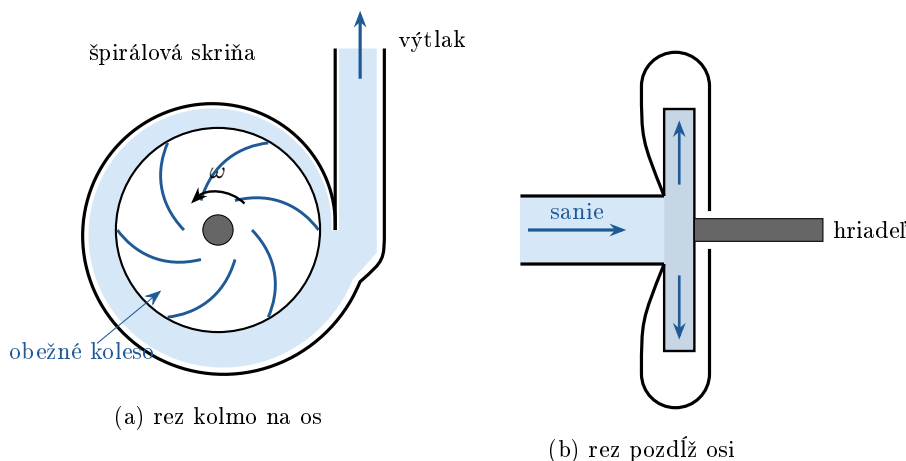
V energetických systémoch prevládajú odstredivé čerpadlá. Typ lopatkového čerpadla sa volí podľa *špecifických otáčok*

$$n_q = n \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \quad [n] = 1/\text{min}, [Q] = \text{m}^3/\text{s}, [H] = \text{m}, \quad (13.2)$$

počítaných v bode najvyššej účinnosti. Malé n_q zodpovedá malému prietoku a veľkej výške (radiálne kolesá, n_q približne do 100), veľké n_q veľkému prietoku a malej výške (axiálne kolesá, n_q nad asi 150). Medzi nimi ležia diagonálne kolesá [15]. Rovnaký parameter sa používa pri výbere typu vodnej turbíny (kap. 14).

13.3 Odstredivé čerpadlo

Odstredivé čerpadlo (obr. 13.1) tvorí obežné koleso s lopatkami a skriňa. Kvapalina vstupuje do kolesa v smere osi, lopatky ju roztočia a odstredivým účinkom vytlačia na väčší polomer. Pri výstupe z kolesa má kvapalina veľkú rýchlosť a vyšší tlak. V špirálovej skriňi alebo v rozvádzači sa rýchlosť znižuje a kinetická energia sa mení na tlak. Špirála slúži ako difúzor (odd. 11.3).



Obr. 13.1. Schéma odstredivého čerpadla so špirálovou skriňou a obežným kolesom s lopatkami zahnutými dozadu.

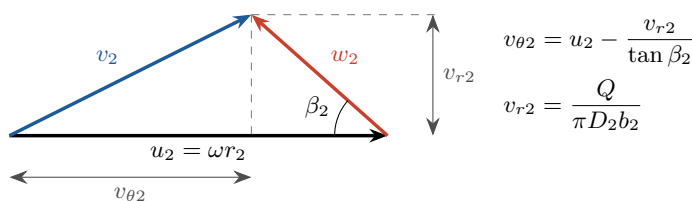
Energiu odovzdanú kvapaline určuje Eulerova rovnica (rov. (7.13)). Pri vstupe bez predrotácie ($v_{\theta 1} = 0$) je teoretická dopravná výška

$$H_{t\infty} = \frac{u_2 v_{\theta 2}}{g}. \quad (13.3)$$

Obvodovú zložku absolútnej rýchlosti na výstupe určíme z rýchlostného trojuholníka (obr. 13.2). Relatívna rýchlosť w_2 sleduje sklon lopatky, ktorý je daný uhlom β_2 . Radiálna zložka je úmerná prietoku, $v_{r2} = Q/(\pi D_2 b_2)$, kde b_2 je šírka kolesa na výstupe. Po dosadení

$$H_{t\infty} = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2}{g \pi D_2 b_2 \tan \beta_2} Q. \quad (13.4)$$

Pri lopatkách zahnutých dozadu ($\beta_2 < 90^\circ$, typicky 20° až 30°) teoretická výška s prietokom lineárne klesá. Takéto kolesá majú stabilnú charakteristiku a najvyššiu účinnosť, preto sa používajú takmer výhradne [15].



Obr. 13.2. Rýchlostný trojuholník na výstupe z obežného kolesa s lopatkami zahnutými dozadu.

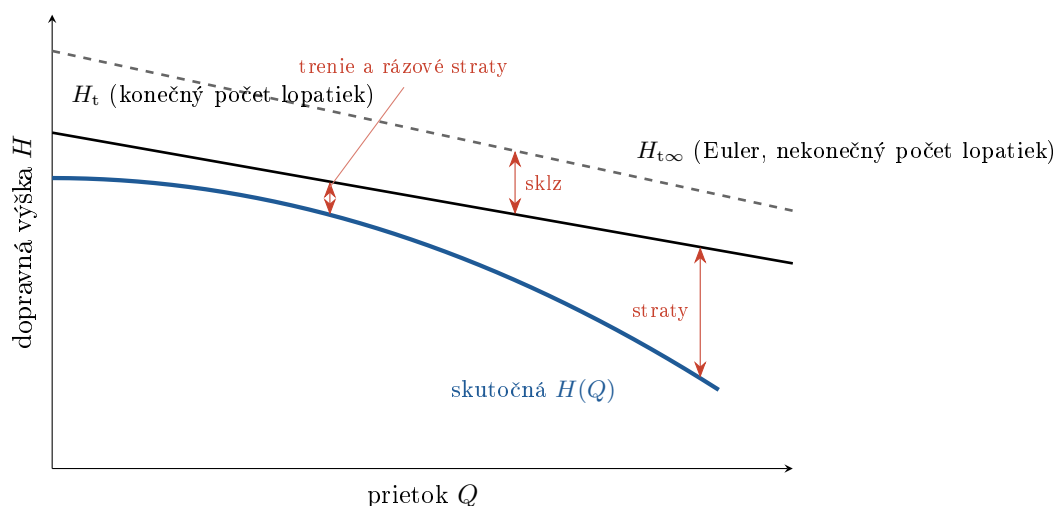
13.4 Dopravná výška čerpadla

Dopravná výška čerpadla je prírastok energetickej výšky kvapaliny medzi sacím (S) a výtlačným (V) hrdlom (rov. (6.9)):

$$H = \frac{p_V - p_S}{\rho g} + \frac{v_V^2 - v_S^2}{2g} + (z_V - z_S). \quad (13.5)$$

Je to energia odovzdaná jednotke tiaže kvapaliny, udávaná v metroch. Jej výhodou je, že *nezávisí od hustoty* kvapaliny. Čerpadlo s danými otáčkami dodá rovnakú výšku vode aj nemrznúcej zmesi s inou hustotou, pokiaľ nie je viskozita príliš veľká. Tlakový rozdiel $\Delta p = \rho g H$ je však pri hustejšej kvapaline väčší. Pri obehových čerpadlách sa dopravná výška často udáva v tlakovom tvare v kPa alebo bar pre vodu.

Skutočná dopravná výška je menšia ako teoretická $H_{t\infty}$ (obr. 13.3). Pri konečnom počte lopatiek kvapalina lopatky nesleduje presne, ale zaostáva za nimi (*sklz*). Ďalej sa energia stráca trením v kanáloch kola a skrine a pri prietoku mimo návrhového bodu aj rázovými stratami, keď prúd nenabieha na lopatky v smere ich sklonu. Výsledná charakteristika $H(Q)$ je preto približne parabola klesajúca s prietokom [1, 15].



Obr. 13.3. Od teoretickej dopravnej výšky podľa Eulerovej rovnice k skutočnej charakteristike čerpadla (schéma).

13.5 Charakteristika $H(Q)$

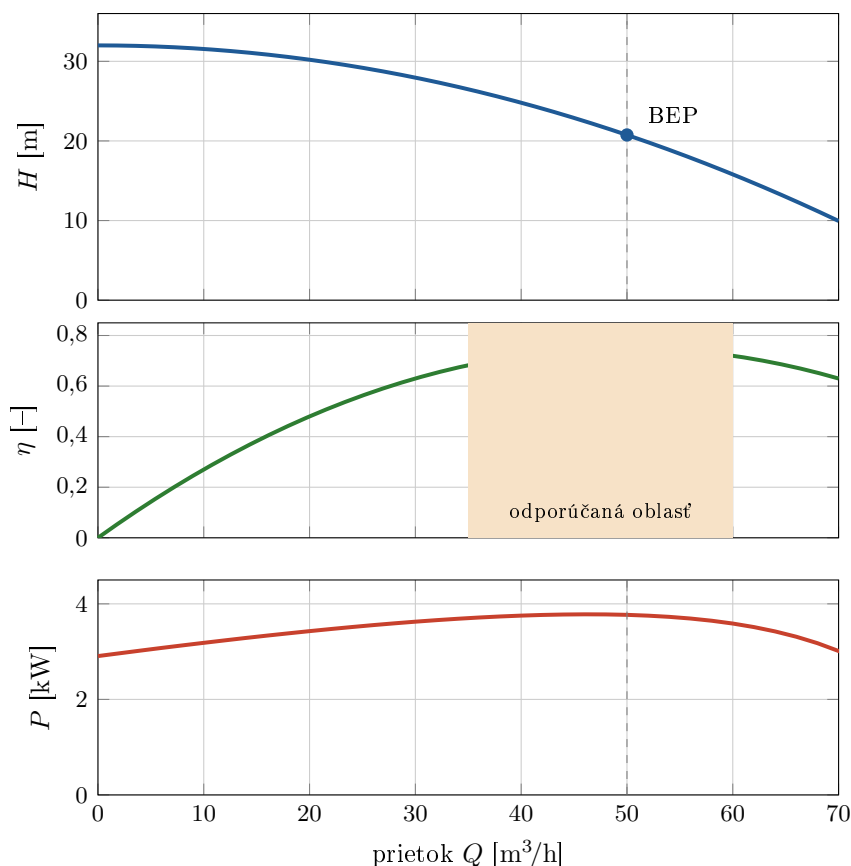
Výrobcovia udávajú pre každé čerpadlo a otáčky súbor meraných charakteristík (obr. 13.4):

- **dopravnú výšku** $H(Q)$,
- **účinnosť** $\eta(Q)$,
- **príkon** na hriadeli $P(Q)$ alebo elektrický príkon,
- **potrebné NPSH** (odd. 13.19).

Najväčšiu výšku H_0 dodáva čerpadlo pri nulovom prietoku (zatvorený výtlak). S rastúcim prietokom výška klesá. Na výpočty sa charakteristika často nahrádza parabolou

$$H_c(Q) = H_0 - a Q^2 \quad \text{alebo} \quad H_c(Q) = H_0 + b Q - a Q^2, \quad (13.6)$$

ktorej koeficienty určíme z dvoch alebo troch bodov katalógovej krivky. V tejto kapitole používame *modelové čerpadlo* s $H_0 = 32 \text{ m}$, $a = 0,0045 \text{ m}/(\text{m}^3/\text{h})^2$, bodom najvyššej účinnosti pri $50 \text{ m}^3/\text{h}$ a $\eta_{\max} = 0,75$.



Obr. 13.4. Charakteristiky modelového odstredivého čerpadla pri stálych otáčkach: dopravná výška, účinnosť a príkon na hriadeľi.

Pozor – častá chyba

Príkon odstredivého čerpadla s radiálnym kolesom rastie s prietokom. Najmenší je pri zatvorenom výtlaku, preto sa takéto čerpadlá rozbiehajú proti zatvorenému výtlaku. Dlhodobá prevádzka pri nulovom prietoku je však nebezpečná. Celý príkon sa mení na teplo v malom objeme kvapaliny, ktorá sa prehrieva a môže sa odpariť. Axiálne čerpadlá majú naopak najväčší príkon pri nulovom prietoku.

13.6 Výkon čerpadla

Užitočný (hydraulický) výkon čerpadla je energia odovzdaná kvapaline za jednotku času (rov. (6.10)):

$$P_h = \rho g Q H = Q \Delta p. \quad (13.7)$$

Závisí od prietoku aj od dopravnej výšky. V pracovnom bode na obr. 13.4 ($Q = 50 \text{ m}^3/\text{h}$, $H = 20,75 \text{ m}$) je $P_h = 1000 \cdot 9,81 \cdot (50/3600) \cdot 20,75 = 2,83 \text{ kW}$.

13.7 Hydraulický, mechanický a elektrický výkon

Na ceste od elektrickej siete ku kvapaline sa energia premieňa v niekoľkých stupňoch. Každý z nich má svoje straty:

$$P_{\text{el}} \xrightarrow{\eta_{\text{fm}}} P_{\text{mot}} \xrightarrow{\eta_{\text{mot}}} P \xrightarrow{\eta_{\text{c}}} P_{\text{h}}, \quad (13.8)$$

kde P_{el} je elektrický príkon zo siete, η_{fm} účinnosť frekvenčného meniča (ak je použitý), η_{mot} účinnosť motora, P príkon na hriadieli čerpadla a η_{c} účinnosť čerpadla. Celková účinnosť súpravy je súčinom

$$\eta_{\text{c}} = \frac{P_{\text{h}}}{P_{\text{el}}} = \eta_{\text{c}} \eta_{\text{mot}} \eta_{\text{fm}}. \quad (13.9)$$

Pri malých obehových čerpadlách tvorí motor s čerpadlom jeden celok a výrobca udáva len elektrický príkon.

Príklad 13.1 – Príkony čerpadla

Modelové čerpadlo pracuje v bode $Q = 50 \text{ m}^3/\text{h}$, $H = 20,75 \text{ m}$ s účinnosťou 0,75. Motor má účinnosť 0,92. Určte príkon na hriadieli, elektrický príkon a celkovú účinnosť. Vypočítajte aj špecifické otáčky pri 1450/min.

Riešenie. $P_{\text{h}} = 2,83 \text{ kW}$ (odd. 13.6), $P = 2,83/0,75 = 3,77 \text{ kW}$, $P_{\text{el}} = 3,77/0,92 = 4,10 \text{ kW}$. Celková účinnosť je $0,75 \cdot 0,92 = 0,69$. Podľa (13.2):

$$n_q = 1450 \cdot \frac{\sqrt{50/3600}}{20,75^{3/4}} = 1450 \cdot \frac{0,118}{9,73} = 17,6.$$

Ide o čerpadlo s radiálnym obežným kolesom. ■

13.8 Účinnosť čerpadla

Účinnosť čerpadla $\eta_{\text{c}} = P_{\text{h}}/P$ zahŕňa tri druhy strát [15]:

- **hydraulické straty** (trenie v kanáloch kolesa a skrine, rázové straty, straty v špirále), ktoré vyjadruje hydraulická účinnosť $\eta_{\text{h}} = H/H_{\text{t}}$,
- **objemové straty**, teda prietok, ktorý cez tesniacu štrbinu medzi kolesom a skriňou prúdi späť na sanie (kap. 8), s objemovou účinnosťou η_{v} ,
- **mechanické straty** v ložiskách a upchávkach a trenie diskov kolesa v kvapaline, s mechanickou účinnosťou η_{m} .

Celková účinnosť je $\eta_{\text{c}} = \eta_{\text{h}} \eta_{\text{v}} \eta_{\text{m}}$. Veľké čerpadlá dosahujú 80 % až 90 %, malé čerpadlá s výkonom rádovo stoviek wattov 40 % až 60 %. Najnižšiu celkovú účinnosť majú malé obehové čerpadlá, pretože straty v štrbinách, ložiskách a v motore sú pri malom výkone relatívne veľké. Moderné obehové čerpadlá s elektronicky komutovanými motormi s permanentnými magnetmi majú výrazne vyššiu účinnosť ako staršie čerpadlá s asynchrónnymi motormi. V EÚ je ich minimálna účinnosť predpísaná nariadením o ekodizajne (index energetickej účinnosti EEI).

13.9 Bod maximálnej účinnosti (BEP)

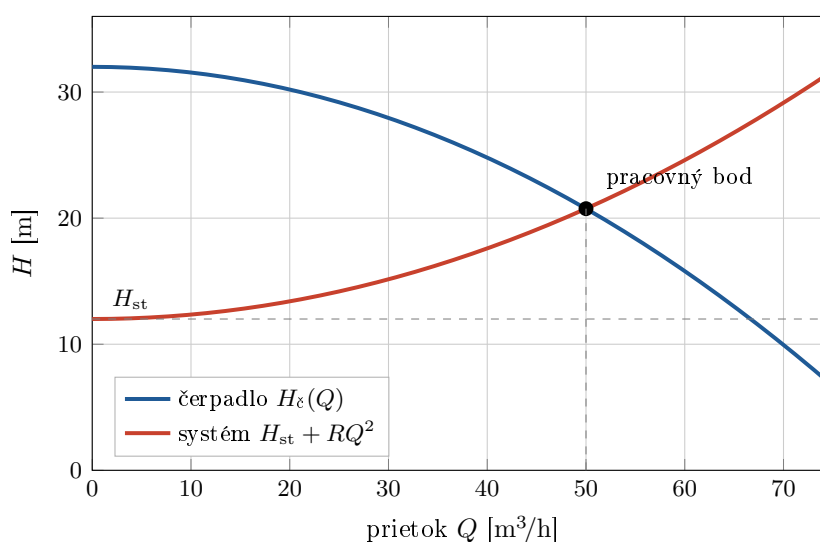
Účinnosť čerpadla dosahuje maximum pri určitom prietoku, ktorý sa nazýva *bod najvyššej účinnosti* (angl. *best efficiency point*, BEP). V tomto bode nabieha prúd na lopatky kolesa a

do špirály v smere ich sklonu a hydraulické straty sú najmenšie. Pri menšom prietoku vznikajú pri vstupe do kola spätné prúdy a víry, pri väčšom rastú straty trením a riziko kavitácie. Prevádzka ďaleko od BEP okrem zníženia účinnosti zväčšuje radiálne sily na koleso, vibrácie a hluk a skracuje životnosť ložísk a tesnení [15].

Čerpadlo preto volíme tak, aby jeho pracovný bod ležal blízko BEP. Orientačne sa odporúča oblasť 70 % až 120 % prietoku v BEP (obr. 13.4). Pri systémoch s premenlivým prietokom by mal pracovný bod ležať v tejto oblasti počas väčšiny prevádzkového času, nie len pri maximálnom prietoku.

13.10 Čerpadlo a charakteristika systému

Potrubný systém potrebuje pri prietoku Q dopravnú výšku $H_{\text{sys}} = H_{\text{st}} + RQ^2$ (rov. (12.9)). Čerpadlo pri danom prietoku dodá $H_{\text{č}}(Q)$. Obe charakteristiky vykreslíme do jedného diagramu (obr. 13.5). Tam, kde čerpadlo dodá viac, ako systém potrebuje, sa prietok zväčšuje. Tam, kde dodá menej, sa zmenšuje. Systém sa ustáli v priesečníku oboch kriviek.



Obr. 13.5. Pracovný bod modelového čerpadla v otvorenom systéme so statickou výškou 12 m.

13.11 Pracovný bod

Pracovný bod je priesečník charakteristiky čerpadla a charakteristiky systému:

$$H_{\text{č}}(Q) = H_{\text{st}} + RQ^2. \quad (13.10)$$

Pri parabolickej náhrade (13.6) bez lineárneho člena dostaneme priamo

$$Q = \sqrt{\frac{H_0 - H_{\text{st}}}{a + R}}. \quad (13.11)$$

Príklad 13.2 – Pracovný bod v otvorenom systéme

Modelové čerpadlo ($H_{\text{č}} = 32 - 0,0045 Q^2$) čerpá vodu do nádrže so statickou výškou 12 m. Straty v potrubí sú $h_z = 0,0035 Q^2$ (m, m³/h). Určte pracovný bod a príkon.

Riešenie. Podľa (13.11): $Q = \sqrt{(32 - 12)/(0,0045 + 0,0035)} = 50 \text{ m}^3/\text{h}$, $H = 12 + 0,0035 \cdot 50^2 = 20,75 \text{ m}$. Pracovný bod leží v BEP ($\eta = 0,75$), príkon na hriadieli je 3,77 kW (pr. 13.1).



Stabilnú prevádzku zaručuje charakteristika čerpadla, ktorá s rastúcim prietokom klesá. Niektoré čerpadlá majú pri malých prietokoch charakteristiku s maximom (tzv. labilnú vetvu). Pri veľkej statickej výške tu môžu vzniknúť dva priesečníky a prietok potom kolíše.

13.12 Čerpadlá zapojené v sérii

Pri sériovom zapojení preteká obidvoma čerpadlami rovnaký prietok a ich dopravné výšky sa sčítajú:

$$H_s(Q) = H_1(Q) + H_2(Q). \quad (13.12)$$

Výslednú charakteristiku dostaneme „zvislým“ sčítaním kriviek (obr. 13.6). Sériové zapojenie sa používa pri veľkej potrebnej dopravnej výške, napríklad pri studňových a vodárenských čerpadlách s veľkou statickou výškou. Viacstupňové čerpadlá majú niekoľko obežných kolies v sérii na jednom hriadieli. Pri sériovom zapojení treba kontrolovať, či druhé čerpadlo a jeho tesnenia vydržia zvýšený tlak na vstupe.

13.13 Čerpadlá zapojené paralelne

Pri paralelnom zapojení majú čerpadlá rovnakú dopravnú výšku a ich prietoky sa sčítajú:

$$Q_p(H) = Q_1(H) + Q_2(H). \quad (13.13)$$

Charakteristiku dostaneme „vodorovným“ sčítaním kriviek. Paralelné zapojenie sa používa pri premenlivom prietoku (pri malom odbere beží jedno čerpadlo, pri veľkom obe) a na zálohu, napríklad pri zdvojených čerpadlách v kotolniciach a výmenníkových staniciach.

Príklad 13.3 – Dve čerpadlá v uzavretom okruhu

Uzavretý okruh má charakteristiku $H = 0,0083 Q^2$. Modelové čerpadlo v ňom dodáva $50 \text{ m}^3/\text{h}$. Aký prietok dosiahnu dve rovnaké čerpadlá zapojené paralelne a do série?

