

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH
Fakulta baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií

Aerodynamika veterných zariadení

Vysokoškolská učebnica

Dušan Kudelas

Košice 2026

Názov:	Aerodynamika veterných zariadení
Podnázov:	Vysokoškolská učebnica
Autori:	Dušan Kudelas
Recenzenti:	...
Vydavateľ:	Technická univerzita v Košiciach
Rok vydania:	2026
Vydanie:	prvé
ISBN:	...

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

Predhovor

Učebnica je určená študentom inžinierskeho študijného programu *Obnoviteľné zdroje energie a udržateľná energetika* na Fakulte baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií Technickej univerzity v Košiciach ako základný študijný text k predmetu *Aerodynamika veterných zariadení*. Obsah je rozdelený do dvanástich kapitol, ktoré zodpovedajú dvanástim týždňom semestra.

Predpokladá sa, že čitateľ absolvoval základný kurz mechaniky tekutín, matematickej analýzy a fyziky. Potrebné poznatky z mechaniky tekutín sú preto v kap. 3 iba zopakované v rozsahu, ktorý sa v ďalšom texte využíva.

Každá kapitola obsahuje výklad, riešené príklady, zhrnutie, kontrolné otázky a úlohy na samostatné riešenie s výsledkami. Zdroje sú citované číslom v hranatých zátvorkách, napr. [1]; úplný zoznam literatúry je uvedený na konci knihy.

Autori

Obsah

Predhovor	iii
Zoznam hlavných symbolov	xv
1 Úvod do veternej energetiky a veterných zariadení	1
1.1 Predmet aerodynamiky veterných zariadení	1
1.2 Stručný historický prehľad	2
1.2.1 Veterné mlyny	2
1.2.2 Prvé veterné elektrárne	2
1.2.3 Veľké experimentálne turbíny v polovici 20. storočia	3
1.2.4 Od ropnej krízy po súčasnosť	3
1.3 Rozdelenie veterných zariadení	4
1.3.1 Podľa polohy osi rotácie	4
1.3.2 Podľa aerodynamického princípu	4
1.3.3 Ďalšie hľadiská rozdelenia	7
1.4 Hlavné časti veternej turbíny	7
1.5 Energia a výkon vetra	8
1.5.1 Výkon prúdu vzduchu	8
1.5.2 Hustota vzduchu	10
1.6 Bezrozmerné charakteristiky rotora	12
1.6.1 Súčinitele výkonu, ťahu a krútiaceho momentu	12
1.6.2 Rýchlobežnosť	12
1.6.3 Výkonová krivka turbíny	13
1.7 Prehľad metód aerodynamického výpočtu	14
Zhrnutie	15
Kontrolné otázky	15
Úlohy	16

2	Vietor ako zdroj energie	19
2.1	Vznik vetra	19
2.1.1	Globálna cirkulácia	19
2.1.2	Geostrofický vietor	20
2.1.3	Miestne vplyvy	21
2.2	Časová premenlivosť vetra	21
2.3	Atmosférická medzná vrstva	23
2.3.1	Štruktúra medznej vrstvy	23
2.3.2	Stabilita atmosféry	23
2.3.3	Logaritmický rýchlostný profil	24
2.3.4	Mocninový zákon	25
2.3.5	Strih vetra v ploche rotora	26
2.4	Turbulencia	27
2.4.1	Intenzita turbulencie	27
2.4.2	Model normálnej turbulencie podľa IEC 61400-1	27
2.5	Štatistické rozdelenie rýchlosti vetra	28
2.5.1	Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia	28
2.5.2	Weibullovo rozdelenie	29
2.5.3	Rayleighovo rozdelenie	29
2.5.4	Vplyv tvaru rozdelenia na výkonovú hustotu	30
2.5.5	Určenie parametrov Weibullovo rozdelenia	31
2.6	Ročná výroba energie	32
2.7	Triedy veterných turbín podľa IEC 61400-1	34
2.8	Meranie vetra	34
	Zhrnutie	35
	Kontrolné otázky	36
	Úlohy	36
3	Základy aerodynamiky	39
3.1	Vlastnosti vzduchu	40
3.2	Opis prúdenia	40
3.3	Rovnica kontinuity	41
3.4	Veta o zmene hybnosti	41
3.5	Bernoulliho rovnica	43

3.6	Viskozita a podobnosť prúdenia	44
3.6.1	Navierove–Stokesove rovnice	44
3.6.2	Reynoldsovo a Machovo číslo	44
3.7	Medzná vrstva	45
3.7.1	Pojem medznej vrstvy	45
3.7.2	Laminárna a turbulentná medzná vrstva	45
3.7.3	Odtrhnutie prúdu	47
3.8	Odpor telies	47
3.8.1	Zložky odporu	47
3.8.2	Tlakový, trecí a kombinovaný odpor	48
3.8.3	Súčiniteľ odporu a jeho závislosť od Reynoldsovho čísla	50
3.8.4	Obtekanie valca a Kármánova vírová cesta	51
3.9	Vírivosť, cirkulácia a víry	51
3.9.1	Pohyb tekutinovej častice	51
3.9.2	Vírivosť	53
3.9.3	Cirkulácia	54
3.9.4	Vírové vlákno a Biotov–Savartov zákon	55
3.9.5	Jadro víru a Rankinov vír	56
3.9.6	Kuttova–Žukovského veta	57
3.10	Skladanie potenciálových prúdení	58
3.10.1	Obtekanie valca	58
3.10.2	Magnusov jav	61
3.11	Aerodynamické sily a ich súčinitele	61
3.12	Krídlo konečného rozpätia	62
3.12.1	Vírová sústava krídla	63
3.12.2	Indukovaná rýchlosť a indukovaný odpor	63
	Zhrnutie	65
	Kontrolné otázky	65
	Úlohy	66
4	Aerodynamické profily	69
4.1	Geometria profilu	69
4.2	Profily NACA	70
4.2.1	Štvorciferné profily	70

4.2.2	Profily série 6	71
4.3	Rozloženie tlaku a aerodynamické sily	72
4.3.1	Vznik vztaku	72
4.3.2	Normálová a tangenciálna sila	73
4.4	Teória tenkého profilu	74
4.4.1	Rozloženie zataženia po tetive	75
4.4.2	Vplyv tvaru strednej čiary	76
4.4.3	Profil s klapkou	78
4.5	Panelové metódy	78
4.6	Charakteristiky skutočného profilu	79
4.6.1	Priebeh súčiniteľov v závislosti od uhla nábehu	79
4.6.2	Polára a aerodynamická jemnosť	80
4.7	Vplyv Reynoldsovo čísla, drsnosti a hrúbky	81
4.7.1	Reynoldsovo číslo	81
4.7.2	Laminárne bubliny a druhy stallu	81
4.7.3	Drsnosť nábežnej hrany	82
4.7.4	Hrúbka profilu	82
4.8	Profily pre veterné turbíny	83
	Zhrnutie	83
	Kontrolné otázky	84
	Úlohy	85
5	Hybnostná teória akčného disku	87
5.1	Model akčného disku	87
5.2	Odvedenie základných vzťahov	88
5.2.1	Rovnica kontinuity	88
5.2.2	Veta o zmene hybnosti	88
5.2.3	Bernoulliho rovnica	89
5.2.4	Rýchlosť v rovine disku	89
5.2.5	Axiálny indukčný faktor	89
5.3	Výkon, ťah a Betzov limit	90
5.3.1	Výkon a súčiniteľ výkonu	90
5.3.2	Betzov limit	90
5.3.3	Fyzikálny význam Betzovho limitu	90

5.4	Priebeh rýchlosti a tlaku pozdĺž prúdovej trubice	91
5.4.1	Rýchlostné pole podľa modelu vírového valca	93
5.5	Akčný disk ako vrtuľa	96
5.6	Platnosť hybnostnej teórie	96
5.6.1	Prevádzkové stavy rotora	96
5.6.2	Silne zaťažný rotor	97
5.6.3	Ďalšie obmedzenia	97
5.7	Prstencové prúdové trubice	98
	Zhrnutie	99
	Kontrolné otázky	99
	Úlohy	99
6	Rotujúci akčný disk a rotácia úplavy	101
6.1	Rotácia úplavy	101
6.2	Veta o zmene momentu hybnosti pre prstenec	103
6.3	Energetická bilancia a optimálny rotor	103
6.3.1	Spojenie axiálnej a obvodovej hybnosti	103
6.3.2	Maximum výkonu	104
6.4	Tlak v rotujúcej úplave	105
6.5	Energia rotácie úplavy: dva prístupy	106
6.5.1	Klasický prístup: energia rotácie ako strata	106
6.5.2	Prístup so všeobecnou hybnostnou teóriou	106
6.6	Vírový model rotujúcej úplavy	109
6.7	Krútiaci moment ideálneho rotora	110
6.8	Rýchlostný trojuholník prvku lopatky	111
6.9	Ťah prstenca s rotujúcou úplavou	112
	Zhrnutie	112
	Kontrolné otázky	112
	Úlohy	113
7	Teória prvkov lopatky (BEM)	115
7.1	Teória prvku lopatky	115
7.1.1	Predpoklady	115
7.1.2	Uhol nábehu prierezu	116
7.1.3	Sily na prvok lopatky	116

7.1.4	Plnosť rotora	117
7.2	Rovnice metódy BEM	118
7.3	Iteračný postup	118
7.4	Konvergencia iterácie a relaxácia	120
7.5	Priame riešenie pre súčiniteľ vztlaku	121
7.6	Ťah, krútiaci moment a výkon rotora	123
7.7	Výsledky pre modelovú lopatku	124
7.7.1	Rozloženie výkonu po lopatke	124
7.7.2	Vplyv odporu profilu	127
7.8	Predpoklady a obmedzenia metódy BEM	127
	Zhrnutie	128
	Kontrolné otázky	128
	Úlohy	129
8	Korekcie metódy BEM	131
8.1	Straty na konci lopatky	131
8.1.1	Fyzikálna podstata	131
8.1.2	Prandtlov model	133
8.1.3	Straty pri koreni lopatky	134
8.1.4	Rovnice BEM so stratami	135
8.1.5	Vplyv strát na optimálny rotor	136
8.1.6	Straty na konci lopatky modelového rotora	136
8.2	Silne zaťažný rotor	139
8.2.1	Empirický vzťah pre súčiniteľ ťahu	139
8.2.2	Viacnásobné riešenia	141
8.2.3	Iteračný postup s korekciami	141
8.3	Vplyv rotácie na charakteristiky profilu	141
8.3.1	Oneskorenie stallu	141
8.3.2	Merania a Snelova korekcia	143
8.3.3	Vplyv drsnosti povrchu	145
8.3.4	Charakteristiky pri veľkých uhloch nábehu	145
8.4	Šikmé nabíehanie vetra	145
8.4.1	Hybnostná teória natočeného rotora	145
8.4.2	Šikmá úplava a nerovnomerná indukcia	146

8.5	Nestacionárne javy	147
8.5.1	Tieň stožiara a rotačné vzorkovanie	148
8.5.2	Nestacionárne obtekanie profilu	148
8.5.3	Dynamický stall	149
8.5.4	Dynamický prítok	149
8.6	Obmedzenia metódy BEM a iné prístupy	151
	Zhrnutie	152
	Kontrolné otázky	152
	Úlohy	153
9	Návrh lopatky a výkonové charakteristiky	155
9.1	Postup návrhu rotora	155
9.2	Optimálna lopatka	157
9.2.1	Optimálna lopatka bez rotácie úplavy	157
9.2.2	Optimálna lopatka s rotáciou úplavy	157
9.2.3	Vplyv návrhovej rýchlobežnosti	158
9.3	Voľba profilu a návrhového uhla nábehu	159
9.4	Praktická lopatka	159
9.5	Vplyv odporu a počtu lopatiek na optimálny výkon	160
9.6	Výkonové charakteristiky rotora	162
9.6.1	Charakteristika $c_P(\lambda)$	162
9.6.2	Vplyv plnosti rotora	162
9.6.3	Vplyv uhla natočenia lopatiek	164
9.7	Prevádzka pri konštantných otáčkach	164
9.7.1	Regulácia stallom	164
9.8	Prevádzka s premenlivými otáčkami a natáčanie lopatiek	165
	Zhrnutie	168
	Kontrolné otázky	168
	Úlohy	169
10	Zaťaženia veternej turbíny	171
10.1	Druhy zaťaženia	171
10.1.1	Zdroje zaťaženia	171
10.1.2	Medzné a únavové zaťaženie	172
10.1.3	Označenie síl a momentov na lopatke	173

10.2	Ustálené aerodynamické zaťaženie lopatky	173
10.2.1	Rozloženie síl a momentov	173
10.2.2	Závislosť od rýchlosti vetra	175
10.3	Periodické zaťaženie	175
10.3.1	Strih vetra	175
10.3.2	Vybočenie a sklon hriadeľa	176
10.3.3	Tieň stožiara	177
10.3.4	Tiaž a odstredivá sila	177
10.4	Turbulencia a únavové zaťaženie	178
10.4.1	Spektrum turbulencie	178
10.4.2	Priestorová korelácia a rotačné vzorkovanie	179
10.4.3	Spektrum únavového zaťaženia	180
10.5	Extrémne zaťaženie	180
10.5.1	Zastavený rotor v extrémnom vetre	180
10.5.2	Zaťaženie stožiara	181
	Zhrnutie	182
	Kontrolné otázky	182
	Úlohy	183
11	Turbíny so zvislou osou rotácie	185
11.1	Typy turbín so zvislou osou	185
11.2	Kinematika H-rotora	186
11.3	Sily a krútiaci moment	188
11.4	Metóda jednej prúdovej trubice	189
11.4.1	Približné riešenie	190
11.5	Metódy viacerých prúdových trubíc	190
11.6	Metóda dvojitých viacerých prúdových trubíc	193
11.7	Rozbeh, dynamický stall a natáčanie lopatiek	194
11.8	Profily pre turbíny so zvislou osou	196
11.9	Rotor Savonius	196
11.10	Porovnanie s turbínou s vodorovnou osou	197
	Zhrnutie	198
	Kontrolné otázky	198
	Úlohy	199