Riešenie. Paralelne: charakteristika dvojice je $H = 32 - 0,0045 (Q/2)^2 = 32 - 0,001125 Q^2$. Z rovnosti s charakteristikou okruhu $Q = \sqrt{32/(0,001125 + 0,0083)} = 58,3 \text{ m}^3/\text{h}$.

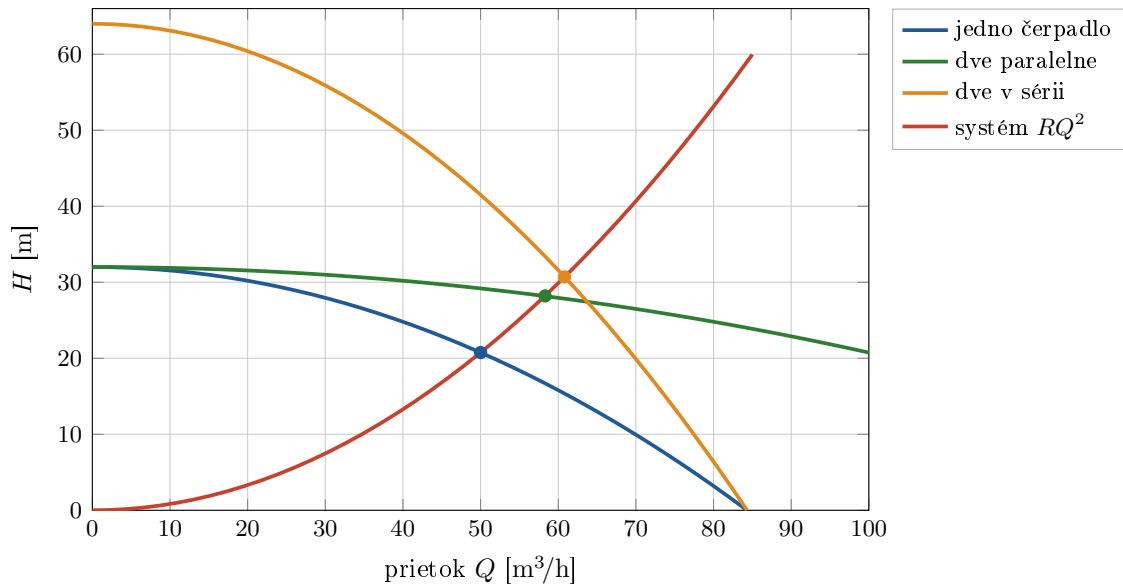
V sérii: $H = 64 - 0,009 Q^2$, $Q = \sqrt{64/(0,009 + 0,0083)} = 60,8 \text{ m}^3/\text{h}$.

Druhé čerpadlo zväčší prietok len o 17 % až 22 % (obr. 13.6). Pri systéme s veľkým odporom a bez statickej výšky je o niečo výhodnejšie sériové zapojenie. Pri systéme s veľkou statickou výškou a malým odporom je to naopak. Dve paralelné čerpadlá nikdy nedajú dvojnásobný prietok, pretože pri väčšom prietoku rastú straty v systéme. ■

13.14 Afinitné zákony

Ako sa zmenia charakteristiky čerpadla pri zmene otáčok? Rýchlostné trojuholníky pri zmene otáčok zostanú podobné, ak sa všetky rýchlosti zmenia v rovnakom pomere. Prietok je úmerný rýchlosti ($Q \propto v \propto n$), dopravná výška podľa (13.3) jej druhej mocniny a príkon súčinu QH . Pre *podobné pracovné body* toho istého čerpadla platia *afinitné zákony* [1, 15]:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2, \quad \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3. \quad (13.14)$$



Obr. 13.6. Charakteristiky dvoch rovnakých čerpadiel zapojených paralelne a do série a pracovné body v uzavretom okruhu (pr. 13.3).

Účinnosť sa v podobných bodoch takmer nemení, pokiaľ zmena otáčok nie je veľká (približne do polovice menovitých otáčok). Podobné body pri rôznych otáčkach ležia na parabole $H = kQ^2$ prechádzajúcej počiatkom, ktorá sa nazýva *parabola podobnosti*. Pri náhrade (13.6) je charakteristika čerpadla pri otáčkach n

$$H_c(Q) = H_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 - aQ^2. \quad (13.15)$$

Pozor – častá chyba

Afinitné zákony platia pre podobné body čerpadla, nie pre pracovné body systému. V uzavretom okruhu ($H_{st} = 0$) je charakteristika systému zároveň parabolou podobnosti. Pri znížení otáčok o 20 % klesne prietok o 20 % a príkon na $0,8^3 = 51\%$. V otvorenom systéme so statickou výškou však prietok klesá oveľa rýchlejšie. Pre systém z pr. 13.2 pri 80 % otáčok: $20,48 - 0,0045 Q^2 = 12 + 0,0035 Q^2$, teda $Q = 32,6 \text{ m}^3/\text{h}$, a nie 40. Pracovný bod sa navyše vzdáľuje od BEP.

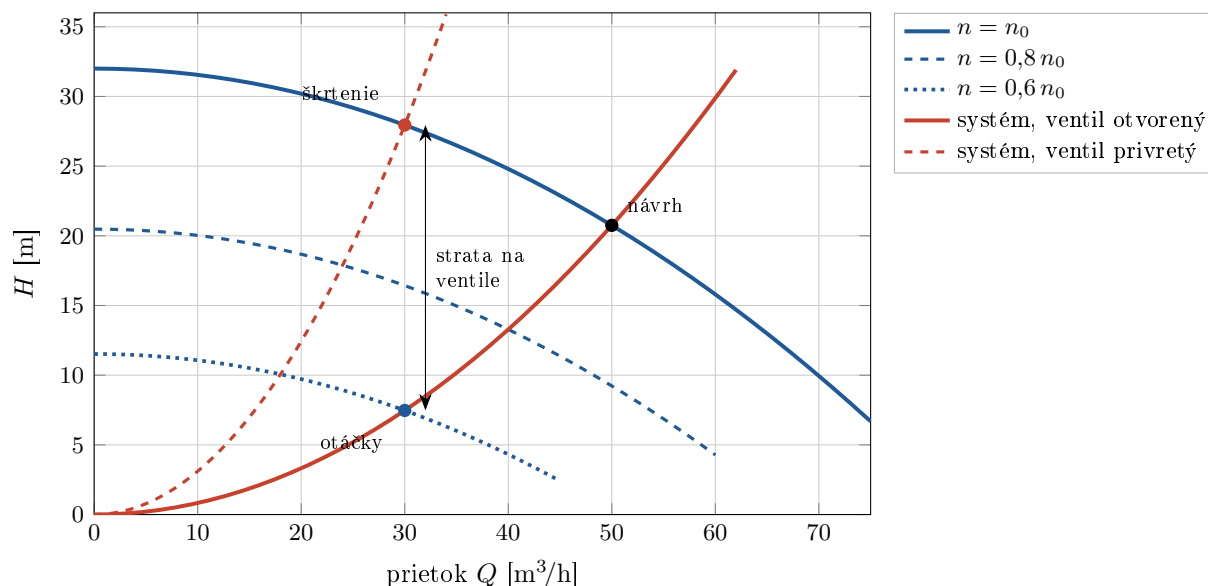
13.15 Regulácia škrtením

Najjednoduchší spôsob zmeny prietoku je *škrtenie*, teda privretie ventilu vo výtlaku čerpadla. Zväčší sa odpor systému a jeho charakteristika sa stane strmšou. Pracovný bod sa posunie po charakteristike čerpadla k menšiemu prietoku a *väčšej* dopravnej výške (obr. 13.7). Rozdiel medzi výškou, ktorú čerpadlo dodá, a výškou, ktorú systém potrebuje, sa zmarní na ventile a premení na teplo. Príkon čerpadla pritom klesá len málo, pretože výška rastie a účinnosť sa vzdáľuje od BEP.

Obdobou je *obtok* (bypass): časť prietoku sa vracia z výtlaku na sanie. Spotrebič dostane menší prietok, čerpadlo však dodáva ešte väčší. Energeticky je to ešte horšie ako škrtenie. Škrtenie aj obtok sú vhodné len na jednorazové nastavenie alebo pri veľmi malých čerpadlách.

13.16 Regulácia otáčkami

Pri *regulácii otáčkami* sa zmení charakteristika čerpadla podľa (13.15). Charakteristika systému zostane nezmenená a čerpadlo dodá len toľko výšky, koľko systém pri danom prietoku potrebuje (obr. 13.7). Otáčky asynchronných motorov sa menia *frekvenčným meničom*. Obehové čerpadlá s elektronicky komutovanými motormi majú reguláciu otáčok zabudovanú (odd. 13.22).



Obr. 13.7. Zníženie prietoku z 50 na 30 m³/h v uzavretom okruhu škrténím a znížením otáčok.

13.17 Energetické porovnanie spôsobov regulácie

Príklad 13.4 – Škrtenie verus zmena otáčok

Modelové čerpadlo pracuje v uzavretom vykurovacom okruhu s charakteristikou $H = 0,0083 Q^2$. Pri návrhovom prietoku 50 m³/h je v BEP. Porovnajte príkon na hriadieli pri prietoku 30 m³/h pri škrtení a pri znížení otáčok.

Riešenie. Škrtenie: čerpadlo pracuje na pôvodnej charakteristike, $H = 32 - 0,0045 \cdot 30^2 = 27,95$ m. Účinnosť pri $Q/Q_{\text{BEP}} = 0,6$ je $\eta = 0,75 (2 \cdot 0,6 - 0,6^2) = 0,63$.

$$P = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot (30/3600) \cdot 27,95}{0,63} = 3,63 \text{ kW}.$$

Okruh pritom potrebuje len $0,0083 \cdot 30^2 = 7,47$ m. Zvyšných 20,5 m sa zmari na ventile.

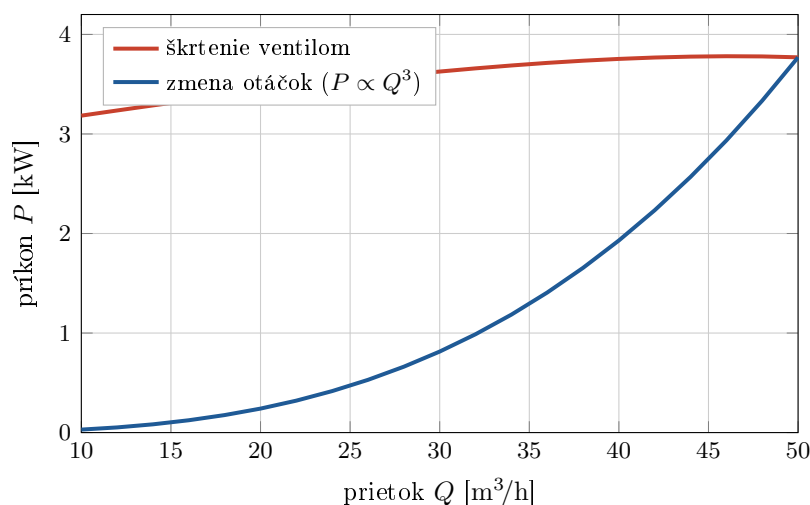
Zmena otáčok: bod (30; 7,47) leží na parabole okruhu, ktorá je parabolou podobnosti prechádzajúcou bodom BEP. Otáčky sa znížia na $30/50 = 60\%$ a účinnosť zostane 0,75:

$$P = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot (30/3600) \cdot 7,47}{0,75} = 0,81 \text{ kW}.$$

Príkon pri znížených otáčkach je 4,5-krát menší. Pri škrtení klesol príkon z 3,77 na 3,63 kW, teda len o 4%. Tým je zodpovedaná úvodná otázka. ■

Obr. 13.8 porovnáva príkon oboch spôsobov regulácie v celom rozsahu prietokov. Pri regulácii

otáčkami v uzavretom okruhu klesá príkon s tretou mocninou prietoku. Pri škrtení zostáva takmer konštantný. Úspora je tým väčšia, čím dlhšie systém pracuje pri zníženom prietoku. V otvorených systémoch so statickou výškou je úspora menšia, pretože statickú výšku treba prekonať pri každom prietoku.



Obr. 13.8. Príkon modelového čerpadla na hriadeli v uzavretom okruhu pri regulácii prietoku škrtením a zmenou otáčok.

Frekvenčný menič má vlastné straty (2 % až 4 %) a pri nízkych otáčkach klesá aj účinnosť motora. Pri prevádzke prevažne pri plnom prietoku sa preto menič nevyplatí. Vo vykurovaní, vetraní, tepelných sieťach a vodárenstve, kde sa prietok mení počas dňa aj roka, patrí regulácia otáčok k najvýnosnejším úsporným opatreniam.

13.18 Kavitácia

Na vstupe do obežného kola kvapalina zrýchľuje a obteká nábežné hrany lopatiek. Tlak tu klesá pod tlak v sacom hrdle. Ak klesne na tlak sýtych pár p_s pri danej teplote (kap. 2), kvapalina sa lokálne odparí a vzniknú parné bubliny. Prúd ich unesie do oblasti s vyšším tlakom, kde náhle skondenzujú a zaniknú (implodujú). Tento jav sa nazýva *kavitácia* [15, 34]. Jej dôsledky:

- pokles dopravnej výšky, prietoku a účinnosti, pri rozvinutej kavitácii až prerušenie čerpania,
- hluk (typický „štrk“ v čerpadle) a vibrácie,
- *kavitačná erózia*: implózie bublín pri stene vytvárajú mikropóry a rázové vlny s tlakmi stoviek megapascalov, ktoré postupne rozrušujú materiál lopatiek.

Kavitácia hrozí najmä pri čerpaní teplej kvapaliny s vysokým tlakom sýtych pár, pri veľkej sacej výške, pri veľkých stratách v sacom potrubí (zanesený filter, sací kôš) a pri prietoku väčšom ako v BEP. Rovnaký jav poznáme aj z vodných turbín a lodných vrtúľ (kap. 14).

13.19 NPSH

Rezervu proti kavitácii vyjadruje veličina NPSH (*net positive suction head*, čistá sacia výška). Rozlišujeme dve hodnoty [1, 15]:

- **NPSH_A** (*available*, k dispozícii) je vlastnosť systému. Je to rozdiel celkovej energetickej výšky kvapaliny v sacom hrdle a výšky zodpovedajúcej tlaku sýtych pár:

$$\text{NPSH}_A = \frac{p_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} - \frac{p_s}{\rho g}, \quad (13.16)$$

kde p_s je absolútny tlak v sacom hrdle. Pri saní z nádrže s tlakom p_0 nad hladinou, ktorá je o H_s pod osou čerpadla (obr. 13.9), dostaneme z energetickej rovnice

$$\text{NPSH}_A = \frac{p_0 - p_s}{\rho g} - H_s - h_{zs}, \quad (13.17)$$

kde h_{zs} sú straty v sacom potrubí. Pri prítoku (hladina nad čerpadlom) je H_s záporné.

- **NPSH_R** (*required*, potrebné) je vlastnosť čerpadla. Určuje ju výrobca meraním ako hodnotu, pri ktorej kavitácia zníži dopravnú výšku o 3 %. S prítokom rastie (obr. 13.10).

Čerpadlo pracuje bez kavitácie, ak

$$\text{NPSH}_A \geq \text{NPSH}_R + \text{rezerva}, \quad (13.18)$$

kde rezerva je obvykle aspoň 0,5 m až 1 m. Pri 3 % poklese výšky kavitácia už prebieha. Pri dlhodobej prevádzke alebo horúcej vode sa preto volí väčšia rezerva [15]. Presnejšie určenie NPSH_R je možné aj numerickými simuláciami [34].

Príklad 13.5 – Kontrola NPSH

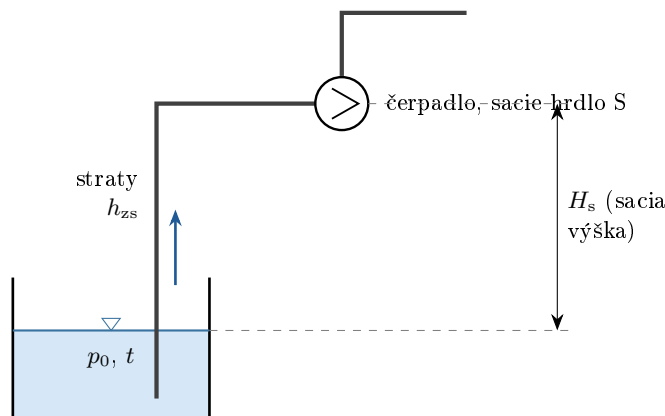
Modelové čerpadlo saje vodu z otvorenej nádrže, ktorej hladina je 4 m pod osou čerpadla. Straty v sacom potrubí sú pri 50 m³/h 0,8 m, $\text{NPSH}_R = 3,5$ m. Atmosférický tlak je 101,3 kPa. Posúďte kavitáciu pri teplote vody 20 °C a 60 °C.

Riešenie. Pri 20 °C je $p_s = 2,34$ kPa a $\rho = 998$ kg/m³ (tab. B.1):

$$\text{NPSH}_A = \frac{101\,300 - 2\,340}{998 \cdot 9,81} - 4 - 0,8 = 10,11 - 4,8 = 5,31 \text{ m.}$$

Rezerva je $5,31 - 3,5 = 1,81$ m a čerpadlo pracuje bezpečne.

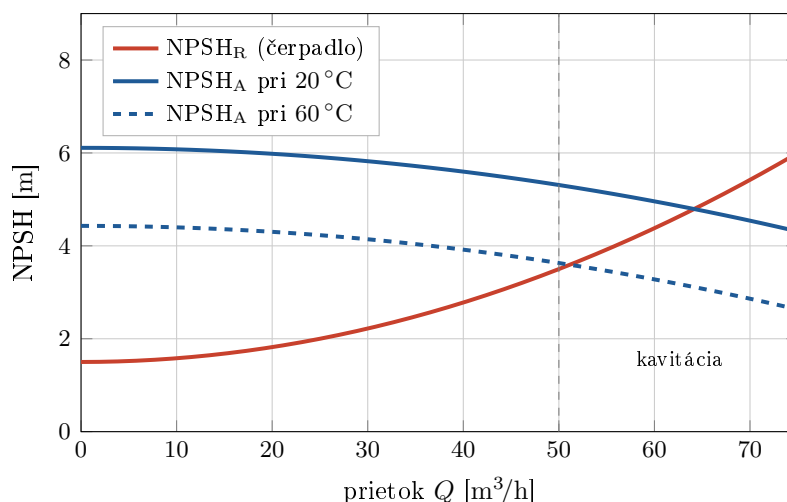
Pri 60 °C je $p_s = 19,94$ kPa a $\rho = 983,3$ kg/m³: $\text{NPSH}_A = 8,43 - 4,8 = 3,63$ m. Rezerva je len 0,13 m a hrozí kavitácia (obr. 13.10). Pomôže umiestniť čerpadlo pod hladinu (na prítok), zmenšiť straty v sacom potrubí alebo zvoliť čerpadlo s menším NPSH_R . ■



Obr. 13.9. Čerpadlo so sacou výškou H_s nad hladinou v nádrži.

Z (13.17) vyplýva najväčšia prípustná sacia výška

$$H_{s,\max} = \frac{p_0 - p_s}{\rho g} - h_{zs} - \text{NPSH}_R - \text{rezerva}. \quad (13.19)$$



Obr. 13.10. NPSH potrebné čerpadlom a NPSH systému k dispozícii pri dvoch teplotách vody (pr. 13.5). Vpravo od priesečníka nastáva kavitácia.

Pri studenej vode a atmosférickom tlaku je teoretické maximum $(p_0 - p_s)/(\rho g) \approx 10$ m. Prakticky odstredivé čerpadlá nasávajú zo hĺbky najviac 6 m až 7 m. Z hlbších studní sa preto voda čerpá ponornými čerpadlami, ktoré sú umiestnené pod hladinou. V uzavretých okruhoch určuje tlak na sacej strane čerpadla expanzná nádoba (odd. 12.4). Pri horúcej vode treba zabezpečiť, aby tlak v sacom hrdle bol dostatočne nad tlakom sýtych pár.

13.20 Výber čerpadla z katalógových údajov

Postup výberu čerpadla:

1. Určíme návrhový prietok Q (z potreby tepla, vody, prietoku turbíny a pod.).
2. Zostavíme charakteristiku systému: statickú výšku a straty trením a v miestnych odporoch pri návrhovom prietoku (kap. 10 až 12). Pri sieťach počítame s kritickou vetvou.
3. Určíme potrebnú dopravnú výšku. Prídavok na neistotu výpočtu volíme primerane. Predimenzované čerpadlo pracuje ďaleko vpravo od BEP alebo sa musí škrtiť.
4. V súhrnnom diagrame výrobcu (poli charakteristík) nájdeme čerpadlá, ktorých oblasť použitia obsahuje návrhový bod. Z nich vyberieme také, ktorého BEP leží blízko návrhového bodu.
5. Overíme pracovný bod na skutočnej charakteristike, príkon motora (aj pri najväčšom možnom prietoku) a NPSH.
6. Zohľadníme vlastnosti kvapaliny: hustotu a viskozitu (nemrznúce zmesi), teplotu, agresivitu a obsah pevných častíc.
7. Pri premenlivom prietoku zvolíme čerpadlo s reguláciou otáčok a posúdime pracovné body v celom rozsahu prevádzky.

13.21 Celoročná spotreba elektrickej energie

Ročnú spotrebu elektriny určíme z trvania jednotlivých prevádzkových stavov:

$$E = \sum_i P_{\text{el},i} \tau_i, \quad (13.20)$$

kde τ_i je doba prevádzky v stave i za rok. Prevádzkové stavy sa určia z ročného priebehu potreby, napríklad z čiar trvania prietoku alebo z denostupňov vykurovacieho obdobia.

Príklad 13.6 – Ročná spotreba pri rôznych spôsoboch regulácie

Čerpadlo z pr. 13.4 pracuje 5 000 h/r. Počas 10 % času je potrebný prietok 50 m³/h, 30 % času 40, 40 % času 30 a 20 % času 20 m³/h. Motor má účinnosť 0,9, frekvenčný menič 0,97. Porovnajte ročnú spotrebu elektriny pri škrtení a pri regulácii otáčok.

Riešenie. Príkony na hriadeli (výpočet ako v pr. 13.4):

Q [m ³ /h]	podiel času	škrtenie [kW]	otáčky [kW]
50	10 %	3,77	3,77
40	30 %	3,75	1,93
30	40 %	3,63	0,81
20	20 %	3,43	0,24

Ročná energia na hriadeli je 18,2 MW · h pri škrtení a 6,65 MW · h pri regulácii otáčok. Elektrická spotreba:

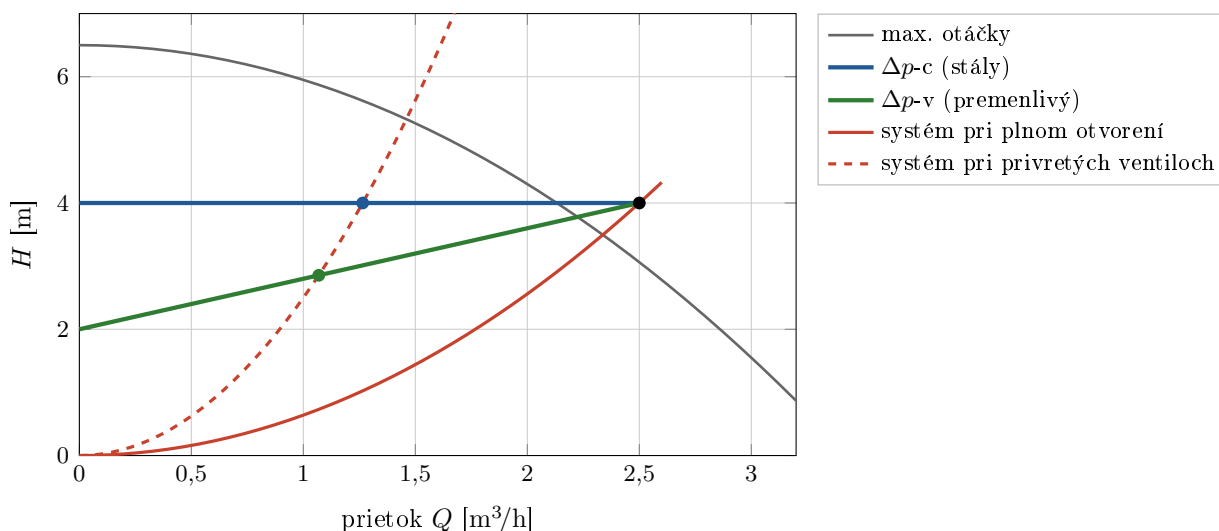
$$E = \frac{18,2}{0,9} = 20,2 \text{ MW} \cdot \text{h}, \quad E_n = \frac{6,65}{0,9 \cdot 0,97} = 7,6 \text{ MW} \cdot \text{h}.$$

Regulácia otáčok ušetrí 12,6 MW · h ročne, teda 62 %. Pri cene 0,20 EUR/kWh je to približne 2 500 EUR ročne. Zjednodušenie: pokles účinnosti motora pri nízkych otáčkach sme zanedbali. ■

13.22 Čerpadlá v solárnych a tepelných systémoch

V malých vykurovacích a solárnych systémoch sa používajú *obehové čerpadlá* s mokrým rotorom. Rotor motora je v kvapaline, ktorá ho chladí a maže ložiská, takže čerpadlo nemá upchávku. Moderné obehové čerpadlá majú elektronicky komutovaný motor s reguláciou otáčok a niekoľko režimov prevádzky (obr. 13.11):

- **stály tlakový rozdiel ($\Delta p\text{-c}$):** čerpadlo udržiava rovnakú dopravnú výšku pri každom prietoku. Je vhodné pre podlahové vykurovanie a systémy, kde tvoria väčšinu straty spotrebiče,
- **premenlivý tlakový rozdiel ($\Delta p\text{-v}$):** dopravná výška klesá s prietokom. Pri zatváraní termostatických ventilov klesne aj strata v rozvodoch a čerpadlo dodá menej. Je vhodné pre dvojručkové sústavy s vykurovacími telesami,
- **stále otáčky**, prípadne **externé riadenie** (signál PWM alebo 0 V až 10 V) z regulátora solárneho systému alebo tepelného čerpadla.



Obr. 13.11. Pracovné body obehového čerpadla pri regulácii na stály ($\Delta p\text{-c}$) a premenlivý ($\Delta p\text{-v}$) tlakový rozdiel. Po privretí termostatických ventilov sa pracovný bod posunie po zvolenej regulačnej čiare.

Aplikácia v OZE: čerpadlá v solárnych systémoch a tepelných čerpadlách

V solárnom systéme regulátor zapína čerpadlo podľa rozdielu teplôt kolektora a zásobníka. Moderné regulátory menia otáčky čerpadla tak, aby udržali požadovaný teplotný rozdiel. Pri slabom slnečnom žiarení tak znižujú prietok aj spotrebu elektriny [6]. Pri nemrznúcej zmesi treba počítať s väčšou viskozitou, najmä pri rannom rozbehu (kap. 2).

V systémoch *drain-back* je kolektorový okruh v pokoji vyprázdnený a kvapalina je v zbernej nádobe pod kolektormi. Pri spustení musí čerpadlo naplniť okruh a prekonať celú statickú výšku kolektorov nad hladinou v nádobe. Ide teda o otvorený systém. Po zaplnení sa v okruhu vytvorí násoska a čerpadlo pokrýva už len straty. Čerpadlo pre *drain-back* systém sa preto volí podľa statickej výšky pri plnení a otáčky sa po naplnení znížia.

Primárny okruh tepelného čerpadla zem–voda má veľkú tlakovú stratu vo vrtoch a vo výparníku. Čerpadlo primárneho okruhu je preto spravidla väčšie ako obehové čerpadlo vykurovania. Jeho spotreba znižuje sezónny výkonový faktor, a preto sa pri návrhu vrtového poľa kontroluje tlaková strata aj Re pri najnižšej teplote zmesi (pr. 9.8).

Zhrnutie kapitoly

- Čerpadlo musí dodať dopravnú výšku $H = H_{\text{st}} + h_z(Q)$. V energetike prevládajú odstredivé čerpadlá. Typ obežného kolesa určujú špecifické otáčky n_q .
- Teoretická dopravná výška vyplýva z Eulerovej rovnice $H_{t\infty} = u_2 v_{\theta 2} / g$. Skutočná charakteristika $H(Q)$ je menšia o sklz a straty a klesá s prietokom.
- Hydraulický výkon je $P_h = \rho g Q H$. Elektrický príkon je väčší o straty čerpadla, motora a meniča.
- Čerpadlo má pracovať blízko bodu najvyššej účinnosti (BEP).
- Pracovný bod je priesečník charakteristiky čerpadla a systému. Pri sériovom zapojení sa sčítajú výšky, pri paralelnom prietoky.

- Afinitné zákony: $Q \propto n$, $H \propto n^2$, $P \propto n^3$ pre podobné body. Platia pre systém len vtedy, ak je jeho charakteristika parabolou cez počiatok.
- Regulácia škrtením takmer neznižuje príkon. Regulácia otáčkami v uzavretých okruhoch znižuje príkon s tretou mocninou prietoku.
- Kavítácii zabráni podmienka $NPSH_A \geq NPSH_R + \text{rezerva}$. Pri teplej vode a veľkej sacej výške je riziko kavitácie veľké.

Kontrolné otázky

1. Čím sa líšia hydrodynamické a objemové čerpadlá? Kde sa ktoré používajú?
2. Ako súvisí Eulerova rovnica s dopravnou výškou čerpadla? Prečo je skutočná výška menšia ako teoretická?
3. Prečo sa dopravná výška udáva v metroch a nie v pascaloch?
4. Ktoré straty zahŕňa účinnosť čerpadla? Prečo majú malé obehové čerpadlá nízku účinnosť?
5. Čo je BEP? Prečo nemá čerpadlo dlhodobo pracovať ďaleko od neho?
6. Ako sa určí pracovný bod čerpadla? Ako sa posunie pri privretí ventilu?
7. Prečo dve paralelne zapojené čerpadlá nedajú dvojnásobný prietok?
8. Formulujte afinitné zákony. Prečo v otvorenom systéme so statickou výškou neplatia pre pracovné body?
9. Prečo sa pri regulácii škrtením príkon čerpadla takmer nemení?
10. Čo je kavitácia a aké má následky?
11. Definujte $NPSH_A$ a $NPSH_R$. Ako ovplyvňuje teplota vody nebezpečenstvo kavitácie?
12. Prečo sa z hlbokých studní čerpá ponornými čerpadlami?
13. Aký je rozdiel medzi reguláciou Δp -c a Δp -v obehového čerpadla?
14. Prečo musí čerpadlo v systéme drain-back prekonať statickú výšku, hoci ide o uzavretý okruh?

Úlohy na precvičenie

1. Čerpadlo dopravuje 20 L/s vody na výšku 35 m. Účinnosť čerpadla je 0,78, motora 0,93. Určte hydraulický výkon, príkon na hriadeľ a elektrický príkon. [6,87; 8,80; 9,47 kW]
2. Určte špecifické otáčky čerpadla s parametrami v BEP $Q = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$, $H = 40 \text{ m}$, $n = 2900/\text{min}$. O aký typ kolesa ide? [25,8; radiálne]
3. Čerpadlo s charakteristikou $H = 45 - 0,02 Q^2$ pracuje v systéme $H = 18 + 0,01 Q^2$ (m, m^3/h). Určte pracovný bod. [30 m^3/h ; 27 m]
4. Čerpadlo pri 2900/min dodáva 30 m^3/h pri výške 40 m s príkonom 4,5 kW. Určte podobný bod pri 2320/min. [24 m^3/h ; 25,6 m; 2,30 kW]
5. Otáčky čerpadla v uzavretom okruhu sa znížia na 70 %. Koľkokrát sa zmení prietok a hydraulický výkon? [0,7; 0,343]

6. Čerpadlo z úlohy 3 sa prevádzkuje pri 80 % otáčok. Aký bude prietok? Porovnajete s odhadom podľa afinitných zákonov. [19,0 m³/h; podľa affinity 24]
7. Dve čerpadlá z úlohy 3 sa zapoja paralelne do toho istého systému. Určte celkový prietok a dopravnú výšku. [42,4 m³/h; 36 m]
8. Čerpadlo saje vodu s teplotou 50 °C z otvorenej nádrže s hladinou 3 m pod osou čerpadla. Atmosférický tlak je 98 kPa, straty v sacom potrubí 0,6 m, $NPSH_R = 4$ m. Určte $NPSH_A$, rezervu a najväčšiu saciu výšku pri rezerve 0,5 m. [5,24 m; 1,24 m; 3,74 m]
9. Staré obehové čerpadlo s príkonom 65 W pracuje 5 000 h/r. Nové čerpadlo s reguláciou otáčok má priemerný príkon 12 W. Koľko elektriny sa ročne ušetrí? [265 kW · h]
10. Solárny okruh má pri 0,6 m³/h tlakovú stratu 25 kPa. Určte hydraulický výkon. Aká je celková účinnosť obehového čerpadla s elektrickým príkonom 25 W? [4,2 W; 17 %]
11. Systém drain-back má kolektory 7 m nad hladinou v zbernej nádobe. Tlaková strata okruhu pri 0,4 m³/h je 15 kPa (voda). Akú dopravnú výšku potrebuje čerpadlo pri plnení a akú po vytvorení násosky? [8,5 m; 1,5 m]
12. Pre modelové čerpadlo v systéme z pr. 13.2 vypočítajte pracovný bod pri 90 % a 70 % otáčok a porovnajete ho s BEP pri týchto otáčkach. [41,7 a 21,4 m³/h; BEP pri 45 a 35]

Kapitola 14

Hydraulické turbíny a malé vodné elektrárne

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent určí hydroenergetický potenciál úseku toku, čistý spád a výkon vodnej elektrárne. Vysvetlí premenu energie v turbíne pomocou Eulerovej rovnice a rýchlostných trojuholníkov, rozlíši rovnotlakové a pretlakové turbíny a pozná ich hlavné typy. Zvolí vhodný typ turbíny podľa spádu, prietoku a merných otáčok, posúdi kavitáciu a saciu výšku. Vypočíta prietok v náhone a cez prepád a určí ročnú výrobu malej vodnej elektrárne z čiary prekročenia prietokov.

Kľúčové pojmy

hydroenergetický potenciál, hrubý a čistý spád, malá vodná elektráreň (MVE), Eulerova turbínová rovnica, rovnotlaková a pretlaková turbína, Peltonova, Francisova, Kaplanova a Bánkiho turbína, savka, merné otáčky, Thomov kavitačný súčiniteľ, náhon, Manningov vzťah, Froudovo číslo, kritická hĺbka, vodný skok, prepád, prečerpávací elektráreň, čiara prekročenia prietokov, inštalovaný a zostatkový prietok

Voda je najstarším a stále jedným z najvýznamnejších obnoviteľných zdrojov elektriny. Na rozdiel od slnka a vetra je jej výroba dobre predvídateľná a vodné elektrárne dokážu rýchlo meniť výkon. Preto majú v elektrizačnej sústave nezastupiteľnú úlohu, a prečerpávacie elektrárne aj ako veľkokapacitné úložiská energie. *Malé vodné elektrárne* (MVE) s výkonom do 10 MW [19] využívajú spády na menších tokoch, náhonoch, jazoch a v technologických systémoch, napríklad na odtokoch z čistiarní odpadových vôd alebo vo vodovodoch.

V tejto kapitole spojíme takmer všetko, čo sme sa v knihe naučili: hydrostatiku (kap. 3), energetickú bilanciu (kap. 6), bilanciu hybnosti a momentu hybnosti (kap. 7), straty v potrubí a miestne straty (kap. 10 a 11) aj kavitáciu (kap. 13). Výklad nadväzuje na [5, 16, 19, 20]. Hydraulickému návrhu hatí sa podrobne venujú [22, 23].

Na zamyslenie

Na potoku je starý mlynský náhon s hrubým spádom 6 m. Priemerný prietok je okolo $3,6 \text{ m}^3/\text{s}$, no počas roka kolíše od 0,5 po viac ako $20 \text{ m}^3/\text{s}$. Aký veľký prietok má turbína spracovať? Ktorý typ turbíny sa hodí? A koľko elektriny za rok možno reálne vyrobiť?

Projektová úloha

Predbežný návrh MVE na zadanom profile toku. Z čiary prekročenia prietokov určite inštalovaný prietok, zvolte typ turbíny, vypočítajte straty v privádzači a ročnú výrobu elektriny. Porovnajte ročnú výrobu pre niekoľko inštalovaných prietokov a posúďte, ako sa mení doba využitia inštalovaného výkonu.

14.1 Vodná energia a hydroenergetický potenciál toku

Voda v toku má polohovú energiu, ktorá sa pri prúde korytom postupne mení na teplo trením o dno a brehy a vo víroch. Vodná elektrárň túto energiu sústreďuje do jedného miesta. Hať alebo hrádza zvýši hladinu vody, náhon alebo privádzač ju vedie s malým sklonom a malými stratami k turbíne a spád, ktorý by sa inak stratil pozdĺž toku, sa spracuje v turbíne (obr. 14.1).

Teoretický (hrubý) výkon úseku toku s prietokom Q a rozdielom hladín H_b je

$$P_b = \rho g Q H_b. \quad (14.1)$$

Súčet takýchto výkonov po úsekoch toku pri priemernom prietoku sa nazýva *hydroenergetický potenciál* toku. Technicky využiteľný potenciál je menší, pretože nie je možné využiť celý prietok ani celý spád a treba zohľadniť straty, ochranu prírody, plavbu a iné využitie vody.

Príklad 14.1 – Potenciál úseku toku

Úsek potoka dĺžky 3 km má spád 12 m a priemerný prietok $5 \text{ m}^3/\text{s}$. Určte teoretický priemerný výkon a teoretickú ročnú energiu.

Riešenie. $P_b = 1000 \cdot 9,81 \cdot 5 \cdot 12 = 589 \text{ kW}$. Ročná energia je $589 \cdot 8760 = 5,16 \text{ GW} \cdot \text{h}$. Skutočná výroba MVE bude pre straty, účinnosť a nerovnomernosť prietoku výrazne menšia (odd. 14.17). ■

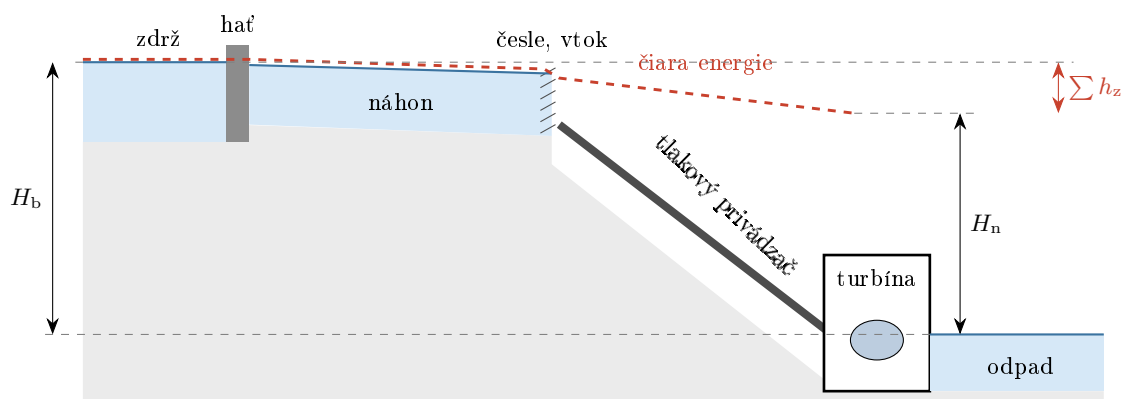
14.2 Hrubý a čistý spád, straty v privádzači

Hrubý spád H_b je rozdiel hladín hornej a dolnej vody. *Čistý spád* H_n je energia, ktorú má turbína naozaj k dispozícii. Je to rozdiel energetických výšok vody na vstupe do turbíny a na výstupe z nej. Z energetickej bilancie (rov. (6.11)) vyplýva

$$H_n = H_b - \sum h_z, \quad (14.2)$$

kde $\sum h_z$ sú straty v náhone, na česliach a vtoku (odd. 11.5), trením v privádzači (kap. 10), v kolenách a armatúrach a v odpadovom kanáli (obr. 14.1). Straty rastú s druhou mocninou prietoku, takže čistý spád pri veľkých prietokoch klesá. Pri riečnych elektrárnach navyše pri veľkých prietokoch stúpa hladina dolnej vody rýchlejšie ako hornej a hrubý spád sa znižuje.

Podľa spôsobu vytvorenia spádu rozlišujeme *priehradové* (spád vytvára hrádza alebo hať a strojovňa je pri nej) a *derivačné* elektrárne. Pri derivačných sa voda vedie náhonom alebo privádzačom s menším sklonom, ako má tok, a spád sa sústreďuje na jeho konci. Návrh privádzača je optimalizačná úloha medzi cenou potrubia a stratou výroby (odd. 10.17, [49]). Obvykle sa volí strata 2 % až 5 % hrubého spádu.



Obr. 14.1. Pozdĺžny profil derivačnej MVE s náhonom a tlakovým privádzačom. Čistý spád H_n je hrubý spád zmenšený o straty pozdĺž privodu vody.

14.3 Výkon a účinnosť vodnej elektrárne

Elektrický výkon elektrárne je (rov. (6.12))

$$P = \eta_t \eta_p \eta_g \rho g Q H_n, \quad (14.3)$$

kde η_t je účinnosť turbíny, η_p účinnosť prevodu (ak je turbína spojená s generátorom cez prevodovku alebo remeň) a η_g účinnosť generátora. Turbíny MVE majú v optimálnom bode účinnosť približne 85 % až 92 %, veľké turbíny aj viac. Generátory malých výkonov dosahujú 90 % až 96 % [19]. Celková účinnosť vzťahovaná na hrubý spád je potom okolo 70 % až 85 %. Pre predbežné odhady sa často používa vzťah $P \approx 8 Q H_b$ [kW], ktorý zodpovedá celkovej účinnosti 0,82.

Príklad 14.2 – Výkon MVE s tlakovým privádzačom

MVE z pr. 10.4 a 11.5 má hrubý spád 40 m a prietok $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$. Straty trením v privádzači sú 1,16 m, miestne straty 0,24 m. Účinnosť turbíny je 0,90, generátora 0,95. Určte čistý spád a elektrický výkon.

Riešenie. $H_n = 40 - 1,16 - 0,24 = 38,6 \text{ m}$,

$$P = 0,90 \cdot 0,95 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot 38,6 = 162 \text{ kW}.$$

Celková účinnosť vzhľadom na hrubý spád je $162 / (1000 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot 40 \cdot 10^{-3}) = 0,825$. ■

14.4 Eulerova turbínová rovnica

V odd. 7.11 sme z bilancie momentu hybnosti odvodili Eulerovu rovnicu hydraulických strojov. Pre turbínu, do ktorej voda vstupuje na polomere 1 a vystupuje na polomere 2, je teoretický spád spracovaný obežným kolesom

$$H_t = \frac{u_1 v_{\theta 1} - u_2 v_{\theta 2}}{g} \quad (14.4)$$

(rov. (7.14)). Turbína odoberá vode moment hybnosti: rozvádzač vodu pred kolesom roztočí a koleso ju „odkrúti“. Aby sa na výstupe nestrácala kinetická energia obvodovej zložky rýchlosti, navrhuje sa koleso tak, aby voda v optimálnom bode vystupovala bez víru, $v_{\theta 2} \approx 0$. Potom

$$H_t = \frac{u_1 v_{\theta 1}}{g}. \quad (14.5)$$

Pomer teoretického a čistého spádu je *hydraulická účinnosť* $\eta_h = H_t/H_n$. Rozdiel pokrývajú hydraulické straty v špirále, rozvádzači, kolese a savke. Celková účinnosť turbíny zahŕňa ešte objemové straty (voda, ktorá obteká koleso štrbinami) a mechanické straty v ložiskách a tesneniach [20].