12 Úplav, veterné parky a pokročilé metódy	201
12.1 Úplav za turbínou	201
12.2 Jensenov (Katičov) model úplavy	202
12.2.1 Vplyv smeru vetra	204
12.3 Turbulencia v úplave	204
12.4 Straty vo veternom parku	206
12.4.1 Rozostupy turbín	206
12.4.2 Čiastočná úplav a zaťaženie	208
12.4.3 Vyhľadanie výkonu	208
12.5 Pokročilé metódy výpočtu	209
12.5.1 Overovanie modelov	209
Zhrnutie	210
Kontrolné otázky	211
Úlohy	211
A Ukážkový výpočet metódou BEM	213
Literatúra	217

Zoznam hlavných symbolov

Latinské písmená

A	plocha rotora	m^2
a	rýchlosť zvuku	m/s
a'	tangenciálny indukčný faktor	–
a (rotor)	axiálny indukčný faktor	–
A_∞, A_w	prierez prúdovej trubice ďaleko pred rotorom a v úplave	m^2
c	parameter mierky Weibullovoho rozdelenia	m/s
c (profil)	tetiva profilu	m
c_D	súčiniteľ odporu	–
c_f	súčiniteľ trecieho odporu	–
c_L, c_M	súčiniteľ vztlaku, klopivého momentu profilu	–
c_N, c_T	súčiniteľ normálovej a tangenciálnej sily profilu	–
c_P	súčiniteľ výkonu	–
$c_{T,r}$	miestny súčiniteľ ťahu prstenca	–
c_{T1}, a_T	súčiniteľ ťahu pri $a = 1$ a bod dotyku empirickej priamky	–
$c_{L,d}, \alpha_d$	návrhový súčiniteľ vztlaku a uhol nábehu	–, °
$c_{L\alpha}, c_{D0}$	sklon vztlakovej čiary, súčiniteľ odporu pri nulovom vztlaku	rad^{-1} , –
c_{pr}	súčiniteľ tlaku	–
C_x, C_y	súčinitele síl prvku lopatky v smere osi a v smere otáčania	–
c_Q	súčiniteľ krútiaceho momentu	–
c_T	súčiniteľ ťahu	–
D	priemer rotora	m
D_t	priemer stožiaru	m
D, D'	odpor, odpor na jednotku dĺžky	$\text{N}, \text{N/m}$
E_r	ročná výroba energie	MWh
f	Coriolisov parameter	s^{-1}
F, F_t, F_k	Prandtllov faktor strát (celkový, na konci, pri koreni lopatky)	–
F_x, F_y	sila na jednotku dĺžky lopatky kolmo na rovinu rotora a v nej	N/m
$F(v)$	distribučná funkcia rýchlosti vetra	–
$f(v)$	hustota pravdepodobnosti rýchlosti vetra	s/m
F_D	odporová sila	N
dF_x, dF_y	sily na prvok lopatky v smere osi a v smere otáčania	N

g	tiažové zrýchlenie	m/s^2
H	výška osi rotora	m
H (VAWT)	výška rotora so zvislou osou	m
h	nadmorská výška	m
I, I_{ref}	intenzita turbulencie, referenčná intenzita turbulencie	–
K_P	súčiniteľ výkonu vzťahovaný na obvodovú rýchlosť	–
I_+, I_{wake}	prídavná a celková intenzita turbulencie v úplave	%
k (úplav)	konštanta rozširovania úplavy	–
k	parameter tvaru Weibullovoho rozdelenia	–
K	súčiniteľ nerovnomernej indukcie pri vybočení	–
k_c	súčiniteľ využitia inštalovaného výkonu	–
L_{1u}, L_{2u}	dĺžkové mierky turbulencie (Kaimal, von Kármán)	m
L	teplotný gradient v štandardnej atmosfére	K/m
L, L'	vztlak, vztlak na jednotku dĺžky	$\text{N}, \text{N/m}$
M_x, M_y	ohybový moment lopatky z roviny rotora a v rovine rotora	Nm
M	Machovo číslo	–
$\dot{m}$	hmotnostný prietok	kg/s
M'	klopivý moment na jednotku dĺžky	N
$m(r)$	hmotnosť lopatky na jednotku dĺžky	kg/m
m, p	prehnutie a jeho poloha (profily NACA)	–
n	otáčky rotora	min^{-1}
N_c	odstredivá sila v lopatke	N
N', T'	normálová a tangenciálna sila na jednotku dĺžky	N/m
N (rotor)	počet lopatiek	–
P	výkon rotora (turbíny)	W
p	tlak	Pa
p^+, p^-	tlak tesne pred diskom a za ním	Pa
p_0	celkový tlak	Pa
P_n	menovitý výkon	W
P_w	výkon vetra	W
Q	krútiaci moment rotora	Nm
q	dynamický tlak	Pa
r_k, μ_k	polomer koreňa lopatky, pomerný polomer koreňa	$\text{m}, -$
R	polomer rotora; merná plynová konštanta	$\text{m}; \text{J}/(\text{kg K})$
r	polomer (poloha prierezu lopatky)	m
Re	Reynoldsovo číslo	–
$S_u(n)$	spektrálna hustota pozdĺžnej zložky turbulencie	m^2/s
T	ťah rotora; termodynamická teplota	$\text{N}; \text{K}$
t	pomerná hrúbka profilu	–
T_p	interval priemerovania	s
T_r	počet hodín v roku (8760)	h
U	stredná rýchlosť vetra (desaťminútový priemer)	m/s
U_0, U_X	rýchlosť pred turbínou a v úplave vo vzdialenosti X	m/s
u	rýchlosť pohybu plochy odporového zariadenia	m/s
u'	turbulentná fluktuácia rýchlosti	m/s
u_*	trecia rýchlosť	m/s
U_e	rýchlosť na okraji medznej vrstvy	m/s
$\mathbf{v}$	vektor rýchlosti	m/s
v, v_∞	rýchlosť vetra, rýchlosť nerušeného prúdu	m/s

$V_{ave}, V_{ref}, V_{hub}$	stredná ročná, referenčná rýchlosť a rýchlosť v osi rotora (IEC)	m/s
v_d, v_w	rýchlosť v rovine rotora a v úplave	m/s
v_g	rýchlosť geostrofického vetra	m/s
v_{in}, v_n, v_{out}	zapínacia, menovitá a vypínacia rýchlosť	m/s
W	relatívna rýchlosť obtekania prierezu lopatky	m/s
x_n	dĺžka blízkej úplavy	m
y_c, y_t	stredná čiara, polovica hrúbky profilu (vzťahované na tetivu)	–
z, z_0	výška nad terénom, parameter drsnosti	m

Grécke písmená

α	exponent mocninového zákona	–
α (profil)	uhol nábehu	°
α_{L0}	uhol nulového vztaku	°
β	uhol nastavenia prierezu lopatky	°
γ	uhol vybočenia osi rotora od smeru vetra	°
Γ	funkcia gama	–
Γ (víry)	cirkulácia	m ² /s
δ	hrúbka medznej vrstvy	m
Δp	skok tlaku na akčnom disku	Pa
Δp_r	pokles tlaku v rotujúcej úplave	Pa
η	účinnosť prevodovky a generátora	–
θ	uhol natočenia lopatiek	°
η_{park}	účinnosť veterného parku	–
κ	von Kármánova konštanta ($\approx 0,4$)	–
κ_v	Poissonova konštanta	–
λ	rýchlobežnosť	–
λ_d	návrhová rýchlobežnosť	–
λ_r	miestna rýchlobežnosť	–
μ	dynamická viskozita	Pa s
μ (rotor)	pomerný polomer r/R	–
ν	kinematická viskozita	m ² /s
ρ	hustota vzduchu	kg/m ³
σ_r, σ	miestna plnosť, plnosť rotora	–
σ_u, σ_1	smerodajná odchýlka rýchlosti (turbulencia)	m/s
φ (VAWT)	azimut lopatky rotora so zvislou osou	°
φ	zemepisná šírka	°
ϕ	uhol prúdenia (relatívnej rýchlosti k rovine rotácie)	°
$\Phi(\tau), \tau$	Wagnerova funkcia, bezrozmerný čas $2Wt/c$	–
χ	uhol šikmej úplavy	°
ψ	azimut lopatky	°
ω	vírivosť	s ⁻¹
Ω	uhlová rýchlosť rotora	rad/s
Ω_Z	uhlová rýchlosť rotácie Zeme	rad/s

Skratky

BEM	metóda prvkov lopatky (angl. <i>blade element momentum</i>)
CFD	výpočtová dynamika tekutín (angl. <i>computational fluid dynamics</i>)
HAWT	turbína s vodorovnou osou (angl. <i>horizontal axis wind turbine</i>)
ISA	medzinárodná štandardná atmosféra
VAWT	turbína so zvislou osou (angl. <i>vertical axis wind turbine</i>)

Kapitola 1

Úvod do veternej energetiky a veterných zariadení

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- opísať hlavné etapy vývoja veterných zariadení a vysvetliť, prečo sa presadila trojlopatková turbína s vodorovnou osou,
- rozdeliť veterné zariadenia podľa polohy osi, aerodynamického princípu a ďalších konštrukčných hľadísk,
- pomenovať hlavné časti veternej turbíny a ich funkciu,
- odvodiť výkon prúdu vzduchu pretekajúceho plochou rotora a vypočítať hustotu vzduchu pre zadané podmienky,
- definovať súčinitele výkonu, ťahu a krútiaceho momentu a rýchlobežnosť a používať ich pri jednoduchých výpočtoch,
- vysvetliť, prečo majú odporové zariadenia principiálne nižšiu účinnosť ako vztlakové.

1.1 Predmet aerodynamiky veterných zariadení

Veterná turbína premieňa časť kinetickej energie prúdiaceho vzduchu na mechanickú prácu rotujúceho hriadeľa, ktorú generátor ďalej premieňa na elektrickú energiu. Rozhodujúci krok tejto premeny – odovzdanie energie z prúdu vzduchu lopatkám – je aerodynamický dej. Od aerodynamiky rotora závisí, koľko energie turbína z vetra odoberie, aké sily pôsobia na lopatky, vežu a základ, ako turbína reaguje na zmeny vetra a ako ovplyvňuje prúdenie za sebou, a teda aj turbíny, ktoré stoja v jej úplave [1, 2].

Aerodynamika veterných turbín sa v niekoľkých podstatných bodoch líši od aerodynamiky lietadiel, z ktorej historicky vychádza:

- Turbína pracuje v *atmosférickej medznej vrstve*, kde sa rýchlosť vetra mení s výškou a v čase prúdenie je turbulentné (kap. 2).
- Lopatky rotujú, takže každý prierez lopatky je obtekaný inou rýchlosťou a pod iným

uhlom. Rotácia navyše vyvoláva trojrozmerné javy, ktoré pri nehybnom krídle nevznikajú (kap. 8).

- Rotor odoberá prúdu energiu, a tým ho spomaľuje. Rýchlosť, ktorou je lopatka obtekaná, preto nie je rovná rýchlosti nerušeného vetra, ale závisí od zaťaženia samotného rotora (kap. 5 and 6).
- Pri veľkých rýchlostiach vetra časti lopatky pracujú v oblasti odtrhnutého prúdenia, ktorej sa konštruktér lietadla zvyčajne vyhýba (kap. 4 and 9).

Učebnica postupuje od opisu vetra ako zdroja energie (kap. 2) cez zopakovanie základov aerodynamiky (kap. 3) a vlastností aerodynamických profilov (kap. 4) k teórii rotora. Jej jadrom sú hybnostná teória (kap. 5 and 6) a metóda prvkov lopatky, známa pod skratkou BEM (kap. 7 and 8), ktorá je dodnes základným nástrojom návrhu rotorov. Na ňu nadväzuje návrh lopatky (kap. 9), nestacionárne javy a zaťaženia (kap. 10), turbíny so zvislou osou (kap. 11) a napokon úplav a veterné parky (kap. 12).

1.2 Stručný historický prehľad

1.2.1 Veterné mlyny

Energia vetra sa využíva tisícročia – na pohon plachetníc, mletie obilia a čerpanie vody. Najstaršie známe konštrukcie veterných mlynov pochádzajú z Perzie a mali zvislú os otáčania; v Európe sa veterné mlyny s vodorovnou osou rozšírili od 12. storočia [3]. Tieto zariadenia boli poháňané prevažne odporovou silou alebo pracovali s lopatkami (plachtami) nastavenými pod veľkým uhlom k vetru a s malou obvodovou rýchlosťou. Rozdiel medzi odporovým a vztlakovým princípom, ktorý je pre účinnosť rozhodujúci, vysvetlíme v čl. 1.3.2.