Príklad 14.3 – Obvodová zložka rýchlosti na vstupe do kolesa

Pre turbínu z pr. 14.2 ($H_n = 38,6$ m) s hydraulickou účinnosťou 0,92, vstupným priemerom kolesa 0,5 m a otáčkami 750/min určte obvodovú zložku absolútnej rýchlosti na vstupe do kolesa pri výstupe bez víru.

Riešenie. $H_t = 0,92 \cdot 38,6 = 35,5$ m, $u_1 = \pi D_1 n / 60 = \pi \cdot 0,5 \cdot 750 / 60 = 19,6$ m/s. Podľa (14.5):

$$v_{\theta 1} = \frac{g H_t}{u_1} = \frac{9,81 \cdot 35,5}{19,6} = 17,7 \text{ m/s.}$$

Túto obvodovú zložku musí vode udeliť rozvádzač a špirála. ■

14.5 Rýchlostné trojuholníky

Absolútnu rýchlosť vody $\mathbf{v}$ rozkladáme na unášavú (obvodovú) rýchlosť kolesa $\mathbf{u}$ a relatívnu rýchlosť voči lopatke $\mathbf{w}$: $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ (obr. 7.8). Relatívna rýchlosť musí na vstupe smerovať v smere nábežnej hrany lopatky, inak voda naráža na lopatku a vznikajú *rázové straty*. Na výstupe sleduje relatívna rýchlosť sklon odtokovej hrany. Z rýchlostných trojuholníkov na vstupe a výstupe sa pri návrhu určujú uhly lopatiek, rozvádzača aj rozmery kolesa.

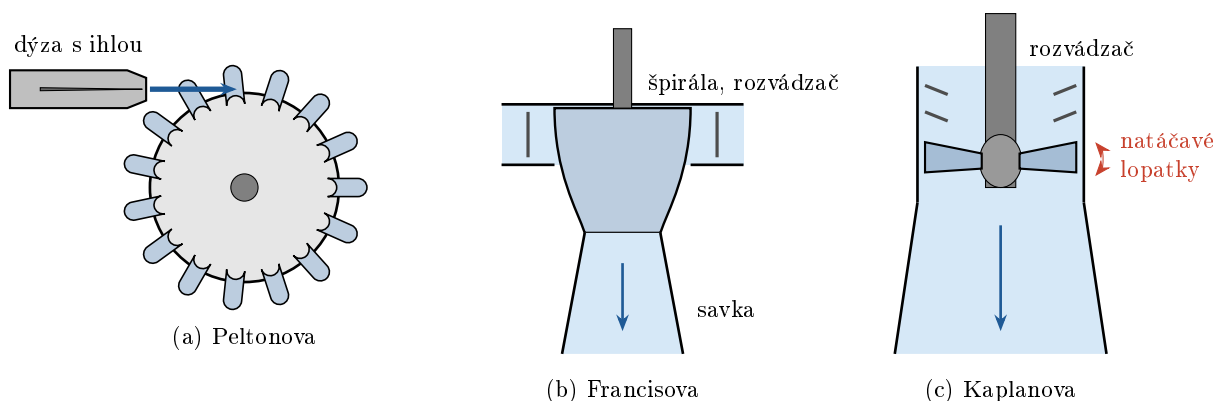
Pri zmene prietoku sa zmenia meridiánové (prietokové) zložky rýchlosti, kým obvodová rýchlosť kolesa pri stálych otáčkach zostane rovnaká. Trojuholníky sa preto deformujú. Na vstupe vzniká nábeh na lopatku pod iným uhlom a na výstupe zostáva vír. Pretlakové turbíny to kompenzujú natáčaním lopatiek rozvádzača, Kaplanove turbíny aj natáčaním lopatiek obežného kolesa (odd. 14.9). Vír za kolesom pri prevádzke mimo optimálneho bodu spôsobuje v savke tlakové pulzácie a vibrácie.

14.6 Rovnotlakové a pretlakové turbíny

Turbíny sa delia podľa toho, kde sa tlaková energia vody mení na kinetickú [16, 20]:

- **Rovnotlakové (akčné) turbíny** premenia celý spád na kinetickú energiu voľného prúdu v dýze ešte pred kolesom. Koleso pracuje pri atmosférickom tlaku a len mení smer prúdu (odd. 7.9). Patria sem Peltonova, Turgova a Bánkiho turbína.
- **Pretlakové (reakčné) turbíny** majú koleso úplne zaplavené vodou a tlak v ňom klesá od vstupu k výstupu. Časť energie sa mení na kinetickú až v kolese. Koleso je poháňané aj reakciou zrýchľujúcej sa vody v kanáloch medzi lopatkami. Patria sem Francisova, Kaplanova a vrtuľová turbína. Za kolesom je savka, ktorá spätne získava kinetickú energiu a umožňuje umiestniť turbínu nad dolnou vodou (odd. 14.13).

Podiel spádu spracovaného v kolese pretlakom sa nazýva *stupeň reakcie*. Pri rovnotlakových turbínach je nulový, pri Francisových približne 0,5 až 0,7, pri Kaplanových ešte väčší.



Obr. 14.2. Schémy hlavných typov turbín: (a) Peltonova s dýzou a lopatkami v tvare misiek, (b) Francisova v meridiánovom reze, (c) Kaplanova s natáčavými lopatkami obežného kola.

14.7 Peltonova turbína

Peltonova turbína (obr. 14.2a) sa používa pri veľkých spádoch a malých prietokoch. Voda z privádzača vyteká jednou alebo viacerými dýzami a voľný prúd dopadá na lopatky v tvare dvojitého misiek. Ostrie uprostred misky rozdelí prúd na dve polovice, ktoré sa otočia takmer o 180° (odd. 7.9, [13, 36]).

Rýchlosť prúdu z dýzy je

$$v = \varphi \sqrt{2gH_n}, \quad (14.6)$$

kde $\varphi \approx 0,97$ až $0,98$ je rýchlostný súčiniteľ dýzy. Ideálna obvodová rýchlosť lopatiek je polovica rýchlosti prúdu (rov. (7.10)). Pre straty trením sa v praxi volí $u \approx 0,46v$ až $0,47v$. Prietok sa reguluje posúvaním ihly v dýze, ktorá mení prierez výtoku, ale takmer nemení rýchlosť prúdu. Preto má Peltonova turbína plochú krivku účinnosti a dobre pracuje aj pri malých prietokoch (obr. 14.4). Pri náhlom odpojení generátora vychýli *deflektor* prúd mimo kola. Ihla sa potom zatvára pomaly, aby v privádzači nevznikol hydraulický ráz. Turbíny s vodorovnou osou mávajú jednu alebo dve dýzy, so zvislou osou až šesť.

Príklad 14.4 – Rozmery Peltonovej turbíny

Peltonova turbína z pr. 7.4 ($H_n = 350$ m, $Q = 0,2$ m³/s) má jednu dýzu s $\varphi = 0,98$ a otáčky 1000/min. Určte priemer prúdu a priemer kola pri $u = 0,47v$.

Riešenie. $v = 0,98\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 350} = 81,2$ m/s. Plocha prúdu $A = Q/v = 2,46 \cdot 10^{-3}$ m², priemer prúdu $d = \sqrt{4A/\pi} = 56$ mm. Obvodová rýchlosť $u = 0,47 \cdot 81,2 = 38,2$ m/s, priemer kola

$$D = \frac{60u}{\pi n} = \frac{60 \cdot 38,2}{\pi \cdot 1000} = 0,73 \text{ m}.$$

Pomer $D/d = 13$ je v bežnom rozsahu. Príliš malý pomer by znamenal veľké lopatky na malom kolese a nízku účinnosť. ■

14.8 Francisova turbína

Francisova turbína (obr. 14.2b) je najrozšírenejšia pretlaková turbína pre stredné spády. Voda prichádza do *špirálovej skrine*, ktorá ju rovnomerne rozdelí po obvodu. Natáčavé lopatky *rozvádzača* vodu roztočia a regulujú prietok. Voda potom vstupuje do obežného kola radiálne z vonku a vystupuje z neho axiálne do savky. Francisova turbína dosahuje veľmi vysokú

účinnosť v optimálnom bode, ale pri malých prietokoch účinnosť rýchlo klesá (obr. 14.4). Pri prietokoch pod asi 40 % menovitého sa neodporúča dlhodobá prevádzka, pretože vznikajú silné pulzácie vo víre za kolesom [19]. Pri MVE sa Francisove turbíny používajú najmä pri spádoch rádovo desiatky až stovky metrov a pri pomerne stálom prietoku.

14.9 Kaplanova a vrtuľová turbína

Pri malých spádoch a veľkých prietokoch sa používajú *axiálne* turbíny (obr. 14.2c). Obežné koleso má tvar lodnej vrtule s malým počtom lopatiek (3 až 6). Pri *vrtuľovej* turbíne sú lopatky kolesa pevné a prietok sa reguluje len rozvádzačom. Účinnosť pri čiastočnom prietoku preto rýchlo klesá. *Kaplanova turbína* má natáčavé lopatky obežného kolesa aj rozvádzača (dvojité regulácie). Pri každom prietoku sa nastaví taká kombinácia uhlov, aby rýchlostné trojuholníky zostali blízko optimálnych. Výsledkom je veľmi plochá krivka účinnosti v širokom rozsahu prietokov (obr. 14.4). Kaplanove turbíny sa preto hodia pre riečne MVE s premenlivým prietokom. Používajú sa vo viacerých usporiadaniach. Pri *kolenovej* turbíne (turbína v tvare S) je hriadeľ vyvedený z koleno savky. Pri *prietočnej* turbíne je generátor umiestnený v uzavretom puzdre priamo v prúde vody.

14.10 Bánkiho turbína a stroje pre malé spády

Bánkiho turbína (turbína s priečnym prietokom, angl. *cross-flow*) je rovnotlaková turbína s valcovým kolesom s oblúkovými lopatkami. Voda prechádza kolesom dvakrát, najprv z vonku dovnútra a potom znútra von. Je jednoduchá na výrobu a údržbu a dá sa vyrobiť aj v malých dielňach. Rozdelením vstupného otvoru na dve komory v pomere 1:2 dosahuje plochú krivku účinnosti. Jej maximálna účinnosť je však nižšia ako pri ostatných typoch, asi 75 % až 85 % [16, 19]. Často sa používa pri obnove starých mlynov a pri mikro-elektrárnach.

Pre veľmi malé spády (približne 1 m až 10 m) sa používajú:

- **Archimedova skrutka** (vodná skrutka) pracujúca ako turbína. Je pomalobežná, znesie plávajúce nečistoty a je šetrná k rybám,
- **vodné kolesá** na obnovených historických náhonoch,
- **čerpadlá pracujúce ako turbíny** (angl. *pump as turbine*). Sú lacné, ale nemajú reguláciu a pri inom prietoku ako návrhovom je ich účinnosť nízka. Hodia sa pre stály prietok, napríklad vo vodovodoch namiesto redukčných ventilov.

Pri návrhu nových turbín pre malé spády sa čoraz častejšie používajú numerické simulácie CFD. Výsledok však závisí od zvoleného modelu turbulencie (odd. 9.7, [12]).

14.11 Merné otáčky a výber typu turbíny

Rovnaký výkon možno získať pri veľkom spáde a malom prietoku alebo naopak. Typ turbíny určujú *merne (špecifické) otáčky*. V praxi vodných turbín sa používa tvar s výkonom [16, 21]

$$n_s = n \frac{\sqrt{P}}{H_n^{5/4}} \quad [n] = 1/\text{min}, [P] = \text{kW}, [H_n] = \text{m}. \quad (14.7)$$

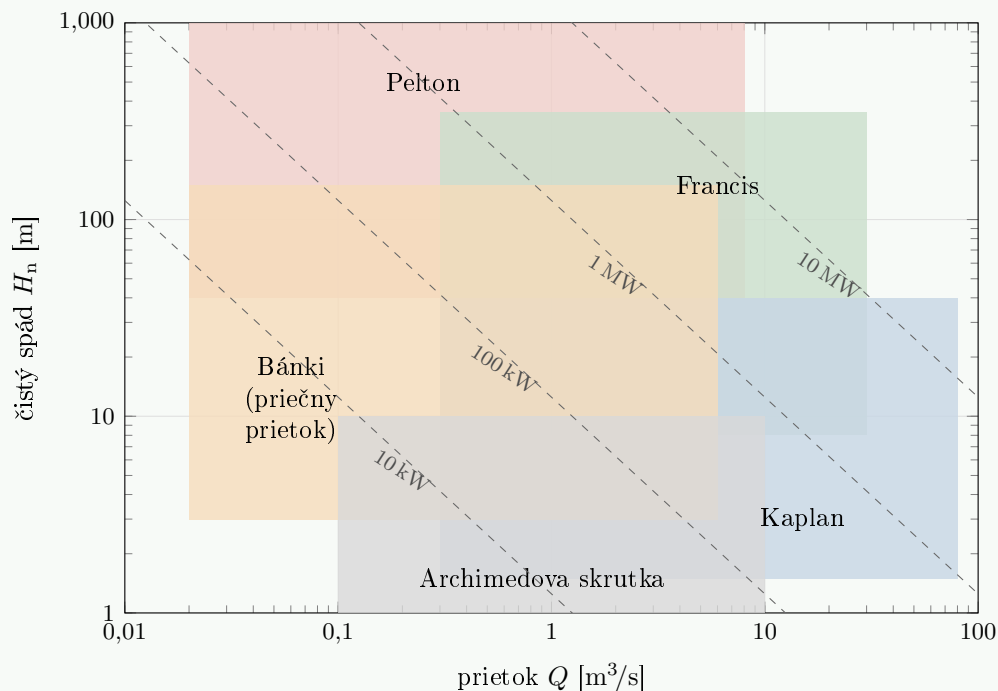
Sú to otáčky geometricky podobnej turbíny, ktorá by pri spáde 1 m dávala výkon 1 kW. Orientačné rozsahy sú: Peltonova turbína s jednou dýzou asi 10 až 35 (viacdýzová do asi 60),

Francisova 60 až 400 a Kaplanova a vrtuľová 300 až 1000 [16]. Pri generátore pripojenom priamo na sieť s frekvenciou 50 Hz musia otáčky zodpovedať synchronným otáčkam $n = 3000/p$, kde p je počet pólových párov (1 500, 1 000, 750, 600, 500/min atď.). Pri malých spádoch sa preto často používa prevodovka alebo remeňový prevod.

Na prvý výber typu turbíny slúžia diagramy oblastí použitia v súradniciach spád–prietok (obr. 14.3). Oblasti sa prekrývajú. Konečnú voľbu ovplyvní aj rozsah zmien prietoku, cena, dostupnosť výrobcu a nároky na údržbu [19, 21].

Príklad 14.5 – Voľba typu turbíny

Pre MVE z pr. 6.5 ($H_n = 23,2\text{ m}$, $Q = 1,2\text{ m}^3/\text{s}$, $P = 228\text{ kW}$) určte merné otáčky pri synchronných otáčkach 750 a 1 000/min a zvolte typ turbíny.



Obr. 14.3. Orientačné oblasti použitia turbín pre malé vodné elektrárne a čiary konštantného výkonu ($P \approx 8 Q H$). Hranice oblastí sa u rôznych výrobcov líšia.

Riešenie. Pri 750/min:

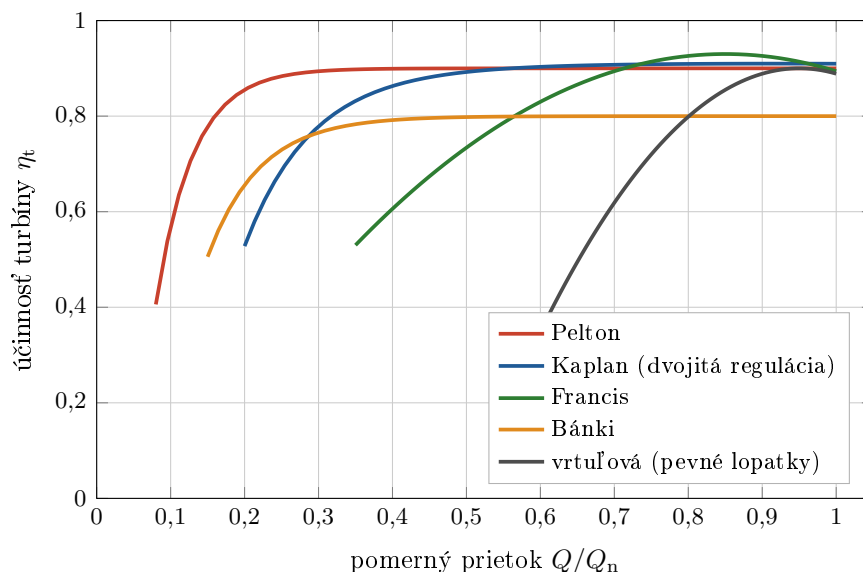
$$n_s = 750 \cdot \frac{\sqrt{228}}{23,2^{5/4}} = 750 \cdot \frac{15,1}{50,9} = 223,$$

pri 1 000/min $n_s = 297$. Obe hodnoty ležia v oblasti Francisovej turbíny, čo potvrdzuje aj obr. 14.3. Ak sa prietok počas roka výrazne mení, treba zvážiť aj Kaplanovu turbínu alebo dve menšie Francisove turbíny, ktoré dokážu pracovať pri čiastočnom prietoku s lepšou účinnosťou. ■

14.12 Charakteristiky a účinnosť pri čiastočnom zaťažení

Prietok toku sa počas roka mení, a preto MVE pracuje veľkú časť času pri čiastočnom prietoku. Rozhodujúci je preto nielen najvyšší bod účinnosti, ale celý jej priebeh (obr. 14.4). Peltonova a Kaplanova turbína majú plochú krivku a pracujú dobre od asi 10 % až 20 % menovitého prietoku. Francisova turbína má vysokú, ale užšiu krivku. Vrtuľová turbína s pevnými lopatkami

je použiteľná len v úzkom rozsahu okolo návrhového prietoku [16, 19].



Obr. 14.4. Typický priebeh účinnosti turbín MVE pri čiastočnom prietoku (orientačné krivky, podľa [19]). Skutočné krivky poskytuje výrobca.

Kompletné vlastnosti turbíny popisuje *univerzálna (mušľová) charakteristika*. Sú to čiary konštantnej účinnosti v súradniciach pomerných otáčok a pomerného prietoku, ktoré sa určujú na modeli v laboratóriu a prepočítavajú na dielo podľa zákonov podobnosti, obdobne ako afinitné zákony čerpadiel (odd. 13.14). Pri MVE s viacerými turbínami sa účinnosť pri malom prietoku zlepši tak, že niektoré turbíny sa odstavia a ostatné pracujú bližšie k optimálnemu bodu.

14.13 Kavitácia v turbínach a sacia výška

V pretlakovej turbíne je najnižší tlak na výstupe z obežného kolesa (obr. 14.5). Turbína býva umiestnená nad hladinou dolnej vody a savka za kolesom je plná vody. Tlak na výstupe z kolesa je preto nižší ako atmosférický, podobne ako v násoske (obr. 6.6). Savka navyše spomaľuje vodu z rýchlosti v_2 na v_3 a mení kinetickú energiu na tlak, čím tlak za kolesom ešte zníži. Z energetickej rovnice medzi výstupom z kolesa (2) a výstupom zo savky (3) dostaneme

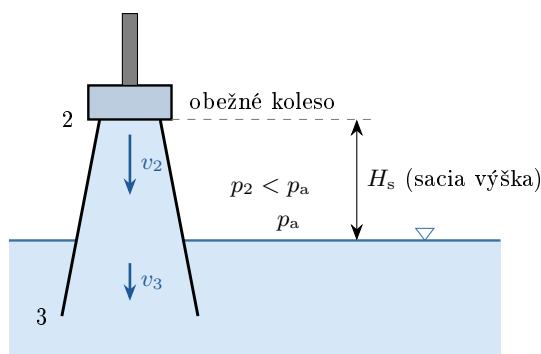
$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} - H_s - \frac{v_2^2 - v_3^2}{2g} + h_{z,s}, \quad (14.8)$$

kde H_s je výška výstupu z kolesa nad hladinou dolnej vody (sacia výška) a $h_{z,s}$ sú straty v savke. Ak tlak p_2 , alebo lokálne tlak na lopatkách, klesne na tlak sýtych pár, vzniká kavitácia s rovnakými následkami ako v čerpadlách (odd. 13.18). Kavitačná erózia lopatiek je jednou z hlavných príčin opráv turbín.

Nebezpečenstvo kavitácie vyjadruje *Thomov kavitačný súčiniteľ* zariadenia

$$\sigma = \frac{H_a - H_v - H_s}{H_n}, \quad (14.9)$$

kde $H_a = p_a/(\rho g)$ a $H_v = p_s/(\rho g)$ sú výšky zodpovedajúce atmosférickému tlaku a tlaku sýtych pár. Čitateľ je obdobou NPSH_A čerpadla. Turbína pracuje bez kavitácie, ak je σ zariadenia väčší ako kritická hodnota σ_{kr} pre danú turbínu, ktorú určuje výrobca. Rýchlobežné turbíny



Obr. 14.5. Savka pretlakovej turbíny. Obežné koleso je o saciu výšku H_s nad hladinou dolnej vody a tlak p_2 za kolesom je menší ako atmosférický.

(Kaplanove) majú σ_{kr} väčšie ako pomalobežné (Francisove) [19, 20]. Najväčšia prípustná sacia výška je

$$H_{s,max} = H_a - H_v - \sigma_{kr} H_n. \quad (14.10)$$

Pri veľkom spáde a veľkom σ_{kr} vychádza záporná. Turbína musí byť potom umiestnená *pod* hladinou dolnej vody.

Príklad 14.6 – Tlak za kolesom Kaplanovej turbíny

Obežné koleso Kaplanovej turbíny je 3 m nad hladinou dolnej vody. Rýchlosť vody za kolesom je 6 m/s, na výstupe zo savky 1,5 m/s, straty v savke 0,3 m. Atmosférický tlak je 101,3 kPa, voda má 15 °C ($p_s = 1,7$ kPa). Určte absolútny tlak za kolesom a Thomov súčiniteľ zariadenia pri $H_n = 8$ m.

Riešenie. Podľa (14.8) (v tlakovom tvare):

$$p_2 = 101\,300 - 1000 \cdot 9,81 \cdot 3 - 1000 \cdot \frac{6^2 - 1,5^2}{2} + 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,3 = 57,9 \text{ kPa}.$$

Za kolesom je podtlak 43 kPa. Thomov súčiniteľ:

$$\sigma = \frac{10,33 - 0,17 - 3}{8} = 0,89.$$

Ak výrobca udáva pre túto turbínu $\sigma_{kr} = 1,0$, je sacia výška príliš veľká. Podľa (14.10) je najväčšia sacia výška $10,33 - 0,17 - 8 = 2,16$ m. ■

14.14 Prúdenie s voľnou hladinou v náhonoch

Náhony, odpadové kanály a koryta tokov sú *otvorené korytá*, v ktorých má voda voľnú hladinu s atmosférickým tlakom. Hnacou silou prúdenia je tiaž. Pri *rovnomernom prúdení* je sklon dna, hladiny a čiary energie rovnaký a zložka tiaže v smere prúdenia sa práve vyrovnáva s trením. Strednú rýchlosť udáva *Manningov vzťah* [10, 35]

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}, \quad Q = A v, \quad R = \frac{A}{O}, \quad (14.11)$$

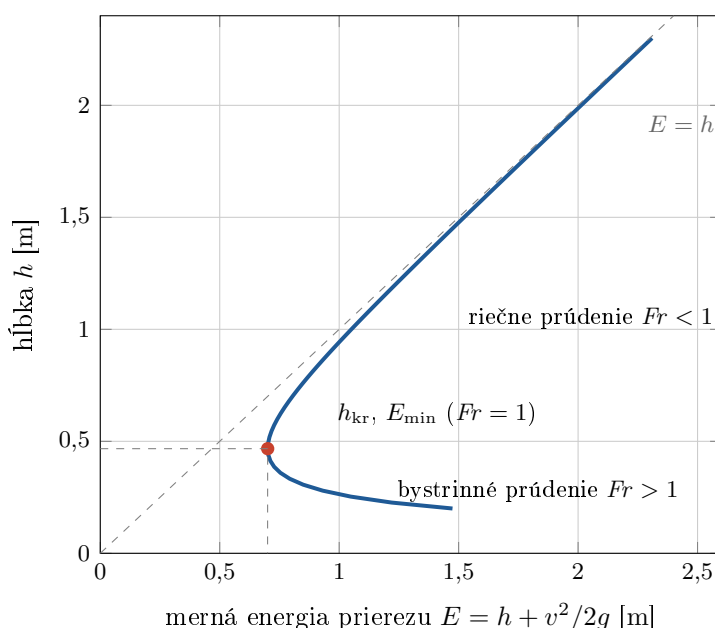
kde R je hydraulický polomer (štvrtina hydraulického priemeru, odd. 10.2), S sklon dna a n Manningov súčiniteľ drsnosti [$\text{s/m}^{1/3}$]. Orientačne je $n \approx 0,013$ až $0,015$ pre betón, $0,022$ až $0,030$ pre zemné kanály a $0,030$ až $0,050$ a viac pre prirodzené toky [35]. Manningov vzťah je empirický náhradný tvar Darcyho–Weisbachovej rovnice pre úplne drsné koryto.

Charakter prúdenia s voľnou hladinou určuje *Froudovo číslo* (odd. 8.13), pre obdĺžnikové koryto s hĺbkou h

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}. \quad (14.12)$$

Pri $Fr < 1$ je prúdenie *riečne* (pokojné). Rýchlosť je menšia ako rýchlosť šírenia povrchových vĺn $\sqrt{gh}$, a preto sa poruchy šíria aj proti prúdu, napríklad vzdutie od hate. Pri $Fr > 1$ je prúdenie *bystrinné*. Hranicu tvorí *kritická hĺbka*, pri ktorej je merná energia prierezu $E = h + v^2/2g$ pri danom mernom prietoku $q = Q/b$ najmenšia (obr. 14.6). Pre obdĺžnikové koryto [22]

$$h_{kr} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}, \quad E_{\min} = \frac{3}{2} h_{kr}. \quad (14.13)$$



Obr. 14.6. Merná energia prierezu v závislosti od hĺbky pri mernom prietoku $q = 1 \text{ m}^2/\text{s}$. Rovnakú energiu $E > E_{\min}$ majú dve hĺbky, riečna a bystrinná.

Pri prechode z bystrinného do riečného prúdenia vzniká *vodný skok*. Hladina náhle stúpne a v intenzívnom víre sa disipuje veľká časť energie. Z bilancie hybnosti (kap. 7) vyplýva vzťah medzi hĺbkami pred skokom a za ním pre obdĺžnikové koryto [22]

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1 \right). \quad (14.14)$$

Vodné skoky sa zámerne vytvárajú vo vývariskách pod haťami, kde tlmia energiu prepadajúcej vody a chránia dno pred vymieľaním.

Príklad 14.7 – Prietok náhonom

Betónový náhon obdĺžnikového prierezu má šírku 2 m, hĺbku vody 1 m, sklon dna 0,0005 a Manningov súčiniteľ $n = 0,015$. Určte rýchlosť a prietok pri rovnomernom prúdení, Froudovo číslo a stratu spádu na 1 km náhonu.

Riešenie. $A = 2 \text{ m}^2$, $O = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \text{ m}$, $R = 0,5 \text{ m}$. Podľa (14.11):

$$v = \frac{1}{0,015} \cdot 0,5^{2/3} \cdot 0,0005^{1/2} = 0,939 \text{ m/s}, \quad Q = 1,88 \text{ m}^3/\text{s}.$$

$Fr = 0,939/\sqrt{9,81 \cdot 1} = 0,30$, prúdenie je riečne. Pri rovnomernom prúdení je sklon čiary energie rovný sklonu dna. Na 1 km náhonu sa teda stratí 0,5 m spádu. Pri spáde MVE 6 m je to viac ako 8 %. ■

14.15 Prepady a meranie prietoku v tokoch

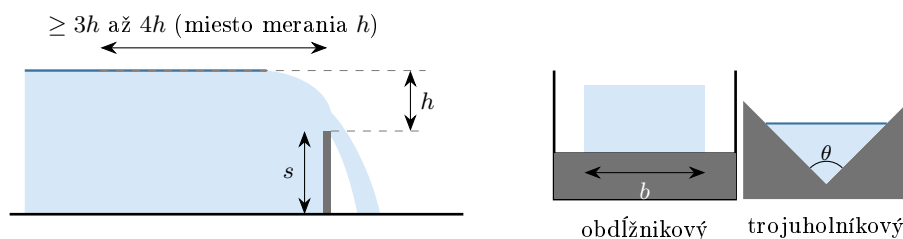
Na posúdenie lokality MVE treba poznať prietoky v toku. Na malých tokoch a v náhonoch sa na meranie prietoku používajú *meracie prepady* (obr. 14.7). Prietok cez prepád závisí len od prepadovej výšky h meranej dostatočne ďaleko pred prepadom. Pre ostrohranný obdĺžnikový prepád so šírkou b platí [22]

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{3/2}, \quad (14.15)$$

kde μ je prepadový súčiniteľ, pre ostrú hranu $\mu \approx 0,63$. Presnejšie vzťahy zahŕňajú prítokovú rýchlosť, bočné zúženie a vplyv hladiny dolnej vody pri nedokonalom prepade [22]. Pri malých prietokoch je citlivejší *trojuholníkový* (Thomsonov) prepád s vrcholovým uhlom θ :

$$Q = \frac{8}{15} \mu \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} h^{5/2}, \quad (14.16)$$

kde pre $\theta = 90^\circ$ je $\mu \approx 0,59$, teda $Q \approx 1,4 h^{5/2}$ (m^3/s , m). Rovnaké vzťahy platia aj pre kapacitu hatí a bezpečnostných prepádov [22, 23].



Obr. 14.7. Ostrohranný merací prepád (bočný pohľad) a tvary prepadových otvorov.

Na väčších tokoch sa prietok určuje metódou rýchlosť–plocha (odd. 4.7): rýchlosť sa meria hydrometrickou vrtuľou, elektromagnetickým alebo ultrazvukovým prístrojom, v súčasnosti často akustickým dopplerovským profilometrom [10, 14]. Pri návrhu MVE sa však nepoužívajú jednorazové merania, ale dlhodobé rady prietokov z vodomerných staníc, spracované do čiary prekročenia prietokov (odd. 14.17).

Príklad 14.8 – Merací prepád

Obdĺžnikový ostrohranný prepád so šírkou 1,5 m má prepadovú výšku 0,30 m. Určte prietok. Aký prietok by zodpovedal výške 0,20 m na trojuholníkovom prepade s uhlom 90° ?

Riešenie. Podľa (14.15): $Q = \frac{2}{3} \cdot 0,63 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{19,62} \cdot 0,3^{3/2} = 0,459 \text{ m}^3/\text{s}$. Pre trojuholníkový prepád $Q \approx 1,4 \cdot 0,2^{5/2} = 0,025 \text{ m}^3/\text{s} = 25 \text{ L/s}$. ■

14.16 Čerpadlová prevádzka a prečerpávacie elektrárne

Prečerpávací vodná elektráreň (PVE) má hornú a dolnú nádrž. Pri prebytku elektriny v sieti čerpá vodu do hornej nádrže, pri nedostatku ju spúšťa cez turbíny. Je to dnes najrozšírenejší

spôsob veľkokapacitného ukladania elektriny. So zvyšovaním podielu slnečných a veterných elektrární jej význam rastie. Na Slovensku je najväčšou PVE elektráreň Čierny Váh.

Energia uložená v hornej nádrži s užitočným objemom V pri strednom spáde H je

$$E = \rho g V H. \quad (14.17)$$

Pri čerpaní treba dodať viac, ako sa pri turbínovej prevádzke získa. Straty vznikajú v čerpadle, turbíne, motor-generátore, transformátore a privádzači v oboch smeroch. Celková účinnosť cyklu býva okolo 70 % až 80 % [16]. Moderné PVE používajú *reverzibilné čerpadlové turbíny*. Je to jeden stroj Francisovho typu, ktorý pri jednom smere otáčania pracuje ako turbína a pri opačnom ako čerpadlo. Jeho návrh je kompromisom, pretože optimálne tvary lopatiek čerpadla a turbíny sa líšia. Afinitné zákony a charakteristiky z kap. 13 platia pre čerpadlovú prevádzku bez zmeny.

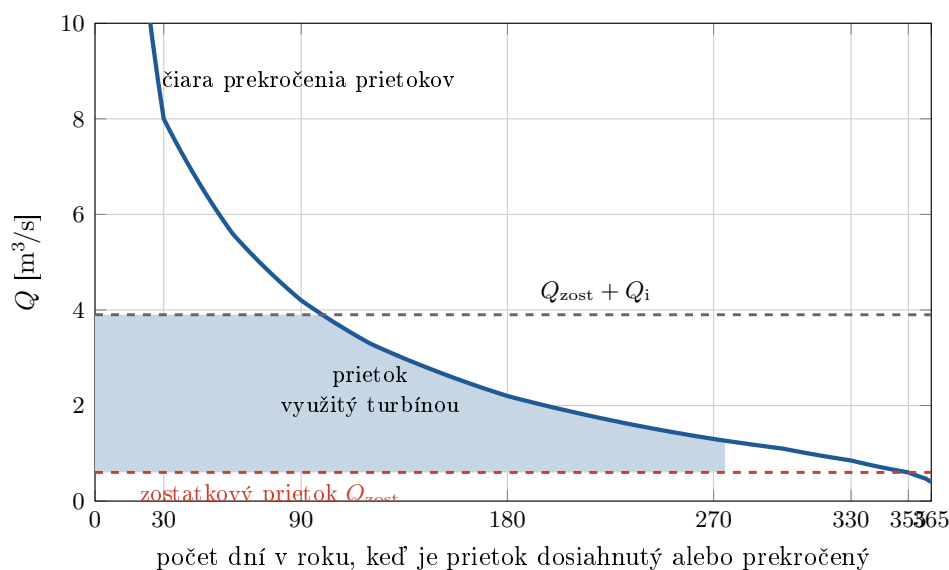
Príklad 14.9 – Energia prečerpávacej elektrárne

Horná nádrž PVE má užitočný objem $1 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ a stredný spád je 400 m. Určte uloženú energiu, elektrinu získanú pri účinnosti turbínovej prevádzky 0,9 a elektrinu potrebnú na prečerpanie pri účinnosti čerpadlovej prevádzky 0,88.

Riešenie. $E = 1000 \cdot 9,81 \cdot 10^6 \cdot 400 = 3,92 \cdot 10^{12} \text{ J} = 1090 \text{ MW} \cdot \text{h}$. Získaná elektrina $0,9 \cdot 1090 = 981 \text{ MW} \cdot \text{h}$, potrebná elektrina $1090/0,88 = 1239 \text{ MW} \cdot \text{h}$. Účinnosť cyklu je $981/1239 = 79\%$ (bez strát v privádzači a transformácii). ■

14.17 Čiara prekročenia prietokov a ročná výroba MVE

Prietok v toku sa mení v priebehu roka aj medzi rokmi. Pre energetický návrh MVE sa dlhodobý rad priemerných denných prietokov spracuje do *čiar prekročenia prietokov* (obr. 14.8). Pre každý prietok udáva, počas koľkých dní v roku je dosiahnutý alebo prekročený. V slovenskej hydrológii sa charakterizuje tzv. *M-dennými prietokmi* Q_{Md} , napríklad Q_{90d} je prietok dosiahnutý alebo prekročený priemerne 90 dní v roku [22].



Obr. 14.8. Čiara prekročenia prietokov (ilustračný tok s priemerným prietokom $3,6 \text{ m}^3/\text{s}$). Vyfarbená plocha je prietok využitý turbínou s inštalovaným prietokom $Q_i = 3,3 \text{ m}^3/\text{s}$ pri zostatkovom prietoku $0,6 \text{ m}^3/\text{s}$ a minimálnom prietoku turbíny $0,2 Q_i$.

Pri návrhu MVE sa z čiary prekročenia určujú:

- **zostatkový (sanitárny) prietok** Q_{zost} , ktorý musí vždy zostať v koryte toku pod odberom kvôli životu vo vode. Jeho hodnotu určuje povolenie orgánu štátnej vodnej správy, často sa odvodzuje od prietoku $Q_{355\text{d}}$ a pod.,
- **inštalovaný (návrhový) prietok turbín** Q_i . Väčší inštalovaný prietok znamená väčšiu ročnú výrobu, ale drahšie zariadenie a menej hodín využitia inštalovaného výkonu. V praxi sa často volí v rozsahu prietokov prekročených asi 90 až 180 dní v roku [19],
- **minimálny prietok turbíny**, pod ktorým sa turbína odstaví (obr. 14.4).

Prietok turbínou v danom dni je

$$Q_t = \min(Q - Q_{\text{zost}}, Q_i), \quad (14.18)$$

pokiaľ nie je menší ako minimálny prietok turbíny. Ročná výroba je súčtom denných výrob:

$$E = \sum_{\text{dni}} \eta_t(Q_t) \eta_g \rho g Q_t H_n(Q) \cdot 24 \text{ h}. \quad (14.19)$$

Výsledok sa často vyjadruje *dobou využitia inštalovaného výkonu* $T = E/P_i$. Pre MVE býva rádovo 3 000 h/r až 5 500 h/r.

Príklad 14.10 – Ročná výroba MVE

Pre tok z obr. 14.8 a MVE s čistým spádom 6 m, Kaplanovou turbínou s krivkou účinnosti podľa obr. 14.4, minimálnym prietokom turbíny $0,2 Q_i$, účinnosťou generátora 0,94 a zostatkovým prietokom $0,6 \text{ m}^3/\text{s}$ porovnajte ročnú výrobu pre rôzne inštalované prietoky.

Riešenie. Výpočet podľa (14.18) a (14.19) po dňoch (v tabuľkovom procesore alebo v Pythone) dáva:

Q_i [m^3/s]	P_i [kW]	dni prevádzky	E [MW · h/r]	T [h/r]
2,2	110	307	599	5 460
2,7	134	294	667	4 960
3,3	164	276	730	4 440
4,2	209	253	799	3 820
5,6	279	222	863	3 090

Zväčšenie inštalovaného prietoku z 2,2 na $5,6 \text{ m}^3/\text{s}$ (155 %) zvýši výrobu len o 44 %. Každý ďalší kubík inštalovaného prietoku je využitý menej dní v roku. Optimum určí ekonomické porovnanie ceny zariadenia a výnosov z predaja elektriny. Inštalovaný prietok $3,3 \text{ m}^3/\text{s}$ zodpovedá prietoku $Q_{120\text{d}}$. Teoretický potenciál pri priemernom prietoku je $1000 \cdot 9,81 \cdot 3,6 \cdot 6 \cdot 8760 = 1,86 \text{ GW} \cdot \text{h}$. Využije sa z neho asi 40 %. Tým je zodpovedaná úvodná otázka. ■

Aplikácia v OZE: vodná elektráreň a životné prostredie

MVE vyrába elektrinu bez emisií, zasahuje však do vodného toku. Hať prerušuje migráciu rýb a zmenšuje prirodzenú dynamiku toku. Odber vody znižuje prietok v obchádzanom úseku. Preto sa pri MVE budujú rybovody a obtokové koryta (biokoridory), dodržiava sa zostatkový prietok a používajú sa česle s malou svetlosťou a turbíny šetrné k rybám, napríklad Archimedova skrutka [19, 22]. Posúdenie vplyvu na životné prostredie je súčasťou povoľovania každej MVE.

Zhrnutie kapitoly

- Teoretický výkon toku je $\rho g Q H_b$. Čistý spád je hrubý spád zmenšený o straty v náhone, česliach, privádzači a odpade. Elektrický výkon je $P = \eta \rho g Q H_n$, pre odhad $P \approx 8 Q H_b$ [kW].
- Turbína odoberá vode moment hybnosti. Teoretický spád je $H_t = (u_1 v_{\theta 1} - u_2 v_{\theta 2})/g$. Voda má vystupovať bez víru.
- Rovnotlakové turbíny (Pelton, Bánki) premenia spád na kinetickú energiu v dýze. Pretlakové turbíny (Francis, Kaplan) majú koleso zaplavené a za ním savku.
- Typ turbíny určujú merné otáčky $n_s = n\sqrt{P}/H^{5/4}$ a oblasti použitia v diagrame spád–prietok. Peltonova a Kaplanova turbína majú plochú krivku účinnosti, Francisova a vrtuľová užšiu.
- V pretlakovej turbíne je za kolesom podtlak. Kavitáciu posudzuje Thomov súčiniteľ $\sigma = (H_a - H_v - H_s)/H_n$.
- V otvorených korytách platí Manningov vzťah. O charaktere prúdenia rozhoduje Froudovo číslo, hranicou je kritická hĺbka. Prietok sa meria prepadmi, $Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{3/2}$.
- Prečerpávacía elektráreň ukladá energiu $\rho g V H$ s účinnosťou cyklu asi 70 % až 80 %.
- Ročná výroba MVE sa určí z čiary prekročenia prietokov, inštalovaného a zostatkového prietoku a krivky účinnosti turbíny.

Kontrolné otázky

1. Čo je hydroenergetický potenciál toku? Prečo je využiteľný potenciál menší?
2. Aký je rozdiel medzi hrubým a čistým spádom? Ktoré straty ich rozdiel tvoria?
3. Ako súvisí Eulerova rovnica s výkonom turbíny? Prečo má voda z kolesa vystupovať bez víru?
4. Čím sa líšia rovnotlakové a pretlakové turbíny?
5. Prečo je optimálna obvodová rýchlosť Peltonovej turbíny asi polovicou rýchlosti prúdu?
6. Ako sa reguluje prietok Peltonovej, Francisovej a Kaplanovej turbíny? Ako to ovplyvňuje priebeh účinnosti?
7. Čo sú merné otáčky a na čo slúžia?
8. Aká je úloha savky? Prečo je za kolesom pretlakovej turbíny podtlak?
9. Definujte Thomov kavitačný súčiniteľ. Kedy musí byť turbína umiestnená pod hladinou dolnej vody?
10. Čo vyjadruje Froudovo číslo? Čím sa líši riečne a bystrinné prúdenie?
11. Ako sa meria prietok v malom toku?
12. Ako funguje prečerpávacía elektráreň a prečo je jej účinnosť menšia ako 100 %?
13. Čo je čiara prekročenia prietokov? Ako sa z nej určuje inštalovaný prietok a ročná výroba MVE?
14. Prečo sa pri zväčšovaní inštalovaného prietoku ročná výroba nezväčšuje úmerne?

Úlohy na precvičenie

1. Určte teoretický výkon a ročnú energiu úseku toku s priemerným prietokom $1,8 \text{ m}^3/\text{s}$ a spádom 25 m. [441 kW; 3,87 GW · h]
2. MVE má hrubý spád 15 m, prietok $2,5 \text{ m}^3/\text{s}$, straty 0,9 m, účinnosť turbíny 0,89, prevodovky 0,97 a generátora 0,94. Určte čistý spád, výkon a celkovú účinnosť vzhľadom na hrubý spád. [14,1 m; 281 kW; 0,763]
3. Obežné koleso Francisovej turbíny s priemerom 0,8 m sa otáča 600/min. Voda vstupuje s obvodovou zložkou 20 m/s a vystupuje bez víru. Určte teoretický spád a čistý spád pri hydraulickej účinnosti 0,93. [51,2 m; 55,1 m]
4. Peltonova turbína má čistý spád 200 m, prietok $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ a dve dýzy s $\varphi = 0,98$. Určte rýchlosť prúdu, priemer jedného prúdu a priemer kolesa pri 1500/min a $u = 0,47 v$. [61,4 m/s; 32 mm; 0,37 m]
5. Určte merné otáčky turbíny s výkonom 500 kW pri spáde 8 m a otáčkach 250/min. Aký typ turbíny zvolíte? [415; Kaplanova]
6. Kaplanova turbína má pri čistom spáde 6 m kritický Thomov súčiniteľ 1,2. Určte najväčšiu sáciu výšku pri atmosférickom tlaku 98 kPa a teplote vody 20 °C. [2,57 m]
7. Zemný náhon lichobežníkového prierezu (šírka dna 1,5 m, sklon svahov 1:1, hĺbka 0,8 m) má sklon 0,0004 a $n = 0,025$. Určte prietok. [0,92 m³/s]
8. Určte kritickú hĺbku a minimálnu mernú energiu v obdĺžnikovom koryte šírky 3 m pri prietoku $4,5 \text{ m}^3/\text{s}$ ($\alpha = 1$). [0,612 m; 0,918 m]
9. Pod haťou tečie voda s hĺbkou 0,3 m a merným prietokom $3 \text{ m}^2/\text{s}$. Určte Froudovo číslo a hĺbku za vodným skokom. [5,83; 2,33 m]
10. Obdĺžnikový ostrohranný prepád má šírku 0,8 m. Aká prepádová výška zodpovedá prietoku $0,15 \text{ m}^3/\text{s}$? [0,217 m]
11. Horná nádrž PVE s objemom $500\,000 \text{ m}^3$ je 250 m nad dolnou. Koľko elektriny dodá pri účinnosti 0,88? Ako dlho môže pracovať s výkonom 100 MW? [300 MW · h; 3,0 h]
12. V Pythone alebo v tabuľkovom procesore zopakujte výpočet pr. 14.10 pre Francisovu turbínu s minimálnym prietokom $0,4 Q_i$ a krivkou účinnosti podľa obr. 14.4. Porovnaj ročnú výrobu s Kaplanovou turbínou.