1.2.2 Prvé veterné elektrárne

Na konci 19. storočia sa objavili prvé veterné motory, ktoré poháňali dynamo. Gipe a Möllerström [4] uvádzajú ako prvé zariadenia na výrobu elektrickej energie turbínu Jamesa Blytha v Škótsku (1887), mnoholopatkovú turbínu Charlesa Brusha v Clevelande v USA (1888) a turbínu Poula la Coura v dánskom Askove (1891). La Cour vykonával aj jedny z prvých systematických experimentov s modelmi rotorov vo veternom tuneli [4]. Základné údaje o týchto zariadeniach sú v tab. 1.1.

Tabuľka 1.1. Vybrané historické veterné turbíny na výrobu elektrickej energie. Údaje podľa [4].

Rok	Turbína (krajina)	D (m)	P (kW)	Lopatky	Poznámka
1887	J. Blyth (Škótsko)	7,9	4	—	prvá turbína na výrobu elektriny
1888	Ch. Brush (USA)	17,1	12	mnoho	náveterný mnoholopatkový rotor
1891	P. la Cour (Dánsko)	11,6	18	4	náveterný rotor so žalúziami
1941	Smith–Putnam (USA)	53,3	1000	2	záveterný rotor, výkyvné uloženie lopatiek
1957	U. Hütter (Nemecko)	34	100	2	záveterný rotor
1957	J. Juul, Gedser (Dánsko)	24	200	3	náveterný rotor, regulácia stallom

1.2.3 Veľké experimentálne turbíny v polovici 20. storočia

Prvou turbínou megawattovej triedy bola americká turbína Smith–Putnam z roku 1941 s priemerom rotora 53,3 m. Mala dve lopatky umiestnené za vežou (záveterný rotor) s výkyvným uložením a pracovala do roku 1945 [4].

V roku 1957 vznikli dve konštrukcie, ktoré výrazne ovplyvnili ďalší vývoj. Nemecký inžinier Ulrich Hütter postavil ľahkú dvojlopatkovú záveternú turbínu s priemerom 34 m a použil na nej spôsob uchytenia lopatiek, ktorý sa neskôr označoval ako *Hütterova príruha*. Dánsky inžinier Johannes Juul postavil v Gedseri trojlopatkovú náveternú turbínu s výkonom 200 kW, reguláciou výkonu stallom a otočnými koncami lopatiek, ktoré slúžili ako aerodynamická brzda pri nadmerných otáčkach [4]. Usporiadanie turbíny Gedser – tri lopatky, rotor pred vežou a regulácia výkonu stallom – sa neskôr stalo základom tzv. *dánskeho konceptu*.

1.2.4 Od ropnej krízy po súčasnosť

Ropné krízy v 70. rokoch 20. storočia vyvolali v niekoľkých krajinách štátom financované programy vývoja veľkých turbín, na ktorých sa podieľali najmä letecké a kozmické firmy [5]. Gipe a Möllerström [5] ukazujú, že základom dnešných komerčných turbín sa nestali tieto veľké štátne prototypy, ale malé dánske turbíny vyvíjané pre poľnohospodársky trh, ktorých veľkosť sa postupne zväčšovala. Kľúčovými technickými prvkami tohto vývoja boli podľa nich Hütterova príruha na uchytenie lopatky a odstredivo ovládané natáčanie lopatiek. V posledných rokoch autori pozorujú trend smerom k väčším priemerom rotora pri relatívne nižšom menovitom výkone, t. j. k turbínam určeným aj pre lokality so stredne silným vetrom [5].

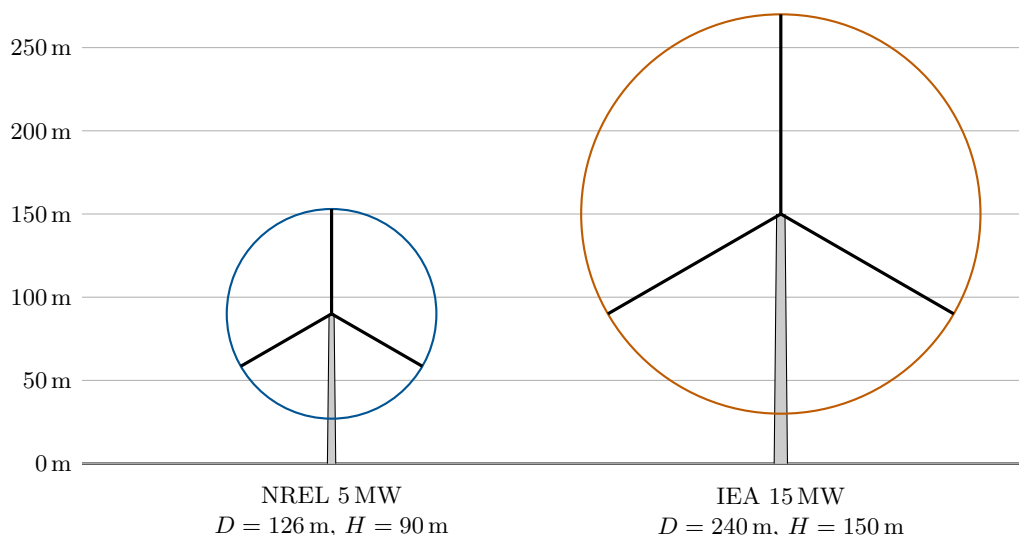
Rast veľkosti turbín dobre ilustrujú tzv. *referenčné turbíny* – verejne zdokumentované modelové turbíny, ktoré slúžia výskumu ako spoločný základ na porovnávanie výpočtových metód. Referenčná turbína NREL s výkonom 5 MW (2009) má priemer rotora 126 m a výšku osi rotora 90 m [6], referenčná turbína IEA s výkonom 15 MW (2020) má priemer rotora 240 m a výšku osi rotora 150 m [7]. Obe budeme v učebnici používať ako zdroje reálnych údajov pre príklady.

Porovnanie rozmerov oboch turbín v rovnakej mierke je na obr. 1.1.

Podľa správy Global Wind Energy Council [8] dosiahol celkový inštalovaný výkon veterných elektrární vo svete na konci roka 2025 hodnotu 1299 GW. Len v roku 2025 pribudlo 165 GW, z toho 155,3 GW na pevnine a 9,3 GW na mori.

Poznámka

Štatistické údaje o inštalovanom výkone sa každoročne menia. Pri ich citovaní vždy uvádzajte zdroj a rok, ku ktorému sa vzťahujú, a pri práci s učebnicou si overte najnovšie vydanie citovanej správy.



Obr. 1.1. Porovnanie referenčných turbín NREL 5 MW [6] a IEA 15 MW [7] v rovnakej mierke (výška osi rotora H a priemer rotora D ; tvar veže a lopatiek je schematický).

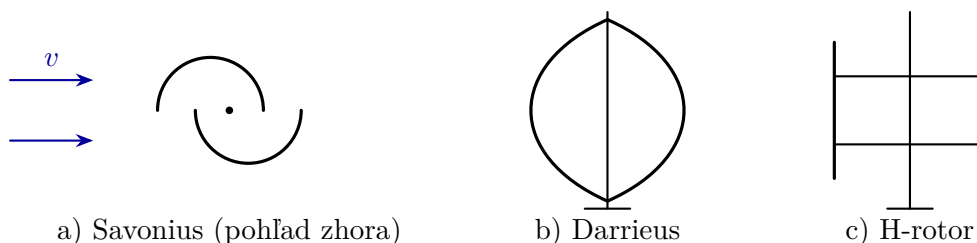
1.3 Rozdelenie veterných zariadení

1.3.1 Podľa polohy osi rotácie

Základné rozdelenie je podľa polohy osi rotora vzhľadom na smer vetra a zemský povrch [2, 3]:

Turbíny s vodorovnou osou (angl. *horizontal axis wind turbine*, *HAWT*). Os rotora je približne rovnobežná so smerom vetra. Rotor sa musí natáčať proti vetru, na čo slúži systém natáčania gondoly. Do tejto skupiny patrí prevažná väčšina dnes prevádzkovaných turbín.

Turbíny so zvislou osou (angl. *vertical axis wind turbine*, *VAWT*). Os rotora je kolmá na smer vetra a spravidla zvislá. Rotor pracuje pri ľubovoľnom smere vetra bez natáčania a generátor môže byť umiestnený pri zemi. Patria sem napr. rotory typu Savonius, Darrieus a H-rotor (obr. 1.2); podrobne sa im venuje kap. 11.



Obr. 1.2. Základné typy turbín so zvislou osou rotácie (schematicky).

1.3.2 Podľa aerodynamického princípu

Podľa sily, ktorá roztáča rotor, rozlišujeme:

Odporové zariadenia. Vzduch tlačí na plochu, ktorá sa pohybuje v smere vetra. Hnacou silou je aerodynamický *odpor*. Typickým príkladom je rotor Savonius alebo miskový anemometer.

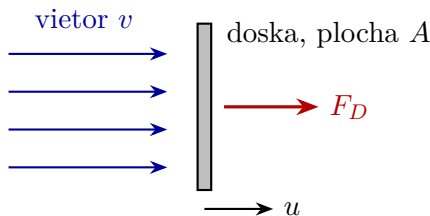
Vztlakové zariadenia. Lopatka s aerodynamickým profilom sa pohybuje prevažne kolmo na smer vetra a hnacou silou je predovšetkým aerodynamický *vztlak*. Takto pracujú moderné turbíny s vodorovnou osou aj rotory Darrieus a H-rotor.

Prečo sa presadil vztlakový princíp, ukazuje jednoduchý model odporového zariadenia na obr. 1.3. Doska s plochou A sa pohybuje v smere vetra rýchlosťou u . Vzduch na ňu dopadá relatívnou rýchlosťou $v - u$, takže odporová sila je

$$F_D = \frac{1}{2} \rho c_D A (v - u)^2, \quad (1.1)$$

kde c_D je súčiniteľ odporu dosky a ρ hustota vzduchu. Výkon odovzdaný doske je súčin sily a rýchlosti pohybu:

$$P = F_D u = \frac{1}{2} \rho c_D A (v - u)^2 u. \quad (1.2)$$



Obr. 1.3. Model odporového zariadenia: doska unášaná vetrom.

Výkon zo vzťahu (1.2) porovnáme s výkonom prúdu vzduchu $\frac{1}{2} \rho A v^3$ pretekajúceho rovnakou plochou (odvodíme ho v čl. 1.5). Dostaneme súčiniteľ výkonu

$$c_P = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho A v^3} = c_D \frac{u}{v} \left(1 - \frac{u}{v}\right)^2. \quad (1.3)$$

Maximum nájdeme z podmienky $dc_P/d(u/v) = 0$:

$$c_D \left[\left(1 - \frac{u}{v}\right)^2 - 2 \frac{u}{v} \left(1 - \frac{u}{v}\right) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{v} = \frac{1}{3},$$

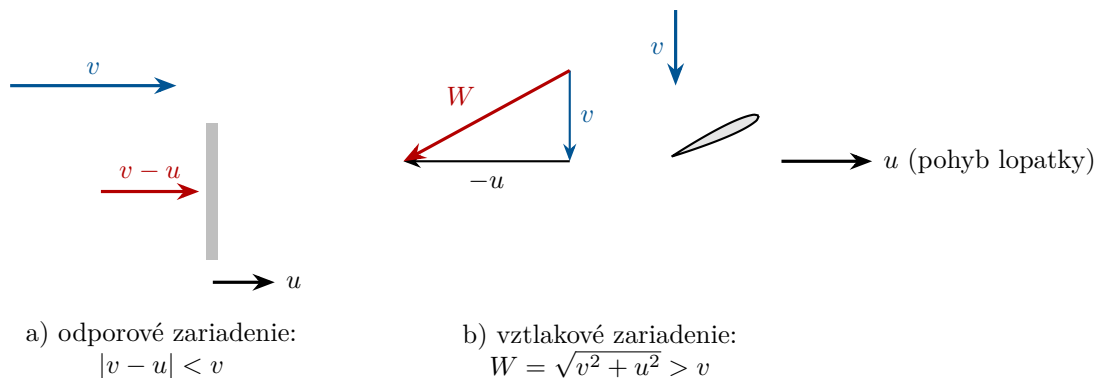
takže

$$c_{P,\max} = \frac{4}{27} c_D \approx 0,148 c_D. \quad (1.4)$$

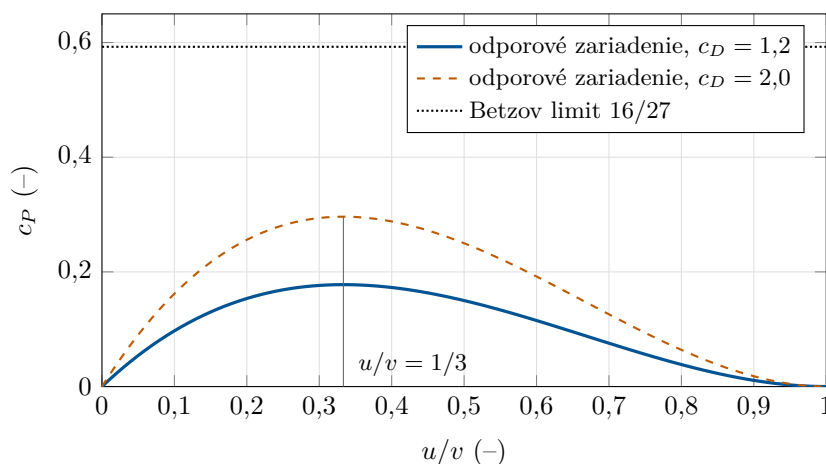
Odporové zariadenie teda dosahuje najväčší výkon, keď sa pohybuje tretinovou rýchlosťou vetra, a jeho súčiniteľ výkonu je aj v tomto idealizovanom modeli zlomkom súčiniteľa odporu. Model navyše zanedbáva spätný pohyb, pri ktorom sa plocha v reálnom rotore vracia proti vetru a spotrebúva časť získaného výkonu. Pribeh vzťahu (1.3) je na obr. 1.5.