Kapitola 15

Prúdenie plynov a ventilátory

Výstup kapitoly

Po preštudovaní kapitoly študent určí hustotu plynu zo stavovej rovnice, prepočíta normálny a skutočný objemový prietok a vypočíta rýchlosť zvuku a Machovo číslo. Rozhodne, kedy možno plyn považovať za nestlačiteľný a kedy treba uvažovať kompresibilitu. Vypočíta tlakové straty vo vzduchovodoch kruhového aj obdĺžnikového prierezu, určí pracovný bod, príkon a mernú spotrebu ventilátora. Kvalitatívne vysvetlí prúdenie plynu dýzou a zahľtenie prúdu.

Kľúčové pojmy

ideálny plyn, merná plynová konštanta, normálny objemový prietok, hustota vzduchu, rýchlosť zvuku, Machovo číslo, nestlačiteľný model, celková a statická teplota, celkový, statický a dynamický tlak, vzduchovod, ekvivalentný priemer, ventilátor, charakteristika ventilátora, merný príkon ventilátora (SFP), izoentropické prúdenie, kritický tlakový pomer, zahľtenie dýzy, Lavalova dýza

Doteraz sme sa zaoberali najmä kvapalinami. V mnohých zariadeniach OZE však prúdia plyny. Vzduch prúdi vo vetracích jednotkách s rekuperáciou tepla, vo vzduchových solárnych kolektoroch, cez výparníky tepelných čerpadiel vzduch–voda a okolo listov veterných turbín. Spaliny prúdia v kotloch na biomasu a v komínoch, bioplyn v rozvodoch bioplynových staníc a para alebo organické pracovné látky v turbínach [8]. Plyny sa od kvapalín líšia najmä tým, že ich hustota sa výrazne mení s tlakom a teplotou.

Ukážeme, že vo väčšine uvedených aplikácií sa prúdenie plynu dá počítať rovnako ako prúdenie kvapaliny. Hustotu však treba určiť pre skutočný tlak a teplotu. Zistíme aj, kde táto zjednodušená predstava prestáva platiť. Výklad nadväzuje na [1, 5].

Na zamyslenie

Vetracia jednotka s rekuperáciou tepla v rodinnom dome má dva ventilátory, ktoré pracujú nepretržite. Ich elektrický príkon je spolu okolo 100 W. Za rok spotrebujú takmer 900 kW · h elektriny. To je porovnateľné s teplom, ktoré rekuperácia ušetrí počas prechodného obdobia. Od čoho závisí príkon ventilátorov? A čo sa stane, keď sa zanesú filtre?

15.1 Rozdiely medzi kvapalinou a plynom

Základné rozdiely sme zhrnuli v tab. 1.1. Pre výpočty prúdenia sú dôležité tieto:

- **Hustota plynu** je rádovo tisíckrát menšia ako hustota kvapaliny a závisí od tlaku aj teploty (rov. (2.4)). Pri ohreve vzduchu vo výmenníku alebo v kolektore sa jeho hustota zmenší a pri rovnakom hmotnostnom prietoku sa zväčší objemový prietok aj rýchlosť (odd. 5.5).
- **Hydrostatické rozdiely tlaku** sú v plynach malé. Pri výške 10 m je to v ovzduší len asi 120 Pa. V potrubí preto zvyčajne zanedbávame člen $\rho g z$. Výnimkou sú úlohy, kde rozdiel *hustôt* vytvára hnací tlak, napríklad ťah komína a prirodzené vetranie (rov. (3.6)).
- **Viskozita plynov** s teplotou rastie, kým viskozita kvapalín klesá (odd. 2.4). Kinematická viskozita vzduchu je asi pätnásťkrát väčšia ako kinematická viskozita vody.
- **Stlačiteľnosť**. Pri veľkých rýchlostiach alebo veľkých tlakových rozdieloch sa hustota plynu pozdĺž prúdu mení. Potom neplatí rovnica kontinuity v tvare $Av = \text{konšt.}$ ani Bernoulliho rovnica v tvare pre nestlačiteľnú tekutinu (odd. 15.6).

15.2 Stavová rovnica ideálneho plynu

Pri tlakoch a teplotách v zariadeniach OZE sa vzduch, spaliny, bioplyn aj ich zložky správajú ako *ideálny plyn* (rov. (2.4)):

$$p = \rho r T, \quad r = \frac{R}{M}, \quad (15.1)$$

kde p je absolútny tlak, T termodynamická teplota a $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$. Merná plynová konštanta je $287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ pre suchý vzduch, 518 pre metán a $189 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ pre oxid uhličitý. Pre zmes plynov sa molárna hmotnosť určí ako vážený priemer podľa objemových (molárnych) podielov zložiek, $M = \sum x_i M_i$.

Normálny a skutočný objemový prietok

Pretože objem plynu závisí od stavu, objemový prietok plynu má zmysel len s údajom o tlaku a teplote. V plynárenstve a pri bioplyne sa preto prietok udáva ako *normálny objemový prietok* [m^3/h] (označovaný aj $\text{m}^3_{\text{n}}/\text{h}$ alebo Nm^3/h), teda objem prepočítaný na normálne podmienky 0°C a $101,325 \text{ kPa}$. Vo vzduchotechnike a pri plynach sa objemový prietok zvyčajne označuje $\dot{V}$ (namiesto Q ako pri kvapalinách), aby sa nepletol s teplom. Hmotnostný prietok zostáva rovnaký, takže

$$\dot{V} = \dot{V}_{\text{n}} \frac{\rho_{\text{n}}}{\rho} = \dot{V}_{\text{n}} \frac{p_{\text{n}}}{p} \frac{T}{T_{\text{n}}}. \quad (15.2)$$

Príklad 15.1 – Prietok bioplynu

Bioplynová stanica vyrába $50 \text{ m}^3/\text{h}$ (normálnych) bioplynu so 60 % metánu a 40 % CO_2 (objemovo). V potrubí má bioplyn teplotu 35°C a pretlak 2 kPa . Určte mernú plynovú konštantu, hustotu v normálnom a v skutočnom stave, skutočný objemový a hmotnostný prietok.

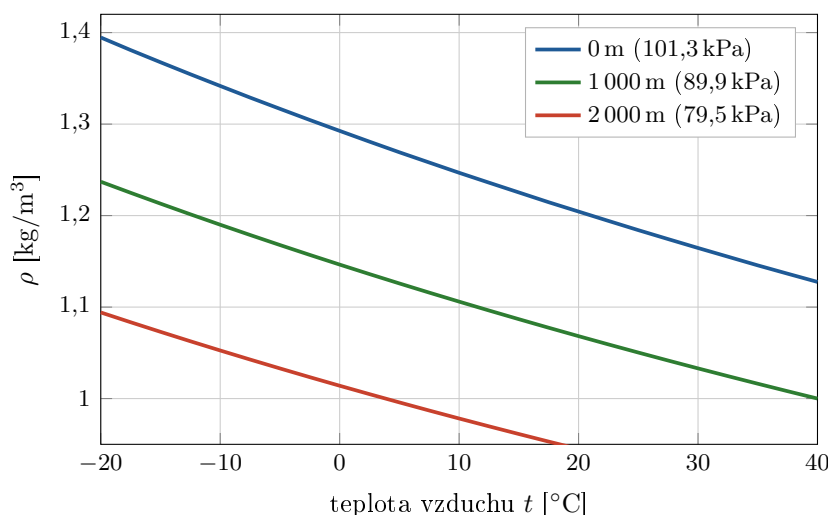
Riešenie. $M = 0,6 \cdot 16,04 + 0,4 \cdot 44,01 = 27,2 \text{ g/mol}$, $r = 8,314/0,0272 = 305 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

$$\rho_{\text{n}} = \frac{101\,325}{305 \cdot 273,15} = 1,215 \text{ kg/m}^3, \quad \rho = \frac{103\,325}{305 \cdot 308,15} = 1,098 \text{ kg/m}^3.$$

Skutočný objemový prietok je $50 \cdot 1,215/1,098 = 55,3 \text{ m}^3/\text{h}$, hmotnostný $50 \cdot 1,215 = 60,7 \text{ kg/h}$. Pri návrhu potrubia a meraní prietoku treba použiť skutočný stav. ■

15.3 Hustota vzduchu

Hustota vzduchu sa mení s teplotou, tlakom (nadmorskou výškou) a mierne aj s vlhkosťou (obr. 15.1). Pri atmosférickom tlaku je pri -10°C hustota $1,34\text{ kg/m}^3$, pri 30°C $1,16\text{ kg/m}^3$, teda o 15 % menej. Vodná para má menšiu molárnu hmotnosť ako suchý vzduch, preto je vlhký vzduch pri rovnakom tlaku a teplote o niečo *lahší* ako suchý. Rozdiel je však pri bežných teplotách najviac niekoľko percent. Závislosť tlaku a teploty od výšky opisuje štandardná atmosféra [26] (rov. (3.7)).



Obr. 15.1. Hustota suchého vzduchu v závislosti od teploty pri tlaku štandardnej atmosféry v nadmorskej výške 0, 1000 a 2000 m [26].

Aplikácia v OZE: hustota vzduchu a výroba veternej elektrárne

Výkon veternej turbíny je úmerný hustote vzduchu (rov. (1.9)). Pri rovnakej rýchlosti vetra vyrobí turbína v zime pri -10°C asi o 15 % viac ako v lete pri 30°C . Na horskej lokalite v nadmorskej výške 1000 m vyrobí približne o 11 % menej ako na pobreží. Výrobcovia preto udávajú výkonovú krivku turbíny pre štandardnú hustotu $1,225\text{ kg/m}^3$ a pri hodnotení lokality sa prepočítava na hustotu miestneho vzduchu [24, 25].

15.4 Rýchlosť zvuku

Malé tlakové poruchy sa v tekutine šíria rýchlosťou zvuku $a = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$. Pri zvukovej vlne prebiehajú zmeny tak rýchlo, že nestihne nastať výmena tepla. Dej je adiabatický a vratný, teda izoentropický. Pre ideálny plyn s izoentropickým exponentom $\kappa = c_p / c_v$ platí $p / \rho^\kappa = \text{konšt.}$, a teda

$$a = \sqrt{\kappa r T}. \quad (15.3)$$

Rýchlosť zvuku v ideálnom plyne závisí len od teploty, nie od tlaku. Pre vzduch ($\kappa = 1,4$) je pri 20°C $a = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 293} = 343\text{ m/s}$, pri -20°C 319 m/s a v horúcich spalínach pri 500°C 557 m/s . Pre porovnanie, vo vode je rýchlosť zvuku asi 1450 m/s (rov. (2.9)).

15.5 Machovo číslo

Pomer rýchlosti prúdenia a rýchlosti zvuku sa nazýva *Machovo číslo*:

$$Ma = \frac{v}{a}. \quad (15.4)$$

Je to podobnostné číslo, ktoré vyjadruje pomer zotrvačných síl a síl od stlačiteľnosti. Podľa jeho hodnoty rozlišujeme prúdenie [1]:

- **nestlačiteľné** ($Ma < 0,3$), pri ktorom sa hustota mení menej ako o 5 %,
- **podzvukové** ($Ma < 1$),
- **transsonické** ($Ma \approx 1$), pri ktorom sa v prúde vyskytujú podzvukové aj nadzvukové oblasti,
- **nadzvukové** ($Ma > 1$), pri ktorom vznikajú rázové vlny,
- **hypersonické** ($Ma > 5$).

V podzvukovom prúdení sa tlakové poruchy šíria aj proti prúdu. Prúd pred prekážkou sa tak „dozvie“ o jej prítomnosti a vopred ju obteká. V nadzvukovom prúdení to nie je možné a prúd sa pred prekážkou mení skokom v rázovej vlně.

15.6 Kritérium nestlačiteľného modelu

Kedy môžeme prúdenie plynu počítať ako nestlačiteľné? Zmena hustoty pozdĺž prúdu má dve príčiny:

1. **zmena rýchlosti**, pri ktorej sa kinetická energia mení na tlak a naopak. Pri zabrzdení prúdu z rýchlosti v na nulu vzrastie hustota izoentropicky na hodnotu ρ_0 podľa (15.14). Pre malé Ma platí

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \approx \frac{Ma^2}{2}. \quad (15.5)$$

Pri $Ma = 0,3$ sa hustota zmení asi o 4,4 % (obr. 15.2). Odtiaľ pochádza bežné kritérium $Ma < 0,3$,

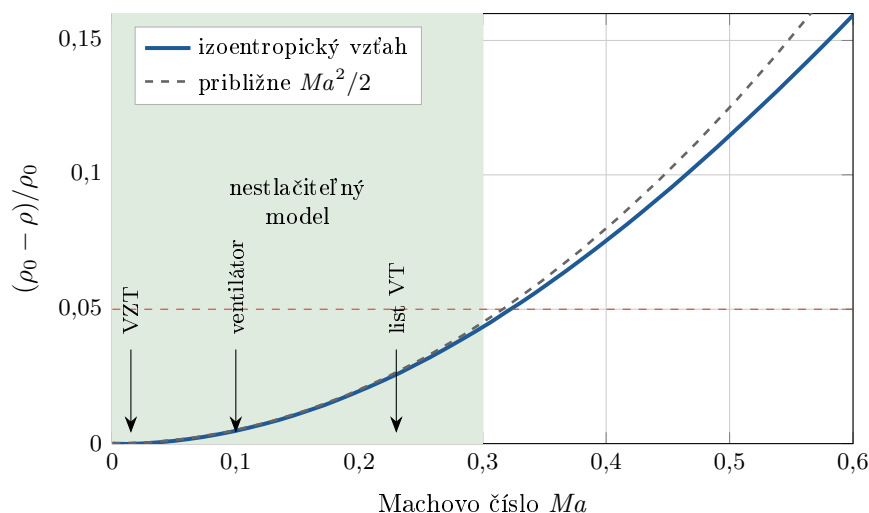
2. **tlaková strata** v dlhom potrubí. Ak je strata malá v porovnaní s absolútnym tlakom, $\Delta p/p \lesssim 5\%$, možno plyn počítať ako nestlačiteľný so strednou hustotou. V opačnom prípade, napríklad pri diaľkových plynovodoch a rozvodoch stlačeného vzduchu, sa potrubie rozdelí na kratšie úseky alebo sa použijú vzťahy pre stlačiteľné prúdenie.

Vo vzduchotechnike (rýchlosti do 10 m/s, tlakové rozdiely rádovo stovky pascalov) je $Ma < 0,03$ a $\Delta p/p < 1\%$. Prúdenie je nestlačiteľné s veľkou rezervou. Aj konce listov veterných turbín s rýchlosťou okolo 80 m/s majú $Ma \approx 0,23$. Stlačiteľnosť treba uvažovať v parných a plynových turbínach, kompresoroch, v expandéroch ORC [8], pri výtoku plynu alebo pary z poistných ventilov a v rozvodoch stlačeného vzduchu.

15.7 Energetická rovnica pre prúdenie plynu

Pre ustálené prúdenie plynu kontrolným objemom platí prvý zákon termodynamiky v tvare (rov. (6.2))

$$q - w = \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right), \quad (15.6)$$



Obr. 15.2. Pomerná zmena hustoty pri zabrzdení prúdu vzduchu v závislosti od Machovho čísla. Vyznačené sú typické hodnoty vo vzduchotechnike (VZT), na koncoch lopatiek ventilátora a na koncoch listov veternej turbíny (VT).

kde $h = u + p/\rho$ je merná entalpia, pre ideálny plyn $h = c_p T$. V plynch je člen gz obvykle zanedbateľný. Ak plyn prúdi bez výmeny tepla a práce, zachováva sa *celková (stagnačná) entalpia* $h_0 = h + v^2/2$ a *celková teplota*

$$T_0 = T + \frac{v^2}{2c_p}. \quad (15.7)$$

Je to teplota, ktorú by plyn dosiahol pri adiabatickom zabrzdení na nulovú rýchlosť. Pre vzduch pri 100 m/s je rozdiel $T_0 - T = 100^2/(2 \cdot 1005) = 5,0$ K. Pri 10 m/s je to len 0,05 K, takže vo vzduchotechnike je statická a celková teplota prakticky rovnaká.

Pri malých Machových číslach sa rovnica (15.6) pre mechanickú energiu redukuje na známu rozšírenú energetickú rovnicu v tlakovom tvare (rov. (6.17)). Vo vzduchotechnike sa používa *celkový tlak* $p_c = p + \rho v^2/2$, ktorý je súčtom statického a dynamického tlaku (odd. 6.8). Bilancia medzi dvoma prierezmi je

$$p_{c1} + \Delta p_{c,v} = p_{c2} + \Delta p_z, \quad (15.8)$$

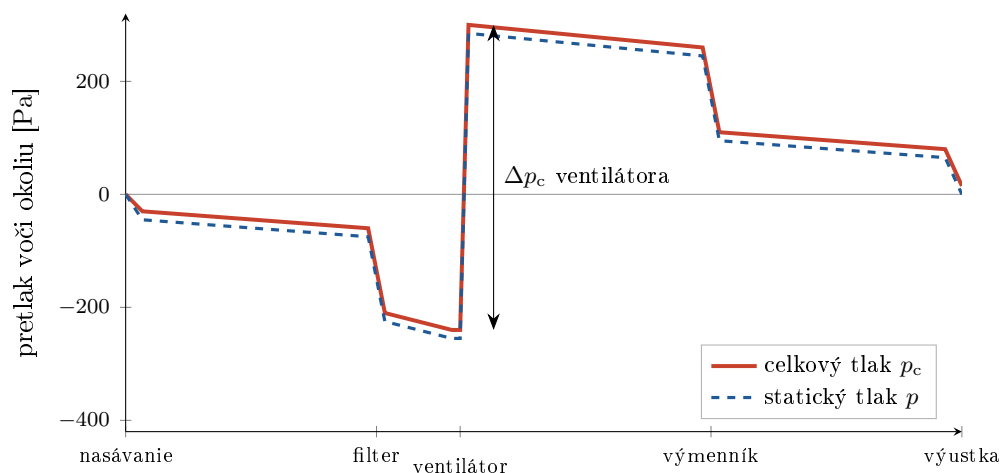
kde $\Delta p_{c,v}$ je prírastok celkového tlaku vo ventilátore a Δp_z sú straty. Pri výškových rozdieloch s rôznou teplotou vzduchu vnútri a vonku k tomu pristupuje vztlakový člen $(\rho_e - \rho_i) g H$ (rov. (3.6)). Tlaky vo vzduchotechnike sa spravidla udávajú ako pretlak alebo podtlak voči okolitému vzduchu (obr. 15.3).

15.8 Tlakové straty vo vzduchovodoch

Straty vo vzduchovodoch počítame rovnako ako v potrubí pre kvapaliny, pomocou Darcyho-Weisbachovej rovnice (rov. (10.5)) a súčiniteľov miestnych odporov (kap. 11):

$$\Delta p_z = \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right) \frac{\rho v^2}{2}. \quad (15.9)$$

Vzduchovody sa vyrábajú najčastejšie z pozinkovaného plechu s ekvivalentnou drsnosťou okolo 0,15 mm (tab. 10.2). Ohybné hadice majú drsnosť a straty podstatne väčšie. Rýchlosti sú rádovo 2 m/s až 8 m/s (tab. 10.4). Horná hranica je daná hlukom a stratami. Dynamický tlak pri 5 m/s



Obr. 15.3. Priebeh celkového a statického tlaku v prívodnej vetve vetracieho systému (schéma). Pred ventilátorom je podtlak, za ním pretlak. Rozdiel celkového a statického tlaku je dynamický tlak.

je len 15 Pa. Straty sú preto malé a merajú sa v pascaloch, typicky okolo 1 Pa/m. Významnú časť celkovej straty vetracieho systému tvoria zariadenia: filtre, rekuperačné výmenníky, ohrievače, tlmiče hluku a výustky. Ich stratu udávajú výrobcovia.

Príklad 15.2 – Strata kruhového vzduchovodu

Kruhovým vzduchovodom s priemerom 250 mm a dĺžkou 20 m prúdi vzduch s teplotou 20 °C ($\rho = 1,204 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1,52 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$) rýchlosťou 5 m/s. Drsnosť je 0,15 mm. Určte prietok a tlakovú stratu trením. Posúďte stlačiteľnosť.