Pri vztlakovom zariadení sa lopatka pohybuje kolmo na vietor a jej obvodová rýchlosť môže byť niekoľkonásobne väčšia ako rýchlosť vetra. Relatívna rýchlosť obtekania je potom oveľa väčšia ako v a aerodynamická sila, úmerná druhej mocnine relatívnej rýchlosti, tiež. Horná hranica súčiniteľa výkonu ideálneho rotora je Betzov limit $c_{P,\text{Betz}} = 16/27 \approx 0,593$, ktorý odvodíme v kap. 5 [1].

Rozdiel oboch princípov ukazuje obr. 1.4. Pri odporovom zariadení je relatívna rýchlosť $v - u$ vždy menšia ako rýchlosť vetra. Pri vztlakovom zariadení sa rýchlosť vetra v skladá s obvodovou rýchlosťou lopatky u , ktorá je na ňu kolmá, a relatívna rýchlosť $W = \sqrt{v^2 + u^2}$ je väčšia ako v aj u . Napríklad pri $u = 7v$ je $W \approx 7,1v$ a dynamický tlak, ktorým je prierez lopatky obtekaný, je asi päťdesiatkrát väčší ako dynamický tlak vetra. (Spomalenie vetra rotorom, ktoré tu zanedbávame, doplníme v kap. 5 and 7.)



Obr. 1.4. Relatívna rýchlosť obtekania pri odporovom a vztlakovom zariadení (schematicky). Pri vztlakovom zariadení je relatívna rýchlosť W zložená z rýchlosti vetra a rýchlosti opačnej k pohybu lopatky.



Obr. 1.5. Súčiniteľ výkonu idealizovaného odporového zariadenia podľa (1.3) pre dve zvolené hodnoty c_D v porovnaní s Betzovým limitom.

Príklad 1.1: Odporové zariadenie

Doska so súčiniteľom odporu $c_D = 1,2$ (zvolená hodnota) je unášaná vetrom podľa obr. 1.3. Určte optimálny pomer u/v a najväčší súčiniteľ výkonu. Porovnajte ho s Betzovým limitom.

Riešenie. Podľa odvodu vyššie je optimum pri $u/v = 1/3$ a

$$c_{P,\max} = \frac{4}{27} \cdot 1,2 = 0,178.$$

V pomere k Betzovmu limitu je to $0,178/0,593 = 0,30$, teda približne tridsať percent teoretického maxima, a to ešte bez započítania strát pri spätnom pohybe.

1.3.3 Ďalšie hľadiská rozdelenia

Turbíny s vodorovnou osou sa ďalej rozlišujú podľa niekoľkých konštrukčných znakov [2, 3]:

- **Poloha rotora voči veži:** *náveterný* rotor (angl. *upwind*) je pred vežou, *záveterný* (angl. *downwind*) za ňou. Pri záveternom rotore prechádzajú lopatky úplavom veže, čo spôsobuje periodické zmeny zataženia (kap. 10). Turbíny Smith–Putnam a Hütterova turbína mali záveterný rotor, turbína Gedser náveterný [4].
- **Počet lopatiek:** jedna, dve, tri alebo viac. Počtu lopatiek sa podrobnejšie venuje kap. 9.
- **Spôsob obmedzenia výkonu** pri silnom vetre: pasívne odtrhnutím prúdu na lopatke (angl. *stall*) alebo natáčaním lopatiek okolo pozdĺžnej osi (angl. *pitch*) (kap. 9).
- **Otáčky rotora:** konštantné (generátor priamo pripojený na sieť) alebo premenné (generátor pripojený cez menič frekvencie).
- **Prevod:** s prevodovkou alebo s priamym pohonom (angl. *direct drive*); napr. referenčná turbína IEA 15 MW má priamy pohon [7].
- **Umiestnenie:** na pevnine (angl. *onshore*) alebo na mori (angl. *offshore*), s pevným základom alebo na plávajúcej konštrukcii.

1.4 Hlavné časti veternej turbíny

Na obr. 1.6 sú schematicky znázornené hlavné časti trojlopatkovej náveternej turbíny s vodorovnou osou [2, 3].

Rotor tvoria lopatky a náboj. Lopatky premieňajú energiu vetra na krútiaci moment. Ich tvar – rozloženie tetivy, skrutenia a profilov po dĺžke – je hlavným predmetom aerodynamického návrhu. Priemer rotora D určuje plochu $A = \pi D^2/4$, ktorou turbína „zachytáva“ vietor. Pri turbínach s natáčaním lopatiek sú v náboji uložené ložiská a pohony natáčania.

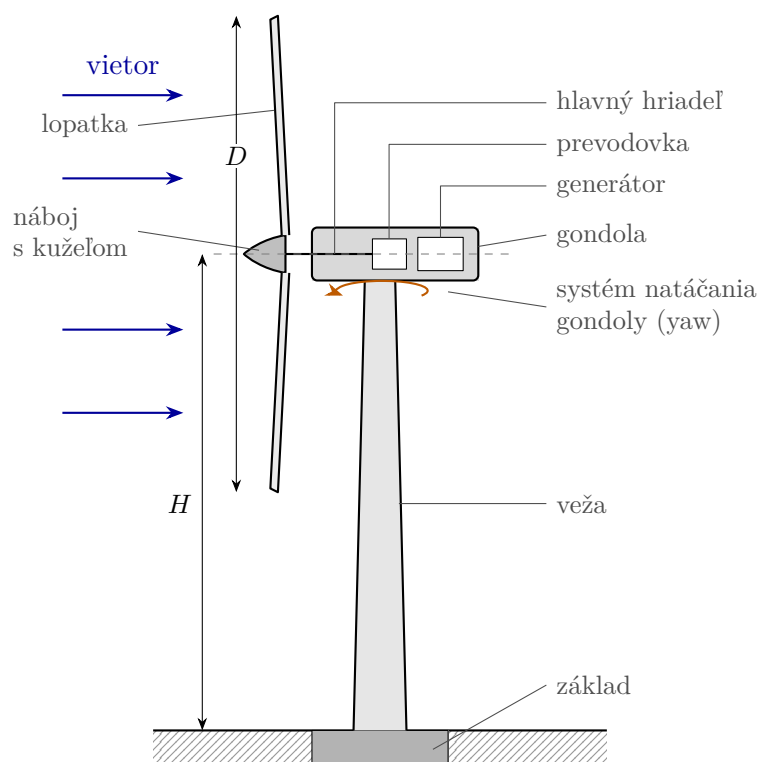
Hnacie ústrojenstvo tvorí hlavný hriadeľ s ložiskami, prípadne prevodovka a generátor. Prevodovka zvyšuje pomerne nízke otáčky rotora na otáčky vhodné pre generátor; pri priamom pohone sa používa pomalobežný generátor s veľkým priemerom.

Gondola obsahuje hnacie ústrojenstvo, brzdu, riadiace a pomocné systémy. Je uložená na veži otočne.

Systém natáčania gondoly (angl. *yaw system*) natáča rotor proti vetru podľa údajov o smere vetra.

Veža a základ nesú gondolu a rotor vo výške H a prenášajú zataženie do podlažia. So zväčšujúcou sa výškou rastie priemerná rýchlosť vetra (kap. 2).

Riadiaci systém na základe meraní (rýchlosť a smer vetra, otáčky, výkon) riadi natáčanie lopatiek, moment generátora a natáčanie gondoly a zabezpečuje bezpečné zastavenie turbíny.



Obr. 1.6. Hlavné časti turbíny s vodorovnou osou (schematicky, bočný pohľad, mierka nie je dodržaná). D – priemer rotora, H – výška osi rotora.

Poznámka

Aerodynamika rotora a riadenie turbíny spolu úzko súvisia: riadiaci systém mení uhol nastavenia lopatiek a otáčky, a tým aj podmienky obtekania lopatiek. Túto väzbu využijeme v kap. 9 pri opise prevádzkových oblastí turbíny.

1.5 Energia a výkon vetra

1.5.1 Výkon prúdu vzduchu

Uvažujme vzduch s hustotou ρ , ktorý prúdi rovnomernou rýchlosťou v kolmo cez rovinnú plochu A (obr. 1.7). Za čas dt prejde plochou objem vzduchu $A v dt$, teda hmotnosť

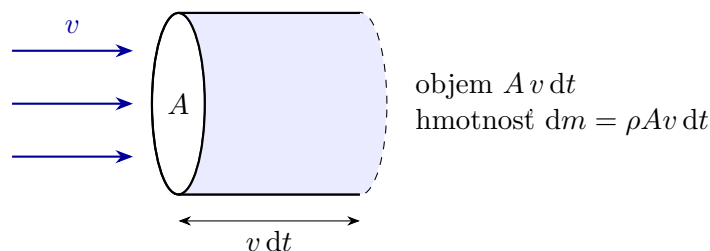
$$dm = \rho A v dt \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho A v, \quad (1.5)$$

kde $\dot{m}$ je hmotnostný prietok. Kinetická energia tejto hmotnosti je $dE = \frac{1}{2} dm v^2$, takže tok kinetickej energie plochou, ktorý nazývame **výkon vetra**, je

$$P_w = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \dot{m} v^2 = \frac{1}{2} \rho A v^3 \quad (1.6)$$

a **výkonová hustota vetra** (výkon pripadajúci na jednotku plochy)

$$\frac{P_w}{A} = \frac{1}{2} \rho v^3. \quad (1.7)$$

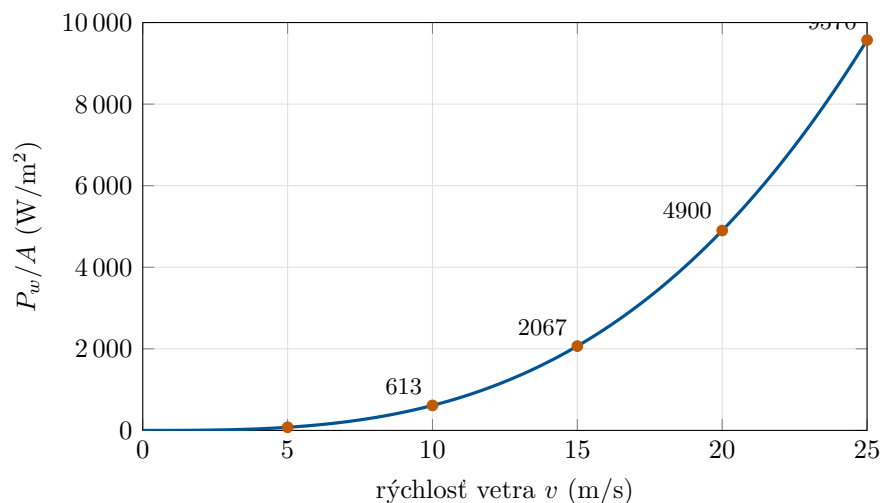


Obr. 1.7. Objem vzduchu, ktorý prejde plochou A za čas dt .

Zo vzťahu (1.6) vyplývajú tri dôležité závery:

1. *Výkon vetra rastie s treťou mocninou rýchlosti.* Dvojnásobná rýchlosť znamená osemnásobný výkon. Preto je presné určenie rýchlosti vetra v lokalite rozhodujúce: chyba 10 % v rýchlosti znamená chybu približne 33 % vo výkone ($1,1^3 = 1,331$). Z toho istého dôvodu nestačí poznať priemernú rýchlosť vetra – priemer z v^3 je väčší ako tretia mocnina priemeru v (kap. 2).
2. *Výkon je úmerný ploche rotora,* teda druhej mocnine priemeru. Zväčšenie priemeru rotora z 126 m na 240 m (referenčné turbíny NREL 5 MW a IEA 15 MW) zväčší plochu rotora $(240/126)^2 \approx 3,6$ -krát.
3. *Výkon je úmerný hustote vzduchu,* ktorá závisí od tlaku a teploty, a teda aj od nadmorskej výšky lokality.

Prvý záver ilustruje obr. 1.8: pri rýchlosti 5 m/s je výkonová hustota vetra približne 77 W/m², pri 10 m/s 613 W/m² a pri 15 m/s už viac ako 2000 W/m².



Obr. 1.8. Výkonová hustota vetra (1.7) pri $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$. Dvojnásobná rýchlosť znamená osemnásobnú výkonovú hustotu.

Výkon P_w je výkon, ktorý by prúd vzduchu *priniesol* plochou rotora, keby ho rotor neovplyvňoval. Turbína z neho môže odobrať iba časť: keby vzduchu odobrala všetku kinetickú energiu, vzduch by sa za rotorom zastavil a ďalší vzduch by nemohol rotorom pretekať. Aká časť je teoreticky dosiahnuteľná, ukážeme v kap. 5.

1.5.2 Hustota vzduchu

Pre suchý vzduch, ktorý považujeme za ideálny plyn, vyplýva hustota zo stavovej rovnice

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (1.8)$$

kde p je absolútny tlak, T termodynamická teplota a $R = 287,05 \text{ J/(kg K)}$ merná plynová konštanta suchého vzduchu. Vlhkosť vzduchu hustotu mierne znižuje; pre technické odhady ju často zanedbávame.

Ak nepoznáme miestny tlak a teplotu, používame **medzinárodnú štandardnú atmosféru** (ISA) [9]. Na hladine mora je v nej $T_0 = 288,15 \text{ K}$ (15°C), $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$ a hustota $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$. V troposfére teplota klesá lineárne s výškou h s gradientom $L = 0,0065 \text{ K/m}$:

$$T(h) = T_0 - Lh. \quad (1.9)$$

Z rovnice hydrostatickej rovnováhy $dp = -\rho g dh$ a zo stavovej rovnice (1.8) dostaneme

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT(h)} dh = -\frac{g}{R} \frac{dh}{T_0 - Lh},$$

a po integrácii od 0 po h

$$p(h) = p_0 \left(\frac{T_0 - Lh}{T_0} \right)^{g/(RL)}, \quad (1.10)$$

kde $g = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$ je normálne tiažové zrýchlenie a exponent $g/(RL) \approx 5,256$. Hustotu vo výške h potom vypočítame zo (1.8). Hodnoty pre niekoľko výšok sú v tab. 1.2.

Tabuľka 1.2. Teplota, tlak a hustota vzduchu v štandardnej atmosfére vypočítané podľa (1.8), (1.9) a (1.10).

h (m)	T (K)	p (Pa)	ρ (kg/m ³)	ρ/ρ_0 (-)
0	288,15	101 325	1,2250	1,000
500	284,90	95 461	1,1673	0,953
800	282,95	92 076	1,1337	0,925
1000	281,65	89 874	1,1117	0,907
1500	278,40	84 556	1,0581	0,864
2000	275,15	79 495	1,0065	0,822

Príklad 1.2: Hustota vzduchu vo vyššej nadmorskej výške

Určte hustotu vzduchu v štandardnej atmosfére vo výške 800 m nad morom a o koľko percent je výkon vetra pri rovnakej rýchlosti menší ako na hladine mora.

Riešenie. Podľa (1.9): $T = 288,15 - 0,0065 \cdot 800 = 282,95 \text{ K}$. Podľa (1.10):

$$p = 101\,325 \left(\frac{282,95}{288,15} \right)^{5,256} \approx 92\,080 \text{ Pa}.$$

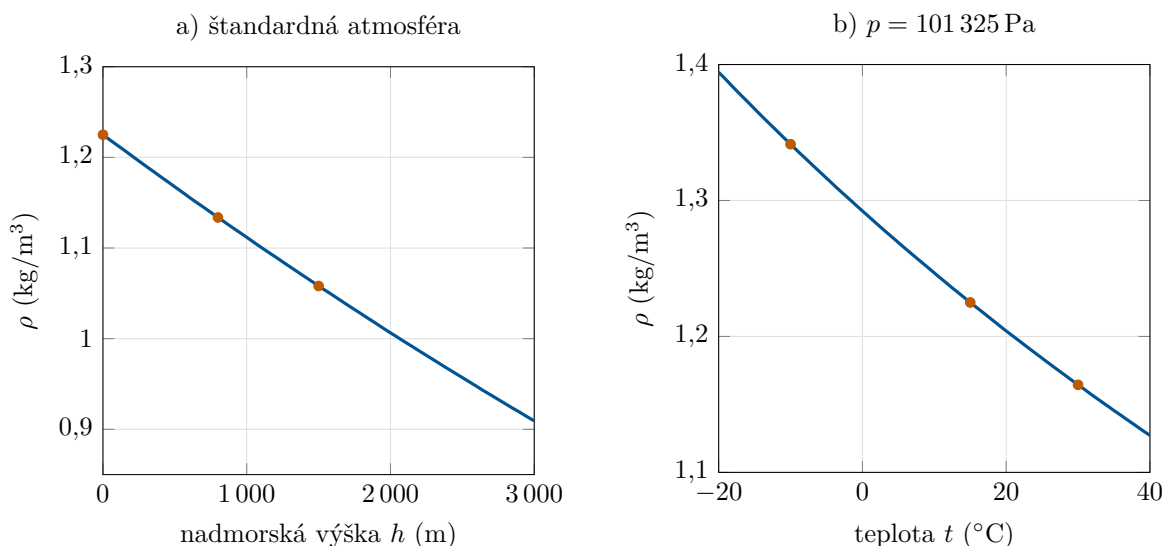
Hustota:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{92\,080}{287,05 \cdot 282,95} \approx 1,134 \text{ kg/m}^3.$$

Pomer $\rho/\rho_0 = 1,134/1,225 = 0,925$, takže výkon vetra je pri rovnakej rýchlosti asi o 7,5 % menší ako na hladine mora.

Hustota sa mení aj s teplotou: pri tlaku 101 325 Pa je podľa (1.8) pri $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ $\rho \approx 1,341\text{ kg/m}^3$, pri $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ $\rho \approx 1,164\text{ kg/m}^3$. Rozdiel viac ako 15 % sa pri rovnakej rýchlosti vetra priamo prejaví vo výkone vetra.

Závislosť hustoty od nadmorskej výšky v štandardnej atmosfére a od teploty pri normálnom tlaku je na obr. 1.9.



Obr. 1.9. Hustota suchého vzduchu a) v závislosti od nadmorskej výšky v štandardnej atmosfére podľa (1.8), (1.9) a (1.10), b) v závislosti od teploty pri normálnom tlaku. Body zodpovedajú hodnotám vypočítaným v texte.

Príklad 1.3: Výkon vetra pre referenčnú turbínu NREL 5 MW

Referenčná turbína NREL 5 MW má priemer rotora $D = 126\text{ m}$ a menovitý výkon 5 MW dosahuje pri menovitej rýchlosti vetra $v_n = 11,4\text{ m/s}$ [6]. Vypočítajte výkon vetra prechádzajúceho plochou rotora pri tejto rýchlosti ($\rho = 1,225\text{ kg/m}^3$) a pomer menovitého výkonu k výkonu vetra.

Riešenie. Plocha rotora:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 126^2}{4} = 12\,469\text{ m}^2.$$

Výkon vetra:

$$P_w = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 12\,469 \cdot 11,4^3 = 11,31 \cdot 10^6\text{ W} \approx 11,3\text{ MW}.$$

Pomer

$$\frac{P_n}{P_w} = \frac{5}{11,31} = 0,44.$$

Turbína teda pri menovitej rýchlosti premieňa na menovitý výkon asi 44 % výkonu vetra. Keďže 5 MW je menovitý výkon turbíny, tento pomer zahŕňa okrem aerodynamiky rotora aj straty v hnacom ústrojenstve a generátore; súčiniteľ výkonu samotného rotora je preto o niečo väčší.

1.6 Bezrozmerné charakteristiky rotora

Na porovnávanie rotorov rôznej veľkosti a na prenos výsledkov z modelových skúšok na skutočné turbíny sa používajú bezrozmerné veličiny [1–3].

1.6.1 Súčinitele výkonu, ťahu a krútiaceho momentu

Súčiniteľ výkonu (angl. *power coefficient*) je pomer výkonu odobratého rotorom P k výkonu vetra prechádzajúceho plochou rotora:

$$c_P = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho A v_\infty^3}. \quad (1.11)$$

Rýchlosť v_∞ označuje rýchlosť nerušeného vetra ďaleko pred rotorom. Podľa toho, aký výkon dosadíme do čitateľa (mechanický na hriadeli rotora alebo elektrický na svorkách generátora), hovoríme o aerodynamickom alebo o celkovom súčiniteli výkonu. Pri práci s údajmi je preto potrebné vždy overiť, o ktorý z nich ide.

Súčiniteľ ťahu (angl. *thrust coefficient*) vyjadruje osovú silu T , ktorou prúd vzduchu pôsobí na rotor (a ktorú musí preniesť veža a základ):

$$c_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho A v_\infty^2}. \quad (1.12)$$

Súčiniteľ krútiaceho momentu (angl. *torque coefficient*) pre krútiaci moment rotora Q definujeme s polomerom rotora R ako charakteristickou dĺžkou:

$$c_Q = \frac{Q}{\frac{1}{2} \rho A v_\infty^2 R}. \quad (1.13)$$

1.6.2 Rýchlobežnosť

Najdôležitejším prevádzkovým parametrom rotora je **rýchlobežnosť** (angl. *tip speed ratio*) – pomer obvodovej rýchlosti konca lopatky k rýchlosti nerušeného vetra:

$$\lambda = \frac{\Omega R}{v_\infty}, \quad (1.14)$$

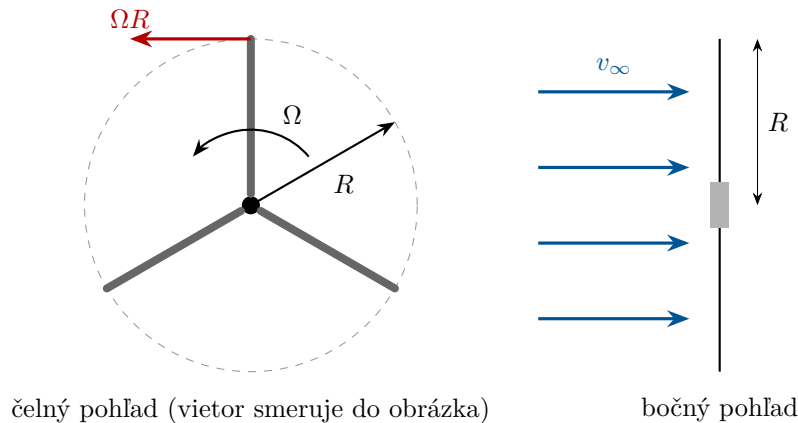
kde Ω je uhlová rýchlosť rotora (rad/s). Ak sú otáčky zadane v otáčkach za minútu n , platí $\Omega = 2\pi n/60$.

Veličiny, ktoré vystupujú v definícii rýchlobežnosti, sú znázornené na obr. 1.10.

Keďže výkon je súčinom krútiaceho momentu a uhlovej rýchlosti, $P = Q\Omega$, dosadením do (1.11) a (1.13) dostaneme jednoduchý vzťah

$$c_P = \frac{Q\Omega}{\frac{1}{2}\rho A v_\infty^3} = \frac{Q}{\frac{1}{2}\rho A v_\infty^2 R} \cdot \frac{\Omega R}{v_\infty} = \lambda c_Q. \quad (1.15)$$

Pre daný rotor s pevným nastavením lopatiek je súčiniteľ výkonu v prvom priblížení funkciou iba rýchlobežnosti, $c_P = c_P(\lambda)$. Krivka $c_P(\lambda)$ má pri určitej rýchlobežnosti λ_{opt} maximum. Turbíny s premenlivými otáčkami preto pri slabšom vetre menia otáčky úmerne rýchlosti vetra tak, aby pracovali blízko λ_{opt} . Tvar krivky $c_P(\lambda)$ odvodíme z teórie rotora v kap. 6 and 7 a jej využitie pri návrhu a riadení turbíny opíšeme v kap. 9.



Obr. 1.10. Veličiny v definícii rýchlobežnosti $\lambda = \Omega R / v_\infty$: obvodová rýchlosť konca lopatky ΩR leží v rovine rotora, rýchlosť vetra v_∞ je na ňu kolmá.

Príklad 1.4: Rýchlobežnosť referenčnej turbíny

Referenčná turbína NREL 5 MW má pri menovitej rýchlosti vetra $v_n = 11,4 \text{ m/s}$ menovité otáčky rotora $n = 12,1 \text{ min}^{-1}$ [6]. Vypočítajte obvodovú rýchlosť konca lopatky, rýchlobežnosť a Machovo číslo na konci lopatky (rýchlosť zvuku $a = 340,3 \text{ m/s}$).

Riešenie. Uhlová rýchlosť: $\Omega = 2\pi \cdot 12,1/60 = 1,267 \text{ rad/s}$. Obvodová rýchlosť konca lopatky ($R = 63 \text{ m}$): $\Omega R = 1,267 \cdot 63 = 79,8 \text{ m/s}$. Rýchlobežnosť:

$$\lambda = \frac{\Omega R}{v_n} = \frac{79,8}{11,4} = 7,0.$$

Machovo číslo (bez zohľadnenia rýchlosti vetra): $M = 79,8/340,3 = 0,23$. Obtekanie lopatky je teda aj na jej konci nestlačiteľné v tom zmysle, ako ho chápeme v mechanike tekutín (kap. 3).

Príklad 1.5: Súčiniteľ krútiaceho momentu

Rotor pracuje pri rýchlobežnosti $\lambda = 7,5$ so súčiniteľom výkonu $c_P = 0,45$ (zadané hodnoty). Určte súčiniteľ krútiaceho momentu.

Riešenie. Zo vzťahu (1.15): $c_Q = c_P / \lambda = 0,45/7,5 = 0,060$. Rýchlobežný rotor teda pri rovnakom c_P vyvíja menší krútiaci moment ako pomalobežný – vyšší výkon získava vyššími otáčkami.