Riešenie. $\dot{V} = 5 \cdot \pi \cdot 0,25^2 / 4 = 0,245 \text{ m}^3/\text{s} = 884 \text{ m}^3/\text{h}$. $Re = 5 \cdot 0,25 / 1,52 \cdot 10^{-5} = 82\,400$, $k/D = 6 \cdot 10^{-4}$. Z Colebrookovej rovnice $\lambda = 0,0212$:

$$\Delta p_z = 0,0212 \cdot \frac{20}{0,25} \cdot \frac{1,204 \cdot 5^2}{2} = 25,6 \text{ Pa}.$$

Merná strata je 1,28 Pa/m. Pomer $\Delta p/p = 25,6 / 101\,325 = 2,5 \cdot 10^{-4}$ a $Ma = 5/343 = 0,015$. Prúdenie je nestlačiteľné. ■

15.9 Nekruhové kanály vo vzduchotechnike

Vo vzduchotechnike sa pre malú stavebnú výšku často používajú obdĺžnikové vzduchovody. Straty v nich určujeme s hydraulickým priemerom $D_h = 2ab/(a+b)$ (odd. 10.2). V Darcyho–Weisbachovej rovnici treba použiť *skutočnú* strednú rýchlosť v obdĺžnikovom priereze $v = \dot{V}/(ab)$. Kruhové potrubie s priemerom D_h by pri rovnakej rýchlosti malo menší prietok, pretože jeho plocha je menšia ako ab .

V projekčnej praxi sa preto používa aj *ekvivalentný priemer*. Je to priemer kruhového potrubia, ktoré má pri rovnakom prietoku rovnakú mernú stratu ako obdĺžnikové:

$$D_e = 1,30 \frac{(ab)^{0,625}}{(a+b)^{0,25}}. \quad (15.10)$$

Umožňuje použiť diagramy a tabuľky pre kruhové potrubie priamo s prietokom obdĺžnikového kanála. Obdĺžnikové kanály s pomerom strán väčším ako asi 1:4 majú zbytočne veľký obvod, a teda vyššie straty, spotrebu materiálu a tepelné straty. Preto sa im projektanti vyhýbajú.

Príklad 15.3 – Obdĺžnikový vzduchovod

Obdĺžnikovým vzduchovodom $400 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$ prúdi $2\,000 \text{ m}^3/\text{h}$ vzduchu s teplotou 20°C (drsnosť $0,15 \text{ mm}$). Určte mernú stratu s hydraulickým priemerom a s ekvivalentným priemerom.

Riešenie. $v = (2000/3600)/(0,4 \cdot 0,25) = 5,56 \text{ m/s}$, $D_h = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,25/0,65 = 0,308 \text{ m}$, $Re = 112\,800$, $\lambda = 0,0200$:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{0,0200}{0,308} \cdot \frac{1,204 \cdot 5,56^2}{2} = 1,21 \text{ Pa/m}.$$

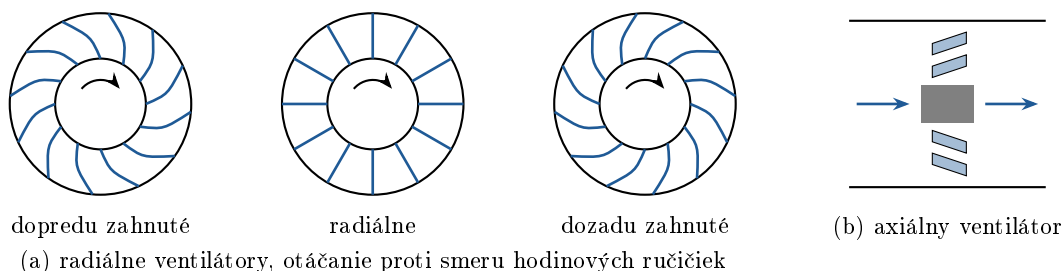
Ekvivalentný priemer podľa (15.10) je $D_e = 0,343 \text{ m}$. Kruhovú potrubie s týmto priemerom má pri prietoku $2\,000 \text{ m}^3/\text{h}$ rýchlosť $6,00 \text{ m/s}$ a mernú stratu $1,22 \text{ Pa/m}$. Oba postupy dávajú prakticky rovnaký výsledok. ■

15.10 Ventilátory

Ventilátor je lopatkový stroj, ktorý zvyšuje celkový tlak plynu, spravidla o menej ako asi 10 kPa (pomer tlakov do asi 1,1). Pri takom malom zvýšení tlaku je hustota plynu vo ventilátore prakticky stála a ventilátor sa počíta rovnako ako čerpadlo. Pri väčších pomeroch tlakov hovoríme o dúchadlách a kompresoroch, pri ktorých treba uvažovať stlačiteľnosť. Podľa smeru prúdenia v obežnom kolese rozlišujeme (obr. 15.4):

- **radiálne ventilátory** so špirálovou skriňou. Dosahujú väčšie tlaky. Kolesá s lopatkami *zahnutými dozadu* majú najvyššiu účinnosť (až okolo 80 %) a príkon s rastúcim prietokom neprekračuje maximum. Kolesá s lopatkami *zahnutými dopredu* (bubnové) sú pri rovnakom výkone menšie a tichšie, majú však nižšiu účinnosť. Používajú sa v menších vetracích jednotkách,
- **axiálne ventilátory** pre veľké prietoky a malé tlaky, napríklad vo výparníkoch tepelných čerpadel vzduch–voda, v chladiacich vežiach a pri vetraní tunelov,
- **diagonálne a priečnoprúdové ventilátory** pre špeciálne použitie (klimatizačné jednotky, konvektory).

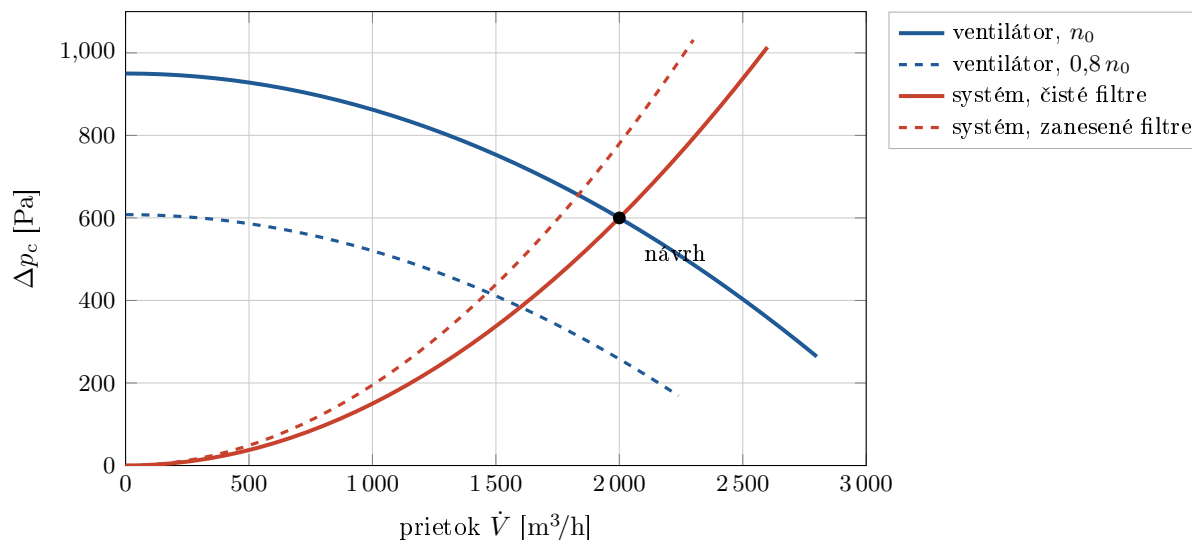
Princíp prenosu energie opisuje rovnako ako pri čerpadlách Eulerova rovnica (odd. 13.3) v tlakovom tvare $\Delta p_{c,t} = \rho u_2 v_{\theta 2}$. Moderné ventilátory vetracích jednotiek majú elektronicky komutované motory s plynulou reguláciou otáčok (EC ventilátory).



Obr. 15.4. (a) Obežné kolesá radiálnych ventilátorov s lopatkami zahnutými dopredu, radiálnymi a zahnutými dozadu. (b) Axiálny ventilátor.

15.11 Charakteristika ventilátora a systému

Charakteristika ventilátora je závislosť celkového tlakového rozdielu Δp_c od objemového prietoku $\dot{V}$. Charakteristika vetracieho systému je parabola $\Delta p = R \dot{V}^2$ (odd. 12.5). Statická zložka tu spravidla chýba, až na vztlačový účinok pri výškových rozdieloch. Pracovný bod je priesečník oboch kriviek (obr. 15.5).



Obr. 15.5. Charakteristika ventilátora a vetracieho systému. Zanesením filtrov sa zväčší odpor systému a pri stálych otáčkach klesne prietok.

Pre ventilátory platia afinitné zákony ako pre čerpadlá (rov. (13.14)). Navyše treba uvažovať zmenu hustoty plynu, pretože ventilátor dodáva stálu *dopravnú výšku* (energiu na jednotku hmotnosti), a nie stály tlak:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^3. \quad (15.11)$$

Ventilátor nasávajúci studený vonkajší vzduch pri -20°C vytvorí pri rovnakých otáčkach o 16 % väčší tlakový rozdiel a má o 16 % väčší príkon ako pri 20°C . Pri ventilátoroch spalín kotlov na biomasu je to naopak, horúce spaliny majú malú hustotu.

Pozor – častá chyba

Axiálne ventilátory majú pri malých prietokoch (vysokom odpore systému) oblasť nestabilnej prevádzky, v ktorej sa prúd od lopatiek odtrháva (angl. *stall*). Ventilátor vtedy hlučí, vibruje a prietok kolíše. Pracovný bod musí ležať mimo tejto oblasti, aj keď sa filtre zanesú.

15.12 Výkon a účinnosť ventilátora

Užitočný výkon ventilátora a jeho príkon sú

$$P_u = \dot{V} \Delta p_c, \quad P = \frac{P_u}{\eta}, \quad (15.12)$$

kde η je celková účinnosť ventilátora s motorom. Energetickú náročnosť vetrania vyjadruje *merný príkon ventilátora* (angl. *specific fan power*, SFP)

$$\text{SFP} = \frac{P_{\text{el}}}{\dot{V}} = \frac{\Delta p_c}{\eta} \quad [\text{W}/(\text{m}^3/\text{s})]. \quad (15.13)$$

SFP má rozmer tlaku ($\text{W}/(\text{m}^3/\text{s}) = \text{Pa}$) a rovná sa celkovému tlakovému rozdielu delenému účinnosťou. Znížiť sa dá dvoma spôsobmi: menšími tlakovými stratami systému (väčšie prierezy, filtre s väčšou plochou, výmenníky s malou stratou) a účinnejším ventilátorom.

Príklad 15.4 – Príkon ventilátora vetracej jednotky

Ventilátor vetracej jednotky dopravuje $2000 \text{ m}^3/\text{h}$ pri celkovom tlakovom rozdieli 600 Pa . Celková účinnosť je $0,6$. Určte príkon, SFP a ročnú spotrebu pri nepretržitej prevádzke. Ako sa zmení príkon, ak zanesené filtre zväčšia odpor systému o 30% ?

Riešenie. $P_u = 0,556 \cdot 600 = 333 \text{ W}$, $P = 333/0,6 = 556 \text{ W}$, $\text{SFP} = 600/0,6 = 1000 \text{ W}/(\text{m}^3/\text{s})$. Ročná spotreba je $0,556 \cdot 8760 = 4870 \text{ kW} \cdot \text{h}$.

So zanesenými filterami je charakteristika systému $\Delta p = 1,95 \cdot 10^{-4} \dot{V}^2$ (Pa , m^3/h). Pri charakteristike ventilátora z obr. 15.5 klesne pri stálych otáčkach prietok na $1834 \text{ m}^3/\text{h}$ a tlakový rozdiel vzrastie na 656 Pa . Vetrание je nedostatočné. Ak regulácia zvýši otáčky na pôvodný prietok, vzrastie príkon o 30% . Pravidelná výmena filtrov je preto aj energetickým opatrením. ■

Pri prevádzke s premenlivým prietokom, napríklad pri vetraní riadenom koncentráciou CO_2 , sa uplatní tretia mocnina z afinitných zákonov. Pri polovičnom prietoku klesne príkon ventilátora v systéme bez statickej zložky približne na osminu. Rovnako ako pri čerpadlách (odd. 13.17) je regulácia otáčkami omnoho úspornejšia ako škrtenie klapkou.

15.13 Základy stlačiteľného prúdenia

Pri väčších Machových číslach sa zmena hustoty musí zahrnúť do výpočtu. Pre ustálené adiabatické prúdenie ideálneho plynu bez trenia (izoentropické prúdenie) platí zachovanie celkovej entalpie (15.7) a izoentropický vzťah $p/\rho^\kappa = \text{konšt.}$ Stav plynu v ľubovoľnom mieste sa dá vyjadriť pomocou *celkových (stagnačných)* hodnôt T_0 , p_0 , ρ_0 a Machovho čísla [1]:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2, \quad \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (15.14)$$

Rozvinutím vzťahu pre tlak do radu pre malé Ma dostaneme

$$p_0 - p = \frac{\rho v^2}{2} \left(1 + \frac{Ma^2}{4} + \dots\right). \quad (15.15)$$

Prvý člen je dynamický tlak z Bernoulliho rovnice. Oprava na stlačiteľnosť je pri $Ma = 0,3$ len $2,3\%$. Preto možno aj rýchlosť vzduchu meranú Prandtlou trubicou (rov. (6.7)) vyhodnocovať podľa vzťahu pre nestlačiteľnú tekutinu až do rýchlostí okolo 100 m/s .

15.14 Prúdenie dýzou – kvalitatívne vysvetlenie

Pre nestlačiteľnú tekutinu platí $Av = \text{konšt.}$ Zúženie prierezu vždy zrýchľuje prúd. Pre plyn vyplýva z rovnice kontinuity $\rho Av = \text{konšt.}$ a z bilancie hybnosti vzťah medzi zmenou prierezu

a zmenou rýchlosti [1]:

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1) \frac{dv}{v}. \quad (15.16)$$

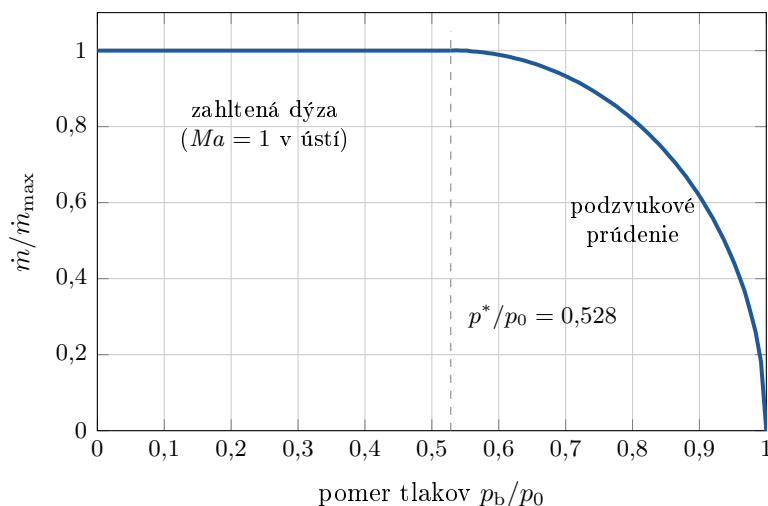
Z neho plynie prekvapivý záver:

- pri podzvukovom prúdení ($Ma < 1$) sa prúd v zužujúcom sa kanáli zrýchľuje a v rozširujúcom spomaľuje, rovnako ako kvapalina,
- pri nadzvukovom prúdení ($Ma > 1$) je to naopak. Hustota tu klesá rýchlejšie, ako rastie rýchlosť, a na ďalšie zrýchlenie treba prierez *zväčšovať*,
- rýchlosť zvuku ($Ma = 1$) možno dosiahnuť len v najužšom mieste kanála.

Prúd plynu zo zásobníka s tlakom p_0 sa v zužujúcej sa dýze preto nemôže zrýchliť nad rýchlosť zvuku. Keď sa tlak za dýzou (protitlak) p_b znižuje, prietok najprv rastie. Keď klesne pod *kritický tlak*

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \stackrel{\kappa=1,4}{=} 0,528, \quad (15.17)$$

dosiahne prúd v ústí dýzy rýchlosť zvuku. Ďalšie znižovanie tlaku za dýzou už prietok nezväčší (obr. 15.6). Hovoríme, že dýza je *zahltená*. Na dosiahnutie nadzvukovej rýchlosti treba za najužší prierez pripojiť rozširujúcu sa časť. Takú dýzu nazývame *Lavalova dýza*.



Obr. 15.6. Hmotnostný prietok vzduchu zužujúcou sa dýzou v závislosti od pomeru tlaku za dýzou a celkového tlaku pred ňou.

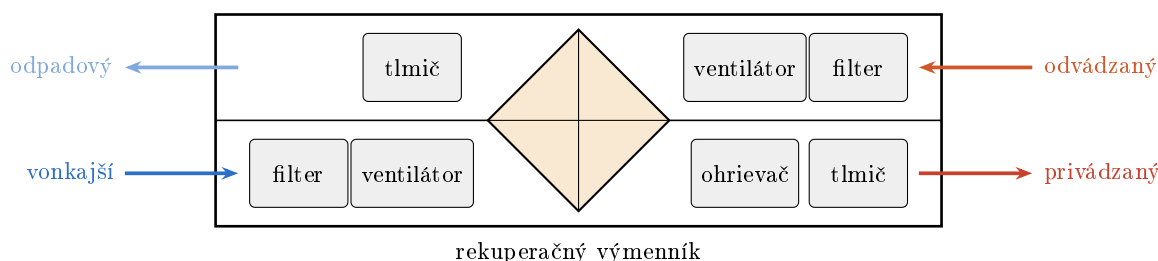
Zahltené prúdenie má praktický význam. Prietok cez poistný ventil plynového alebo parného zásobníka pri veľkom pretlaku nezávisí od tlaku za ventilom, ale len od stavu pred ním a od plochy otvoru. Rovnako sa dimenzujú clony na meranie prietoku plynu pri veľkých tlakových rozdieloch a dýzy parných turbín. Lavalove dýzy sa používajú v parných turbínach a v niektorých expandéroch ORC, ktoré premieňajú teplo geotermálnych zdrojov a spalín na elektrinu [8].

15.15 Aplikácie vo vzduchotechnike a energetike

Vetrание s rekuperáciou tepla

Vetracia jednotka s rekuperáciou (obr. 15.7) prenáša teplo z odvádzaného vzduchu do privádzaného. Na prekonanie strát filtrov, výmenníka a rozvodov potrebuje dva ventilátory.

Energetický prínos rekuperácie je rozdiel medzi ušetreným teplom a elektrinou spotrebovanou ventilátormi. Ušetrené teplo je úmerné rozdielu vnútornej a vonkajšej teploty, elektrina ventilátorov nie. V prechodnom období preto môže byť prínos malý. Nízke SFP je rovnako dôležité ako vysoká účinnosť rekuperácie. Motivačná jednotka so spotrebou $900 \text{ kW} \cdot \text{h}$ ročne by pri dvojnásobnom priereze rozvodov a filtroch s väčšou plochou mohla mať spotrebu pod polovicou.



Obr. 15.7. Vetracia jednotka s rekuperáciou tepla (schéma). Každá vetva má vlastný ventilátor, ktorý prekonáva straty filtra, výmenníka a rozvodov.

Vzduchové solárne kolektory a tepelné čerpadlá

Vo vzduchových solárnych kolektoroch sa vzduch ohrieva v plochých kanáloch. Pre dobrý prestup tepla potrebuje turbulentné prúdenie (odd. 9.8) a pre malú spotrebu ventilátora malé straty. Pri ohreve rastie objemový prietok a rýchlosť. Rovnaký kompromis platí pre výparníky tepelných čerpadiel vzduch–voda, kde axiálny ventilátor preháňa veľké množstvo vzduchu cez lamelový výmenník. Hluk ventilátora je tu často rozhodujúcim obmedzením.

Komíny a prirodzený ťah

Ťah komína vytvára rozdiel hustôt studeného vonkajšieho vzduchu a teplých spalín (pr. 3.1). Tento hnací tlak musí pokryť straty v kotle, dymovode a komíne a dynamický tlak na výstupe. Pri kotloch na biomasu s nízkou teplotou spalín alebo pri kondenzačných kotloch je prirodzený ťah malý a používa sa ventilátor spalín. Rovnaký princíp využíva prirodzené vetranie budov a solárne komíny.

Veterná energetika

Pri obtekaní listov veternej turbíny je prúdenie nestlačiteľné (obr. 15.2), rozhodujúca je však hustota vzduchu (odd. 15.3). Za turbínou vzniká úplav so spomaleným a turbulentným prúdením (kap. 9). Úplavy ovplyvňujú ďalšie turbíny v parku. Na ich modelovanie a optimalizáciu rozmiestnenia turbín sa používajú inžinierske modely úplavu, napríklad v nástroji FLORIS [27]. Pri riadení sústavy sa výroba veterných elektrární predpovedá štatistickými a fyzikálnymi modelmi vychádzajúcimi z predpovedí počasia [9].

Zhrnutie kapitoly

- Plyny majú malú hustotu, ktorá závisí od tlaku a teploty podľa stavovej rovnice $p = \rho r T$. Objemový prietok plynu treba udávať so stavom. V praxi sa používa normálny objemový prietok.

- Hustota vzduchu klesá s teplotou a nadmorskou výškou, čo ovplyvňuje výrobu veterných elektrární aj príkon ventilátorov.
- Rýchlosť zvuku v ideálnom plyne je $a = \sqrt{\kappa r T}$. Machovo číslo $Ma = v/a$ rozhoduje o stlačiteľnosti.
- Pri $Ma < 0,3$ a malých tlakových stratách ($\Delta p/p$ do 5 %) možno plyn počítať ako nestlačiteľný. Týka sa to vzduchotechniky, ventilátorov aj obtekania veterných turbín.
- Straty vo vzduchovodoch sa počítajú Darcyho–Weisbachovou rovnicou, pre obdĺžnikové kanály s hydraulickým alebo ekvivalentným priemerom.
- Ventilátory sa počítajú ako čerpadlá. V afinitných zákonoch treba zohľadniť hustotu plynu. Energetickú náročnosť vetrania vyjadruje $SFP = \Delta p_c / \eta$.
- Pri stlačiteľnom prúdení sa prúd v zužujúcej sa dýze nezrýchli nad rýchlosť zvuku. Pod kritickým tlakovým pomerom 0,528 je dýza zahľtená a prietok nezávisí od tlaku za ňou.