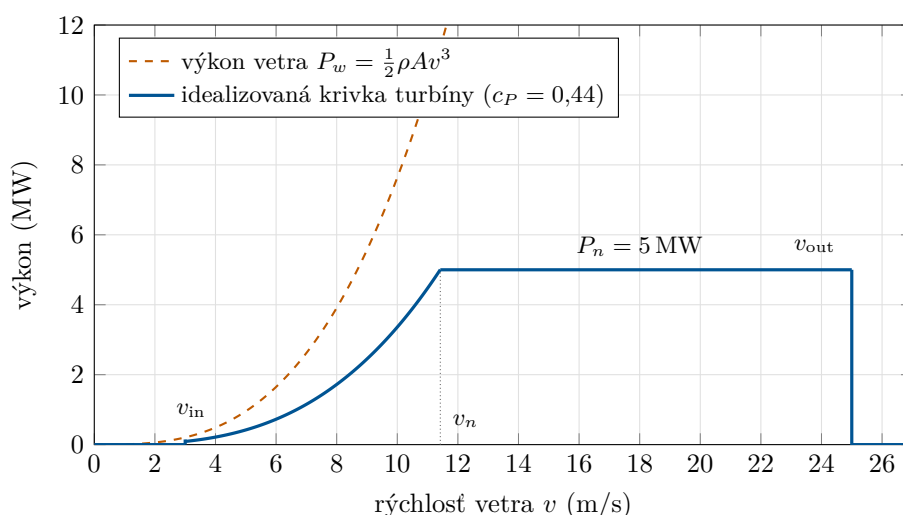
1.6.3 Výkonová krivka turbíny

Závislosť výkonu turbíny od rýchlosti vetra v osi rotora sa nazýva **výkonová krivka**. Charakterizujú ju tri rýchlosti [2, 3]:

- **zapínacia rýchlosť** v_{in} (angl. *cut-in*), od ktorej turbína začína dodávať výkon,
- **menovitá rýchlosť** v_n (angl. *rated*), pri ktorej turbína dosiahne menovitý výkon P_n ,
- **vypínacia rýchlosť** v_{out} (angl. *cut-out*), pri ktorej sa turbína z bezpečnostných dôvodov zastaví.

Pre referenčnú turbínu NREL 5 MW je $v_{in} = 3 \text{ m/s}$, $v_n = 11,4 \text{ m/s}$ a $v_{out} = 25 \text{ m/s}$ [6].

Medzi zapínacou a menovitou rýchlosťou sa turbína snaží odobrať čo najviac výkonu. Nad menovitou rýchlosťou je výkon obmedzený na P_n – natáčaním lopatiek alebo stallom – aby neboli preťažené generátor, hnacie ústrojenstvo a konštrukcia. Na obr. 1.11 je *idealizovaná* výkonová krivka, ktorá predpokladá konštantný súčiniteľ výkonu $c_P = 0,44$ (čl. 1.5.2) až po menovitý výkon. Skutočná krivka sa od nej líši najmä v oblasti prechodu do menovitého výkonu, pretože c_P nie je konštantný.



Obr. 1.11. Výkon vetra prechádzajúceho plochou rotora s priemerom 126 m a idealizovaná výkonová krivka turbíny s parametrami referenčnej turbíny NREL 5 MW [6]. Konštantný c_P je zjednodušujúci predpoklad.

Príklad 1.6: Ťah rotora

Odhadnite osoú silu na rotor s priemerom 126 m pri rýchlosti vetra $11,4 \text{ m/s}$, ak je súčiniteľ ťahu $c_T = 0,8$ (zadaná hodnota) a $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Riešenie. Zo vzťahu (1.12):

$$T = c_T \frac{1}{2} \rho A v^2 = 0,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 12\,469 \cdot 11,4^2 \approx 794 \cdot 10^3 \text{ N} \approx 0,79 \text{ MN}.$$

Táto sila pôsobí vo výške osi rotora a vyvoláva v päte veže ohybový moment, ktorý je jedným z hlavných návrhových zatažení veže a základu (kap. 10).

1.7 Prehľad metód aerodynamického výpočtu

Metódy výpočtu aerodynamiky rotora sa líšia mierou zjednodušenia a výpočtovou náročnosťou [1, 2]. V učebnici postupujeme od najjednoduchších k zložitejším:

1. **Hybnostná teória akčného disku** nahrádza rotor nekonečne tenkým diskom, na ktorom sa skokovo mení tlak. Nevie nič o tvare lopatiek, ale určuje teoretické hranice – napríklad maximálny súčiniteľ výkonu (kap. 5 and 6).
2. **Metóda prvkov lopatky** (BEM) spája hybnostnú teóriu s výpočtom síl na jednotlivé

prierezy lopatky pomocou charakteristík profilov. Je rýchla a po doplnení korekcií dostatočne presná na návrh aj výpočet zaťaženia; preto je v praxi najrozšírenejšia (kap. 7 to 9).

3. **Vírové metódy** modelujú lopatky a úplav sústavou vírov a výsledné rýchlosti počítajú z Biotovho–Savartovho zákona (kap. 12).
4. **Výpočtová dynamika tekutín** (CFD) rieši Navierove–Stokesove rovnice numericky. Lopatky môžu byť modelované presnou geometriou alebo zjednodušene ako akčný disk či akčná čiara v prúdovom poli (kap. 12).

Všetky tieto metódy potrebujú ako vstup charakteristiku vetra, ktorému je turbína vystavená. Preto ďalšiu kapitolu venujeme vetru ako zdroju energie.

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Moderné veterné turbíny sú prevažne trojlopatkové náveterné turbíny s vodorovnou osou, ktoré využívajú vztlakový princíp. Ich priamym predchodcom bola dánska turbína Gedser z roku 1957.
- Idealizované odporové zariadenie dosahuje najviac $c_P = \frac{4}{27}c_D$ pri $u/v = 1/3$; vztlakové zariadenia môžu teoreticky dosiahnuť Betzov limit $16/27 \approx 0,593$.
- Výkon vetra prechádzajúceho plochou A je $P_w = \frac{1}{2}\rho A v^3$; rastie s tretou mocninou rýchlosti, úmerne ploche rotora a hustote vzduchu.
- Hustotu vzduchu určíme zo stavovej rovnice $\rho = p/(RT)$; v štandardnej atmosfére na hladine mora je $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$.
- Rotor charakterizujú bezrozmerné veličiny c_P , c_T , c_Q a rýchlobežnosť $\lambda = \Omega R/v_\infty$; platí $c_P = \lambda c_Q$.
- Výkonová krivka je určená zapínacou, menovitou a vypínacou rýchlosťou a menovitým výkonom.

Kontrolné otázky

1. Čím sa aerodynamika veternej turbíny líši od aerodynamiky krídla lietadla?
2. Ktoré znaky turbíny Gedser sa zachovali v moderných turbínach?
3. Aký je rozdiel medzi odporovým a vztlakovým zariadením? Prečo má odporové zariadenie principiálne nižší súčiniteľ výkonu?
4. Aké sú výhody a nevýhody turbín so zvislou osou v porovnaní s turbínami s vodorovnou osou?
5. Aký je rozdiel medzi náveterným a záveterným rotorom? Aký aerodynamický jav je spojený so záveterným rotorom?

6. Odvodte vzťah pre výkon vetra prechádzajúceho plochou A . Prečo turbína nemôže odobrať celý tento výkon?
7. Prečo nestačí na odhad výkonu v lokalite poznať priemernú rýchlosť vetra?
8. Ako sa mení hustota vzduchu s nadmorskou výškou a s teplotou?
9. Definujte súčiniteľ výkonu a rýchlobežnosť. Aký je medzi nimi vzťah pre daný rotor?
10. Aký je rozdiel medzi aerodynamickým a celkovým súčiniteľom výkonu?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Úloha 1.1. Vypočítajte výkon vetra prechádzajúceho plochou rotora s priemerom 80 m pri rýchlosti vetra 8 m/s. Aký výkon odoberá rotor, ak je jeho súčiniteľ výkonu 0,40?

(Výsledok: $A = 5027 \text{ m}^2$, $P_w \approx 1,58 \text{ MW}$, $P \approx 0,63 \text{ MW}$)

Úloha 1.2. Priemerná rýchlosť vetra v lokalite A je 6 m/s, v lokalite B 7,5 m/s. Koľkokrát je výkonová hustota vetra v lokalite B väčšia? (Pri výpočte uvažujte, že rýchlosť vetra je konštantná; v kap. 2 ukážeme, prečo je to zjednodušenie.)

(Výsledok: $(7,5/6)^3 \approx 1,95$)

Úloha 1.3. Vypočítajte teplotu, tlak a hustotu vzduchu v štandardnej atmosfére vo výške 1500 m nad morom. O koľko percent je výkon vetra pri rovnakej rýchlosti menší ako na hladine mora?

(Výsledok: $T = 278,4 \text{ K}$, $p \approx 84\,560 \text{ Pa}$, $\rho \approx 1,058 \text{ kg/m}^3$, asi o 13,6 %)

Úloha 1.4. Rotor s priemerom 100 m sa otáča 15 min^{-1} pri rýchlosti vetra 10 m/s. Určte obvodovú rýchlosť konca lopatky a rýchlobežnosť.

(Výsledok: $\Omega R \approx 78,5 \text{ m/s}$, $\lambda \approx 7,85$)

Úloha 1.5. Referenčná turbína IEA 15 MW má priemer rotora 240 m [7]. Aké otáčky (v min^{-1}) by musel mať rotor, aby pri rýchlosti vetra 8 m/s pracoval pri rýchlobežnosti $\lambda = 8$? Aký je výkon vetra prechádzajúceho plochou rotora pri rýchlosti 10 m/s?

(Výsledok: $\Omega = 0,533 \text{ rad/s}$, $n \approx 5,09 \text{ min}^{-1}$; $P_w \approx 27,7 \text{ MW}$)

Úloha 1.6. Turbína s priemerom rotora 126 m pracuje pri rýchlosti vetra 8 m/s so súčiniteľom výkonu 0,45 a rýchlobežnosťou $\lambda = 7$. Vypočítajte výkon rotora a súčiniteľ krútiaceho momentu.

(Výsledok: $P \approx 1,76 \text{ MW}$, $c_Q \approx 0,064$)

Úloha 1.7. Pre idealizované odporové zariadenie podľa obr. 1.3 odvodte vzťah (1.3). Pre $c_D = 2,0$ vypočítajte c_P pri $u/v = 0,2$, $1/3$ a $0,5$ a výsledok porovnajte s obr. 1.5.

(Výsledok: $c_P = 0,256$; $0,296$; $0,250$)

Úloha 1.8. Pomocou vzťahov pre štandardnú atmosféru určte, ako sa zmení výkon vetra pri rýchlosti 10 m/s a priemere rotora 126 m, ak turbína stojí vo výške 1000 m nad morom namiesto na hladine mora. Výsledok vyjadrite v kilowattoch aj v percentách.

(Výsledok: $\rho/\rho_0 = 0,907$; pokles z 7637 kW na približne 6930 kW, t. j. o 9,3 %)

Kapitola 2

Vietor ako zdroj energie

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- vysvetliť, ako vzniká vietor, a vypočítať geostrofický vietor,
- opísať časovú premenlivosť vetra a význam desaťminútových priemerov,
- opísať štruktúru atmosférickej medznej vrstvy a vplyv stability atmosféry,
- prepočítať rýchlosť vetra na inú výšku pomocou logaritmického a mocninového zákona,
- definovať intenzitu turbulencie a použiť model normálnej turbulencie podľa IEC 61400-1,
- opísať rozdelenie rýchlostí vetra Weibullovým a Rayleighovým rozdelením a vypočítať strednú výkonovú hustotu vetra,
- odhadnúť ročnú výrobu energie a súčiniteľ využitia turbíny,
- zaradiť turbínu do triedy podľa IEC 61400-1.

V kap. 1 sme odvodili, že výkon vetra rastie s treťou mocninou rýchlosti. Vietor však nie je ustálený prúd s jednou rýchlosťou: mení sa s výškou nad terénom, v čase od sekúnd po roky a z miesta na miesto. Pre aerodynamiku turbíny sú tieto zmeny dôležité z dvoch dôvodov. Určujú, koľko energie môže turbína v lokalite vyrobiť, a spôsobujú premenlivé zaťaženie lopatiek a celej konštrukcie. V tejto kapitole opíšeme vietor v rozsahu, ktorý budeme potrebovať v ďalšom texte. Podrobnejší výklad meteorológie vetra pre veternú energetiku nájde čitateľ v [10], fyziku medznej vrstvy v [11].

2.1 Vznik vetra

2.1.1 Globálna cirkulácia

Pôvodným zdrojom energie vetra je slnečné žiarenie. Zemský povrch a atmosféra sa ohrievajú nerovnomerne: v okolí rovníka dopadá na jednotku plochy viac žiarenia ako pri pólach, pevnina sa ohrieva a ochladzuje rýchlejšie ako more a rôzne povrchy pohlcujú žiarenie rôzne. Rozdiely teploty vyvolávajú rozdiely hustoty a tlaku vzduchu, a tie uvádzajú vzduch do po-

hybu [3, 10]. Vietor je teda pohyb vzduchu, ktorým atmosféra vyrovnáva tlakové rozdiely vznikajúce z nerovnomerného ohrevu.

Na pohyb vzduchu v atmosfére pôsobia najmä tieto sily [10, 11]:

- **sila tlakového gradientu**, ktorá smeruje od vyššieho tlaku k nižšiemu a je hnacou silou vetra,
- **Coriolisova sila**, zdanlivá sila spôsobená rotáciou Zeme, ktorá stáča pohybujúci sa vzduch na severnej pologuli doprava a na južnej doľava,
- **sila trenia**, ktorou pôsobí zemský povrch na prúdiaci vzduch; jej vplyv s výškou klesá,
- **odstredivá sila** pri pohybe po zakrivenej dráhe (okolo tlakových níží a výší).

2.1.2 Geostrofický vietor

Vo väčšej výške nad terénom, kde je trenie zanedbateľné, a pri priamočiarych izobarách sa ustáli rovnováha medzi silou tlakového gradientu a Coriolisovou silou. Vzduch potom prúdi rovnobežne s izobarami a tento vietor nazývame **geostrofický** [11]. Coriolisova sila na jednotku hmotnosti vzduchu pohybujúceho sa vodorovnou rýchlosťou v má veľkosť $f v$, kde

$$f = 2 \Omega_Z \sin \varphi \quad (2.1)$$

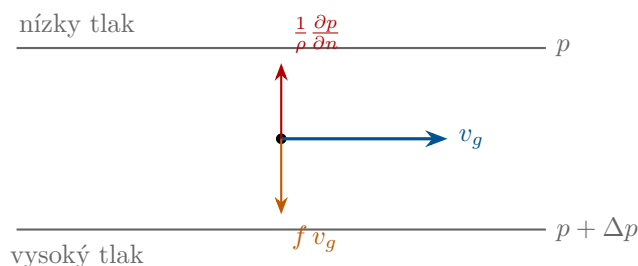
je Coriolisov parameter, $\Omega_Z = 7,292 \cdot 10^{-5}$ rad/s uhlová rýchlosť rotácie Zeme a φ zemepisná šírka. Z rovnováhy síl na jednotku hmotnosti

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = f v_g$$

dostaneme rýchlosť geostrofického vetra

$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (2.2)$$

kde $\partial p / \partial n$ je tlakový gradient kolmo na izobary. Pri rovníku je $f \rightarrow 0$ a geostrofická rovnováha neplatí.



Obr. 2.1. Rovnováha síl pri geostrofickom vetre na severnej pologuli (schematicky): sila tlakového gradientu smeruje k nižšiemu tlaku, Coriolisova sila je kolmá na smer pohybu a vietor prúdi pozdĺž izobár.

Príklad 2.1: Geostrofický vietor

Určte rýchlosť geostrofického vetra na zemepisnej šírke Košíc ($\varphi \approx 48,7^\circ$), ak sa tlak mení o 1 hPa na vzdialenosti 100 km kolmo na izobary. Hustota vzduchu $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$.

Riešenie. Coriolisov parameter podľa (2.1):

$$f = 2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot \sin 48,7^\circ = 1,096 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

Tlakový gradient: $\partial p / \partial n = 100 \text{ Pa} / 100\,000 \text{ m} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa/m}$. Podľa (2.2):

$$v_g = \frac{10^{-3}}{1,2 \cdot 1,096 \cdot 10^{-4}} \approx 7,6 \text{ m/s}.$$

Pri zemskom povrchu sa k tejto rovnováhe pridáva trenie. Vietor je slabší a stáča sa od smeru izobár k nižšiemu tlaku. Prechod od povrchu, kde je rýchlosť nulová, ku geostrofickému vetru sa odohráva v *atmosférickej medznej vrstve*, ktorej sa venuje čl. 2.3.

2.1.3 Miestne vplyvy

Na veľkoplošné prúdenie sa nakladajú miestne vetry, ktoré vznikajú z miestnych rozdielov teploty a z tvaru terénu – napr. pobrežná cirkulácia medzi morom a pevninou alebo horské a údolné vetry. Terén ovplyvňuje prúdenie aj mechanicky: nad zaobleným kopcom sa prúd zrýchľuje, za ostrými hranami a prekážkami vznikajú oblasti spomaleného a vírivého prúdenia [3, 10]. Tieto vplyvy sú dôvodom, prečo sa veterné pomery v konkrétnej lokalite musia merať alebo modelovať a nedajú sa jednoducho prevziať z blízkej meteorologickej stanice.

2.2 Časová premenlivosť vetra

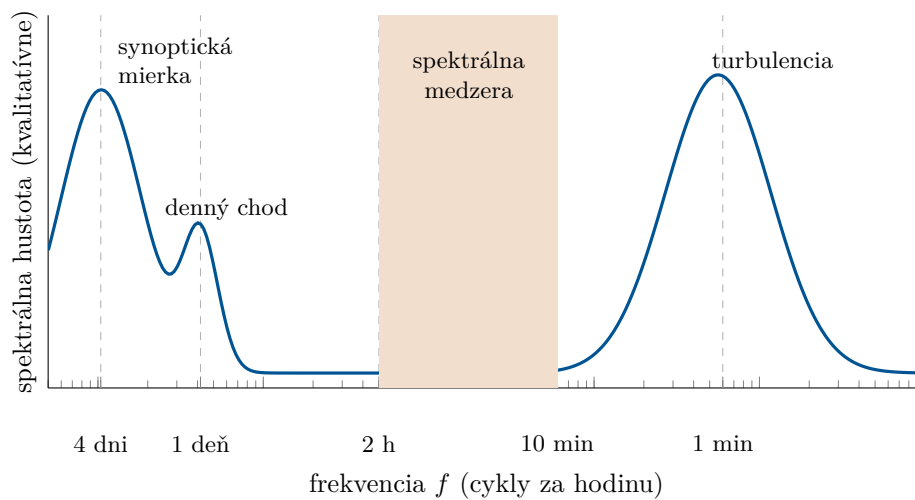
Rýchlosť vetra sa mení v širokom rozsahu časových mierok: od zlomkov sekundy (turbulencia) cez denný chod až po sezónne a medzročné zmeny. Klasickým opisom je spektrum vodorovnej rýchlosti vetra, ktoré zostavil Van der Hoven z meraní v Brookhavene v USA [12]. Spektrum ukazuje, ako je rozptyl rýchlosti vetra rozdelený podľa frekvencií. Má výrazné maximá pri periódach približne štyroch dní (prechod tlakových útvarov – tzv. synoptická mierka), pri perióde jedného dňa (denný chod) a v oblasti periód kratších ako približne desať minút (turbulencia). Medzi periódami približne desať minút a dve hodiny obsahuje spektrum veľmi málo energie; táto oblasť sa nazýva **spektrálna medzera** (angl. *spectral gap*) [12, 13].

Kvalitatívny tvar spektra je na obr. 2.2.

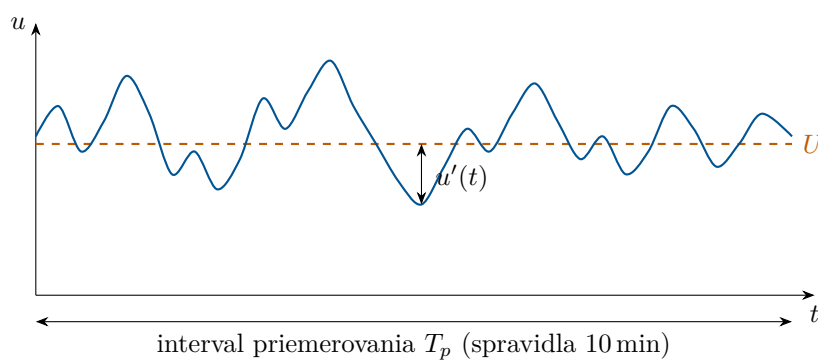
Spektrálna medzera má veľký praktický význam. Umožňuje rozdeliť okamžitú rýchlosť vetra $u(t)$ na *strednú hodnotu* U , ktorá sa počas krátkeho intervalu (spravidla 10 min) takmer nemení, a *turbulentnú fluktuáciu* $u'(t)$ so strednou hodnotou nula (obr. 2.3):

$$u(t) = U + u'(t), \quad U = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} u(t) dt, \quad \overline{u'} = 0, \quad (2.3)$$

kde T_p je dĺžka intervalu priemerovania. Pomalé zmeny (hodiny až roky) potom opisujeme postupnosťou desaťminútových priemerov a ich štatistickým rozdelením (čl. 2.5), rýchle zmeny štatistikou turbulencie (čl. 2.4). Desaťminútový interval priemerovania používa aj norma IEC 61400-1 [14].



Obr. 2.2. Kvalitatívny tvar spektra vodorovnej rýchlosti vetra podľa Van der Hovena [12], pozri aj [13, obr. 2.1]. Krivka je schematická a znázorňuje iba polohu maxím a spektrálnej medzery.



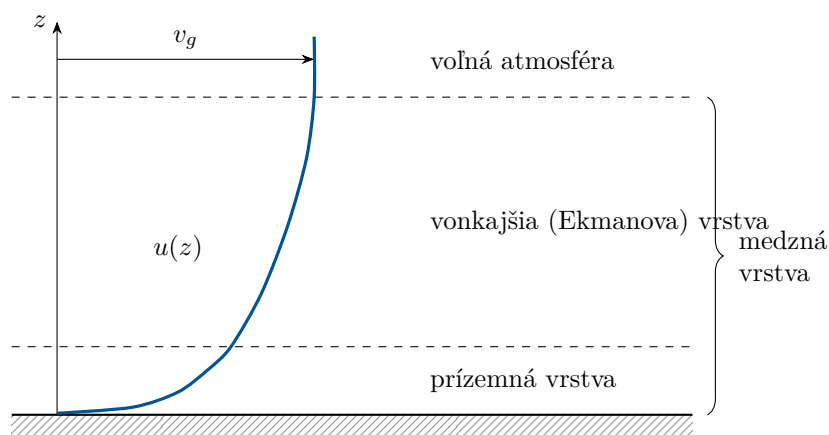
Obr. 2.3. Rozklad okamžitej rýchlosti vetra na strednú hodnotu a turbulentnú fluktuáciu (schematicky, priebeh nepredstavuje namerané údaje).

Z hľadiska výroby energie sú dôležité aj dlhodobé zmeny. Stredná ročná rýchlosť vetra sa v jednotlivých rokoch líši, preto sa dlhodobý odhad výroby v lokalite opiera o viacročné údaje, prípadne o koreláciu krátkodobého merania v lokalite s dlhodobými údajmi referenčnej stanice [2, 3].

2.3 Atmosférická medzná vrstva

2.3.1 Štruktúra medznej vrstvy

Atmosférická medzná vrstva je najnižšia časť atmosféry, ktorá je priamo ovplyvnená zemským povrchom – trením, prenosom tepla a prekážkami [11]. Jej hrúbka sa mení podľa počasia a dennej doby, od stoviek metrov po niekoľko kilometrov [10, 11]. Nad ňou je voľná atmosféra, kde vietor približne zodpovedá geostrofickému vetru. Schematicky ju znázorňuje obr. 2.4.



Obr. 2.4. Štruktúra atmosférickej medznej vrstvy a priebeh strednej rýchlosti vetra s výškou (schematicky, mierka nie je dodržaná).

Najnižšiu časť medznej vrstvy tvorí **prízemná vrstva** (angl. *surface layer*), v ktorej sú turbulentné toky hybnosti a tepla s výškou približne konštantné a vplyv Coriolisovej sily možno zanedbať. Jej hrúbka sa zvyčajne uvádza ako približne desatina hrúbky medznej vrstvy [11]. Nad ňou sa v *Ekmanovej vrstve* vietor postupne stáča a zrýchľuje ku geostrofickému vetru. Rotory veľkých moderných turbín siahajú do výšok nad 150 m (referenčná turbína IEA 15 MW má os rotora vo výške 150 m a polomer rotora 120 m [7]), takže často zasahujú aj nad prízemnú vrstvu, kde jednoduché vzťahy uvedené nižšie platia už len približne [10].

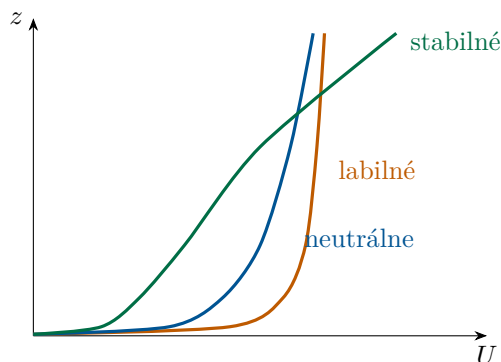
2.3.2 Stabilita atmosféry

Vertikálny pohyb vzduchu v medznej vrstve závisí od rozloženia teploty s výškou, ktoré opisujeme **stabilitou atmosféry** [10, 11]:

- *Labilné (nestabilné) zvrstvenie* vzniká najmä cez deň pri ohrievaní povrchu. Ohriaty vzduch stúpa, turbulentné premiešavanie je intenzívne, rýchlosť vetra sa s výškou mení málo a turbulencia je veľká.
- *Neutrálne zvrstvenie* je typické pre silný vietor a zamračenú oblohu. Turbulencia je vyvolaná najmä mechanicky trením o povrch.

- *Stabilné zvrstvenie* vzniká najmä v noci pri ochladzovaní povrchu. Vertikálne premiešavanie je potlačené, turbulencia je malá a rýchlosť vetra sa s výškou mení výrazne.

Vzťahy pre rýchlostný profil, ktoré odvodíme v ďalšom texte, platia pre neutrálne zvrstvenie. Kvalitatívny rozdiel rýchlostných profilov pri rôznej stabilite ukazuje obr. 2.5.



Obr. 2.5. Kvalitatívny tvar profilu strednej rýchlosti vetra pri labilnom, neutrálnom a stabilnom zvrstvení atmosféry (schematicky): pri labilnom zvrstvení je profil vplyvom premiešavania plnší, pri stabilnom sa rýchlosť s výškou mení výraznejšie [10, 11].

Pri iných stabilitách sa používajú korekcie, ktorých výklad presahuje rámec tejto učebnice [10, 11].