Kontrolné otázky

1. V čom sa líši výpočet prúdenia plynu od prúdenia kvapaliny?
2. Prečo sa prietok bioplynu udáva v normálnych kubických metroch?
3. Ako závisí hustota vzduchu od teploty a nadmorskej výšky? Aký to má vplyv na výrobu veternej turbíny?
4. Prečo rýchlosť zvuku v ideálnom plyne nezávisí od tlaku?
5. Čo vyjadruje Machovo číslo? Aké druhy prúdenia podľa neho rozlišujeme?
6. Kedy možno prúdenie plynu považovať za nestlačiteľné? Uveďte obe kritériá.
7. Čo je celková teplota a celkový tlak? Kedy je medzi celkovou a statickou teplotou významný rozdiel?
8. Čím sa líši hydraulický a ekvivalentný priemer obdĺžnikového vzduchovodu?
9. Aké druhy ventilátorov poznáte a kde sa používajú?
10. Prečo sa v afinitných zákonoch ventilátorov objavuje hustota?
11. Čo je SFP a ako ho možno znížiť?
12. Prečo sa prúd plynu v zužujúcej sa dýze nemôže zrýchliť nad rýchlosť zvuku? Čo je zahľtená dýza?
13. Od čoho závisí energetický prínos vetrania s rekuperáciou tepla?

Úlohy na precvičenie

1. Určte hustotu vzduchu pri teplote -15°C a tlaku 95 kPa a pri 35°C a 101 kPa. [1,282; 1,142 kg/m³]
2. Bioplyn so 55 % metánu a 45 % CO₂ má normálny prietok 120 m³/h. Určte mernú plynovú konštantu, normálnu hustotu a hmotnostný prietok. [290 J/(kg · K); 1,28 kg/m³; 153 kg/h]

3. Aká je rýchlosť zvuku vo vzduchu pri 0°C a v spalínach s $\kappa = 1,33$ a $r = 290 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ pri 200°C ? [331; 427 m/s]
4. Koniec listu veternej turbíny s priemerom 120 m sa pohybuje pri 12/min. Určte Machovo číslo pri 15°C a odhadnite zmenu hustoty. [0,22; 2,4 %]
5. Aká je celková teplota vzduchu so statickou teplotou 20°C pri rýchlosti 250 m/s? Aký je Ma ? [51,1 $^{\circ}\text{C}$; 0,73]
6. Kruhový vzduchovod s priemerom 315 mm a dĺžkou 35 m vedie $1\,500 \text{ m}^3/\text{h}$ vzduchu s teplotou 20°C (drsnosť 0,15 mm). Určte rýchlosť a stratu trením. [5,35 m/s; 38 Pa]
7. Určte hydraulický a ekvivalentný priemer vzduchovodu $600 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$. [0,400; 0,457 m]
8. Ventilátor dodáva $3\,600 \text{ m}^3/\text{h}$ pri 450 Pa s účinnosťou 0,55. Určte príkon a SFP. Aký bude príkon pri $2\,400 \text{ m}^3/\text{h}$ pri regulácii otáčkami (systém bez statickej zložky)? [818 W; 818 W/(m^3/s); 242 W]
9. Ventilátor spalín dodáva pri 20°C tlakový rozdiel 800 Pa. Aký tlakový rozdiel dodá pri rovnakých otáčkach pre spaliny s teplotou 180°C (vlastnosti vzduchu)? [518 Pa]
10. Zo zásobníka stlačeného vzduchu s pretlakom 6 bar uniká vzduch netesnosťou do atmosféry (1 bar). Je prúdenie zahľtené? Pri akom najväčšom pretlaku v zásobníku by ešte zahľtené nebolo? [áno, $p_b/p_0 = 0,14$; 0,89 bar]
11. Ťah komína výšky 8 m pri teplote spalín 120°C a vonkajšej teplote 10°C . Spaliny uvažujte ako vzduch pri tlaku 101,3 kPa. [27,4 Pa]

Dodatok A

Zoznam symbolov

Zoznam obsahuje symboly, ktoré sa v učebnici vyskytujú vo viacerých kapitolách. Niektoré písmená majú podľa zaužívanej praxe viac významov; konkrétny význam vždy vyplýva z textu kapitoly. Symboly použité len v jednom odvodení sú vysvetlené priamo pri ňom.

Latinské písmená

Symbol	Význam	Jednotka
A	plocha prierezu	m^2
A_r	plocha rotora veternej turbíny	m^2
a	rýchlosť zvuku; faktor axiálnej indukcie (vietor)	m/s ; –
a, b	strany obdĺžnikového prierezu	m
b	šírka (prepadu, kanála, obežného kolesa)	m
C_d	prietokový súčiniteľ (dýza, clona, otvor)	–
c_P	súčiniteľ výkonu veternej turbíny	–
c_T	súčiniteľ ťahu veternej turbíny	–
c_p, c_v	merná tepelná kapacita pri stálom tlaku a objeme	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
D	priemer (potrubia, obežného kolesa, rotora)	m
D_h	hydraulický priemer	m
D_e	ekvivalentný priemer obdĺžnikového kanála	m
E	energia (ročná výroba, spotreba)	$\text{J}, \text{kW} \cdot \text{h}$
e	merná energia (na jednotku hmotnosti)	J/kg
e_z	merná stratová energia	J/kg
F	sila	N
g	tiažové zrýchlenie	m/s^2
H	výška, dopravná výška čerpadla	m
H_{ξ}	dopravná výška čerpadla v energetickej rovnici	m
H_b, H_n	hrubý a čistý spád vodnej elektrárne	m
H_s	sacia výška čerpadla, výška osi turbíny nad dolnou vodou	m
H_{st}	statická zložka charakteristiky systému	m
H_t	teoretická (Eulerova) dopravná výška alebo spád	m
h	hlĺbka, výška stĺpca kvapaliny; merná entalpia	m ; J/kg
h_z	stratová výška	m
h_{kr}	kritická hlĺbka v otvorenom koryte	m

Symbol	Význam	Jednotka
I	intenzita turbulencie	–
I_C, I_x	kvadratický moment plochy	m^4
K	modul objemovej pružnosti	Pa
K_v	prietokový súčiniteľ armatúry (K_{vs} pri plnom otvorení)	m^3/h
k	ekvivalentná (absolútna) drsnosť steny	m
k/D	pomerná drsnosť	–
L	dĺžka	m
L_e	ekvivalentná dĺžka miestneho odporu	m
l	zmiešavacia dĺžka	m
M	krútiaci moment; molárna hmotnosť	$\text{N} \cdot \text{m}$; kg/mol
m	hmotnosť	kg
$\dot{m}$	hmotnostný prietok	kg/s
n	otáčky; Manningov súčiniteľ drsnosti	$1/\text{min}$; $\text{s}/\text{m}^{1/3}$
n_q	špecifické otáčky čerpadla ($n\sqrt{Q}/H^{3/4}$)	–
n_s	špecifické otáčky turbíny ($n\sqrt{P}/H_n^{5/4}$)	–
NPSH	čistá kladná sacia výška (A dostupná, R potrebná)	m
O	omočený obvod	m
P	výkon, príkon	W
P_h	hydraulický (užitočný) výkon	W
p	tlak (absolútny, ak nie je uvedené inak)	Pa
p_a	atmosférický tlak	Pa
p_e	pretlak	Pa
p_v	podtlak	Pa
p_s	tlak nasýtených pár	Pa
p_c	celkový tlak ($p + \rho v^2/2$)	Pa
p_0	tlak v zabrzdennom prúde (stagnačný), tlak v zásobníku	Pa
Δp_z	tlaková strata	Pa
Q	objemový prietok kvapaliny	m^3/s
$\dot{Q}_t$	tepelný tok	W
R	hydraulický odpor ($h_z = RQ^2$); polomer; hydraulický polomer v koryte	s^2/m^5 ; m
r	merná plynová konštanta; polomer	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$; m
S	sklon dna koryta	–
T	termodynamická teplota; ťah rotora	K; N
T_0	celková (stagnačná) teplota	K
t	teplota v stupňoch Celzia; čas	$^{\circ}\text{C}$; s
u	obvodová (unášavá) rýchlosť; merná vnútorná energia	m/s ; J/kg
u'	fluktuácia rýchlosti	m/s
u_*	trecia (dynamická) rýchlosť	m/s
u^+, y^+	bezrozmerná rýchlosť a vzdialenosť od steny	–
V	objem	m^3
$\dot{V}$	objemový prietok plynu ($\dot{V}_n$ normálny)	m^3/s
v	rýchlosť (stredná prierezová), absolútna rýchlosť v turbostroji	m/s
v_θ	obvodová zložka absolútnej rýchlosti	m/s
$\mathbf{v}$	vektor rýchlosti	m/s

Symbol	Význam	Jednotka
w	relatívna rýchlosť v obežnom kolese	m/s
w_{Σ}, w_t	merná práca čerpadla a turbíny	J/kg
x, y, z	karteziánske súradnice	m
z	geodetická výška	m

Grécke písmená

Symbol	Význam	Jednotka
α	Coriolisov súčiniteľ; uhol; exponent profilu vetra	–; °; –
β	Boussinesgov súčiniteľ; súčiniteľ objemovej rozťažnosti; uhol lopatky	–; 1/K; °
Δ	rozdiel, zmena	–
δ	hrúbka medznej vrstvy	m
ε	výkon disipovaný na jednotku hmotnosti	W/kg
η	účinnosť; Kolmogorovova dĺžková mierka	–; m
θ	uhol (zmáčací, uhol ohybu, polárna súradnica)	°
κ	izoentropický exponent (c_p/c_v); Kármánova konštanta	–
λ	Darcyho súčiniteľ trenia	–
μ	dynamická viskozita; výtokový súčiniteľ prepadu	Pa · s; –
ν	kinematická viskozita	m ² /s
ρ	hustota	kg/m ³
σ	povrchové napätie; Thomov kavitačný súčiniteľ	N/m; –
τ	šmykové napätie (τ_w na stene)	Pa
φ	rýchlostný súčiniteľ dýzy; uhol	–; °
Ω	vírivosť	1/s
ω	uhlová rýchlosť	rad/s
ζ	súčiniteľ miestneho odporu	–

Bezrozmerné čísla

Symbol	Význam	Definícia
Re	Reynoldsovo číslo	vD/ν
Ma	Machovo číslo	v/a
Fr	Froudovo číslo	$v/\sqrt{gh}$

Najčastejšie indexy

Index	Význam
1, 2	vstupný a výstupný prierez, začiatok a koniec úseku
a	atmosférický

Index	Význam
b	hrubý (spád); protitlak za dýzou
c	celkový (tlak)
č	čerpadlo
e	pretlak; ekvivalentný
g	generátor
h	hydraulický
kr	kritický
n	čistý (spád); normálne podmienky (plyny)
S, V	sacie a výtlačné hrdlo čerpadla
s	tlak nasýtených pár; sanie
t	turbína; teoretický
w	stena
z	strata
0	zabrzdený (stagnačný) stav, pokojový stav
*	kritický stav v najužšom priereze dýzy

Dodatok B

Fyzikálne vlastnosti tekutín

Tabuľka B.1. Vlastnosti vody na medzi sýtosti (okrem blízkosti kritického bodu prakticky nezávislé od tlaku). Spracované podľa [1, tab. A-3].

t °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/(kg · K)	μ mPa · s	ν mm ² /s	p_s kPa
0	999,8	4,217	1,792	1,792	0,611
10	999,7	4,194	1,307	1,307	1,228
20	998,0	4,182	1,002	1,004	2,339
30	996,0	4,178	0,798	0,801	4,246
40	992,1	4,179	0,653	0,658	7,384
50	988,1	4,181	0,547	0,554	12,35
60	983,3	4,185	0,467	0,475	19,94
70	977,5	4,190	0,404	0,413	31,19
80	971,8	4,197	0,355	0,365	47,39
90	965,3	4,206	0,315	0,326	70,14

Tabuľka B.2. Vlastnosti suchého vzduchu pri tlaku 101,325 kPa. Spracované podľa [1, tab. A-4].

t °C	ρ kg/m ³	μ 10 ⁻⁵ Pa · s	ν 10 ⁻⁵ m ² /s
-20	1,394	1,630	1,17
0	1,292	1,729	1,34
20	1,204	1,825	1,52
40	1,127	1,918	1,70
60	1,059	2,008	1,90

Poznámka

Zmesi voda–etylénglykol majú pri rovnakej koncentrácii menšiu viskozitu a nižší bod tuhnutia ako zmesi s propylénglykolom (odd. 2.12). Ich vlastnosti uvádzajú technické listy výrobcov a tabuľky [41]. Pri návrhu treba vždy použiť údaje konkrétneho produktu, pretože inhibítory korózie vlastnosti mierne menia.

Tabuľka B.3. Vlastnosti zmesí voda–propylénglykol (inhibovaný propylénglykol) pre rôzne objemové koncentrácie; typické hodnoty výrobcu [30]. Údaje pre konkrétny produkt treba prevziať z jeho technického listu.

t °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/(kg · K)	μ mPa · s	ν mm ² /s
<i>30 % obj.</i>				
−10	1033,7	3,821	4,507	4,360
40	1019,6	3,903	1,629	1,598
65	1004,3	3,972	0,914	0,911
90	985,8	4,041	0,604	0,613
<i>40 % obj.</i>				
−20	1053,2	3,569	48,9	46,4
10	1042,1	3,668	7,217	6,925
40	1026,5	3,768	2,239	2,181
65	1009,9	3,850	1,176	1,165
90	990,1	3,933	0,746	0,754
<i>50 % obj.</i>				
−30	1064,8	3,339	172,8	162,3
−20	1061,7	3,378	73,0	68,8
10	1049,2	3,493	10,6	10,1
40	1032,2	3,609	3,110	3,013
65	1014,4	3,706	1,548	1,526
90	993,4	3,802	0,934	0,940

Literatúra

- [1] Yunus A. Çengel and John M. Cimbala. *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. McGraw-Hill, 2006. ISBN 0-07-247236-7.
- [2] Frank M. White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Education, 8 edition, 2016. ISBN 978-0-07-339827-3.
- [3] Philip M. Gerhart, Andrew L. Gerhart, and John I. Hochstein. *Munson, Young and Okishi's Fundamentals of Fluid Mechanics*. Wiley, 8 edition, 2016.
- [4] Michal Varchola and Branislav Knížat. *Mechanika tekutín*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2010. ISBN 978-80-227-3269-7.
- [5] Mária Čarnogurská, Miroslav Příhoda, and Tomáš Brestovič. *Aplikovaná mechanika tekutín*. Strojnícka fakulta, Technická univerzita v Košiciach, 2021. ISBN 978-80-553-3950-4.
- [6] John A. Duffie and William A. Beckman. *Solar Engineering of Thermal Processes*. Wiley, 4 edition, 2013.
- [7] Federico Bava and Simon Furbo. A numerical model for pressure drop and flow distribution in a solar collector with u-connected absorber pipes. *Solar Energy*, 134:264–272, 2016. doi: 10.1016/j.solener.2016.05.012.
- [8] Andrea De Pascale, editor. *Organic Rankine Cycle for Energy Recovery System*. MDPI, 2020. ISBN 978-3-03936-395-7. Tlačená verzia špeciálneho čísla časopisu Energies.
- [9] Xiaochen Wang, Peng Guo, and Xiaobin Huang. A review of wind power forecasting models. *Energy Procedia*, 12:770–778, 2011. doi: 10.1016/j.egypro.2011.10.103.
- [10] Radomil Květon and Martin Orfánus. *Hydroinformatika. 1. časť*. Edícia skript. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2015. ISBN 978-80-227-4468-3.
- [11] Peter Frolkovič. Prúdenie kvapalín a plynov. Prednáška, Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Stavebná fakulta STU v Bratislave, 2014.
- [12] Dendy Adanta, Budiarso, Warjito, and Ahmad Indra Siswantara. Assessment of turbulence modelling for numerical simulations into pico hydro turbine. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, 46(1):21–31, 2018. ISSN 2289-7879.
- [13] Audrius Židonis, David S. Benzon, and George A. Aggidis. Development of hydro impulse turbines and new opportunities. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 51:1624–1635, 2015. doi: 10.1016/j.rser.2015.07.007.
- [14] Richard J. Goldstein, editor. *Fluid Mechanics Measurements*. Taylor & Francis, 2 edition, 1996.

- [15] Johann Friedrich Gülich. *Centrifugal Pumps*. Springer, 3 edition, 2014. doi: 10.1007/978-3-642-40114-5.
- [16] John Twidell and Tony Weir. *Renewable Energy Resources*. Taylor & Francis, 2 edition, 2006. ISBN 0-419-25330-0.
- [17] Volker Quaschnig. *Understanding Renewable Energy Systems*. Routledge, 2 edition, 2016.
- [18] Martin Kaltschmitt, Wolfgang Streicher, and Andreas Wiese, editors. *Renewable Energy: Technology, Economics and Environment*. Springer, 2007.
- [19] European Small Hydropower Association. *Guide on How to Develop a Small Hydropower Plant*. ESHA, 2004.
- [20] S. L. Dixon and C. A. Hall. *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery*. Butterworth-Heinemann, 7 edition, 2014.
- [21] Saurabh Sangal, Arpit Garg, and Dinesh Kumar. Review of optimal selection of turbines for hydroelectric projects. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, 3(3):424–430, 2013. ISSN 2250-2459.
- [22] Peter Šulek. *Hate*. Edícia skript. Slovenská technická univerzita v Bratislave, Vydavateľstvo SPEKTRUM STU, 2023. ISBN 978-80-227-5381-4.
- [23] Peter Šulek. *HATE: Návodý na cvičenia*. Edícia skript. Slovenská technická univerzita v Bratislave, SPEKTRUM STU, 2025. ISBN 978-80-227-5506-1.
- [24] J. F. Manwell, J. G. McGowan, and A. L. Rogers. *Wind Energy Explained: Theory, Design and Application*. Wiley, 2 edition, 2009. doi: 10.1002/9781119994367.
- [25] Tony Burton, Nick Jenkins, David Sharpe, and Ervin Bossanyi. *Wind Energy Handbook*. Wiley, 2 edition, 2011.
- [26] NOAA, NASA, and U.S. Air Force. U.S. Standard Atmosphere, 1976, 1976.
- [27] Christopher Bay, Jennifer King, Paul Fleming, Luis Martínez-Tossas, Rafael Mudafort, Eric Simley, and Mike Lawson. FLORIS: A brief tutorial. 5th Wind Energy Systems Engineering Workshop, Pamplona. National Renewable Energy Laboratory, NREL/PR-5000-75661, 2019.
- [28] Hyunjun Oh, Saqib Javed, and Xiaofei Pu. Geothermal heat pump system showcase: Short-term validation of borehole heat exchanger performance from field data to numerical modeling. In *51st Workshop on Geothermal Reservoir Engineering*, number NLR/CP-5700-99014. National Laboratory of the Rockies, 2026. Preprint.
- [29] Svend Frederiksen and Sven Werner. *District Heating and Cooling*. Studentlitteratur, 2013.
- [30] The Dow Chemical Company. *Technical Data Sheet: DOWFROST Heat Transfer Fluid*. The Dow Chemical Company, 2019. URL <https://www.solventsandpetroleum.com/uploads/6/0/3/7/60372849/dowfrost.pdf>.
- [31] W. Wagner and A. Pruß. The iapws formulation 1995 for the thermodynamic properties of ordinary water substance for general and scientific use. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 31(2):387–535, 2002. doi: 10.1063/1.1461829.
- [32] Branislav Knížat. *800 riešených príkladov z mechaniky tekutín. 3. diel*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2021. ISBN 978-80-227-5097-4.

-
- [33] Vladimír Greif. Prúdenie plynov a kvapalín – aero- a hydrodynamika. Učebný text k predmetu Fyzika pre geológov, Katedra inžinierskej geológie, 2012.
- [34] M. Lorusso, T. Capurso, M. Torresi, B. Fortunato, F. Fornarelli, S. M. Camporeale, and R. Monteriso. Efficient CFD evaluation of the NPSH for centrifugal pumps. *Energy Procedia*, 126:778–785, 2017.
- [35] Ven Te Chow. *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, 1959.
- [36] Béatrice Zoppé, Christian Pellone, Thierry Maître, and Pierre Leroy. Flow analysis inside a Pelton turbine bucket. *Journal of Turbomachinery*, 128:500–511, 2006. doi: 10.1115/1.2184350.
- [37] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen, and David R. Dowling. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 6 edition, 2016.
- [38] Hendrik Tennekes and John L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. MIT Press, 1972. ISBN 978-0-262-20019-6.
- [39] Stephen B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000. ISBN 978-0-521-59886-6.
- [40] Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174:935–982, 1883. doi: 10.1098/rstl.1883.0029.
- [41] VDI e. V. *VDI Heat Atlas*. Springer, 2 edition, 2010. doi: 10.1007/978-3-540-77877-6.
- [42] *IEC 61400-1:2019. Wind energy generation systems – Part 1: Design requirements*. International Electrotechnical Commission, 4 edition, 2019.
- [43] Hermann Schlichting and Klaus Gersten. *Boundary-Layer Theory*. Springer, 9 edition, 2017. ISBN 978-3-662-52917-1.
- [44] Johann Nikuradse. Strömungsgesetze in rauhen rohren, 1933.
- [45] C. F. Colebrook. Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 11(4):133–156, 1939. doi: 10.1680/ijoti.1939.13150.
- [46] Lewis F. Moody. Friction factors for pipe flow. *Transactions of the ASME*, 66:671–684, 1944.
- [47] S. E. Haaland. Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. *Journal of Fluids Engineering*, 105(1):89–90, 1983. doi: 10.1115/1.3240948.
- [48] Prabhata K. Swamee and Akalank K. Jain. Explicit equations for pipe-flow problems. *Journal of the Hydraulics Division*, 102(5):657–664, 1976. doi: 10.1061/JYCEAJ.0004542.
- [49] Arturo S. Leon and Ling Zhu. A dimensional analysis for determining optimal discharge and penstock diameter in impulse and reaction water turbines. *Renewable Energy*, 71: 609–615, 2014.
- [50] I. E. Idelchik. *Handbook of Hydraulic Resistance*. Begell House, 4 edition, 2008.