2.3.3 Logaritmickej rýchlostný profil

V prízemnej vrstve pri neutrálnom zvrstvení je jediným parametrom turbulentného prúdenia **trecia rýchlosť** u_* , definovaná pomocou tangenciálneho napätia na povrchu τ_0 ako $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$. Jedinou dĺžkovou mierkou, ktorá v prízemnej vrstve vystupuje, je výška nad povrchom z . Rozmerová analýza preto vedie k tomu, že gradient strednej rýchlosti je

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z}, \quad (2.4)$$

kde $\kappa \approx 0,4$ je von Kármánova konštanta [11]. Integráciou dostaneme **logaritmickej zákon**

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (2.5)$$

kde integračná konštanta z_0 je **parameter drsnosti povrchu** (angl. *roughness length*) – výška, v ktorej by logaritmickej profil dosiahol nulovú rýchlosť. Parameter z_0 nie je výška prekážok, ale charakteristika povrchu určená z meraní. Hodnoty používané v Európskom veternom atlase sú v tab. 2.1.

V praxi zvyčajne nepoznáme treciu rýchlosť, ale rýchlosť $U(z_r)$ nameranú v referenčnej výške z_r . Podielom (2.5) pre výšky z a z_r trecia rýchlosť vypadne:

$$\frac{U(z)}{U(z_r)} = \frac{\ln(z/z_0)}{\ln(z_r/z_0)}. \quad (2.6)$$

Tabuľka 2.1. Triedy drsnosti terénu podľa Európskeho veterného atlasu [15].

Trieda	z_0 (m)	Charakteristika terénu
0	0,0002	vodné plochy (more, fjordy, jazerá)
1	0,03	otvorená krajina s malým počtom vetrolamov, rovinatá alebo mierne zvlnená
2	0,10	poľnohospodárska krajina s vetrolamami vzdialenými od seba viac ako 1000 m a s roztrúsenou zástavbou
3	0,40	mestská zástavba, lesy, poľnohospodárska krajina s mnohými vetrolamami vzdialenými od seba niekoľko sto metrov

2.3.4 Mocninový zákon

V inžinierskej praxi sa často používa jednoduchší empirický **mocninový zákon**

$$\frac{U(z)}{U(z_r)} = \left(\frac{z}{z_r} \right)^\alpha \quad (2.7)$$

kde exponent α závisí od drsnosti terénu, stability atmosféry a rozsahu výšok, pre ktorý sa zákon použije [2, 3]. Norma IEC 61400-1 v modeli normálneho rýchlostného profilu (angl. *normal wind profile model*) predpisuje pre štandardné triedy turbín hodnotu $\alpha = 0,2$ [14]. Mocninový zákon nemá fyzikálne odvodenie ako logaritmický, ale je jednoduchý a v obmedzenom rozsahu výšok ho možno prispôbiť nameraným údajom. Ak poznáme stredné rýchlosti v dvoch výškach z_1 a z_2 , exponent určíme z (2.7) ako

$$\alpha = \frac{\ln(U(z_2)/U(z_1))}{\ln(z_2/z_1)}. \quad (2.8)$$

Príklad 2.2: Prepočet rýchlosti vetra na výšku osi rotora

Na meteorologickom stožiaru v otvorenej krajine ($z_0 = 0,03$ m, trieda drsnosti 1) bola vo výške 10 m nameraná stredná rýchlosť vetra 5 m/s. Odhadnite strednú rýchlosť vo výškach 90 m a 150 m (výšky osi rotora referenčných turbín [6, 7]) podľa logaritmického zákona a podľa mocninového zákona s $\alpha = 0,2$.

Riešenie. Logaritmický zákon (2.6):

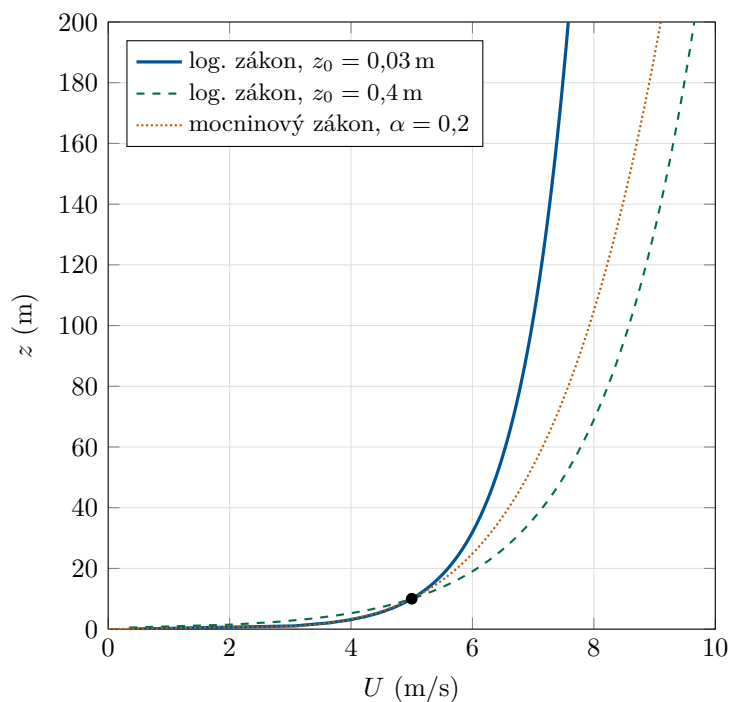
$$U(90) = 5 \frac{\ln(90/0,03)}{\ln(10/0,03)} = 5 \frac{8,006}{5,809} = 6,89 \text{ m/s}, \quad U(150) = 5 \frac{\ln 5000}{\ln 333,3} = 7,33 \text{ m/s}.$$

Mocninový zákon (2.7):

$$U(90) = 5 \cdot 9^{0,2} = 7,76 \text{ m/s}, \quad U(150) = 5 \cdot 15^{0,2} = 8,59 \text{ m/s}.$$

Výsledky sa líšia o viac ako 10 %, čo vo výkone vetra znamená rozdiel približne $(7,76/6,89)^3 \approx 1,43$. Exponent $\alpha = 0,2$ je návrhová hodnota normy, nie vlastnosť tejto lokality; logaritmický profil s $z_0 = 0,03$ m zodpovedá pri prepočte z 10 m na 90 m exponentu približne 0,15. Príklad ukazuje, prečo sa rýchlosť vetra meria čo najbližšie k výške osi rotora: extrapolácia z malej výšky je zdrojom veľkej neistoty.

Z obr. 2.6 vidno aj vplyv drsnosti: pri rovnakej rýchlosti v 10 m rastie rýchlosť s výškou nad drsným terénom rýchlejšie. Pre rovnakú rýchlosť v *hornej* časti medznej vrstvy to naopak znamená, že nad drsným terénom je vietor pri zemi slabší.



Obr. 2.6. Rýchlostné profily prepočítané z rýchlosti 5 m/s vo výške 10 m (bod) pre dva parametre drsnosti a mocninový zákon.

2.3.5 Strih vetra v ploche rotora

Zmena strednej rýchlosti s výškou sa nazýva **strih vetra** (angl. *wind shear*). Rotor veľkej turbíny preto nie je obtekaný rovnomerným prúdom: lopatka v hornej polohe sa pohybuje v rýchlejšom prúde ako v dolnej. Rýchlosť obtekania a sily na lopatku sa počas otáčky periodicky menia, čo spôsobuje cyklické zaťaženie s frekvenciou otáčania rotora (kap. 10).

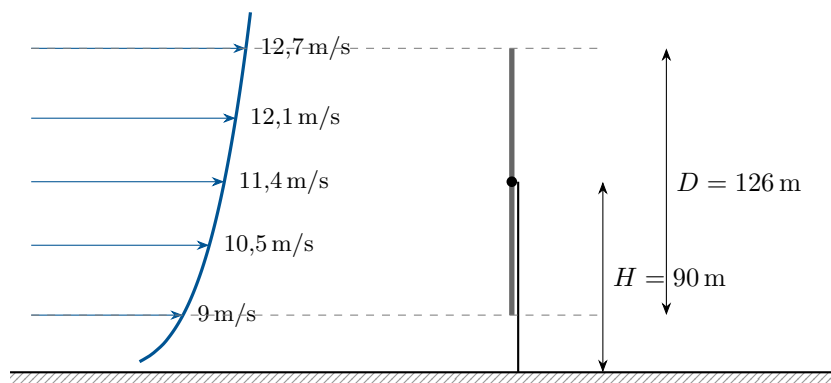
Príklad 2.3: Strih vetra v ploche rotora

Referenčná turbína NREL 5 MW má výšku osi rotora 90 m a priemer rotora 126 m [6]. Pri rýchlosti 11,4 m/s v osi rotora určte podľa normálneho rýchlostného profilu ($\alpha = 0,2$) rýchlosť vetra v najnižšom a najvyššom bode opisovanom koncom lopatky. Sklon osi rotora zanedbajte.

Riešenie. Koniec lopatky sa pohybuje medzi výškami $90 - 63 = 27$ m a $90 + 63 = 153$ m:

$$U(27) = 11,4 \left(\frac{27}{90} \right)^{0,2} = 8,96 \text{ m/s}, \quad U(153) = 11,4 \left(\frac{153}{90} \right)^{0,2} = 12,68 \text{ m/s}.$$

Pomer výkonových hustôt vetra v hornom a dolnom bode je $(12,68/8,96)^3 \approx 2,8$. Vietor v ploche rotora je teda výrazne nerovnomerný.



Obr. 2.7. Rýchlosť vetra v ploche rotora referenčnej turbíny NREL 5 MW pri 11,4 m/s v osi rotora podľa mocninového zákona s $\alpha = 0,2$ (čl. 2.3.5).

2.4 Turbulencia

2.4.1 Intenzita turbulencie

Turbulentné fluktuácie rýchlosti $u'(t)$ vznikajú mechanicky trením o povrch a prekážky a termicky pri labilnom zvrstvení. Ich veľkosť v intervale priemerovania opisuje smerodajná odchýlka pozdĺžnej zložky rýchlosti

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} u'^2(t) dt} \quad (2.9)$$

a bezrozmerná **intenzita turbulencie**

$$I = \frac{\sigma_u}{U}. \quad (2.10)$$

Intenzita turbulencie rastie s drsnosťou terénu a klesá s výškou nad terénom; závisí aj od stability atmosféry [2, 10]. Turbulencia je z hľadiska turbíny dôležitá najmä pre únavové zaťaženie konštrukcie (kap. 10); na strednú výrobu energie má menší vplyv.

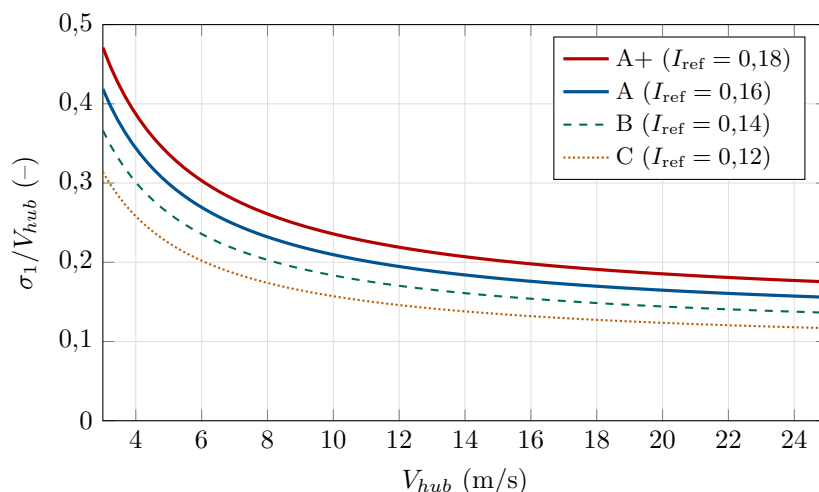
Okrem pozdĺžnej zložky má turbulencia aj priečnu a zvislú zložku. Úplný opis turbulentného vetra – spektrá a priestorová korelácia fluktuácií – sa používa pri simulácii zaťaženia a vrátíme sa k nemu v kap. 10.

2.4.2 Model normálnej turbulencie podľa IEC 61400-1

Norma IEC 61400-1 zavádza pre návrh turbín **model normálnej turbulencie** (NTM). Reprezentatívna hodnota smerodajnej odchýlky pozdĺžnej zložky rýchlosti vo výške osi rotora je daná 90 % kvantilom a závisí od strednej rýchlosti vetra v osi rotora V_{hub} [14]:

$$\sigma_1 = I_{\text{ref}} (0,75 V_{hub} + b), \quad b = 5,6 \text{ m/s}, \quad (2.11)$$

kde I_{ref} je referenčná intenzita turbulencie (stredná hodnota intenzity turbulencie pri rýchlosti 15 m/s), určená kategóriou turbulencie turbíny (tab. 2.4). Intenzita turbulencie podľa modelu je σ_1/V_{hub} . Jej priebeh pre jednotlivé kategórie je na obr. 2.8: pri slabom vetre je intenzita turbulencie veľká, so zväčšujúcou sa rýchlosťou klesá.



Obr. 2.8. Intenzita turbulencie podľa modelu normálnej turbulencie (2.11) pre kategórie turbulencie normy IEC 61400-1 [14].

Príklad 2.4: Model normálnej turbulencie

Určte smerodajnú odchýlku a intenzitu turbulencie podľa modelu normálnej turbulencie pre turbínu kategórie turbulencie A pri strednej rýchlosti vetra v osi rotora 10 m/s a 15 m/s.

Riešenie. Pre kategóriu A je $I_{ref} = 0,16$. Podľa (2.11):

$$\sigma_1(10) = 0,16 (0,75 \cdot 10 + 5,6) = 2,10 \text{ m/s}, \quad I = 2,10/10 = 0,21,$$

$$\sigma_1(15) = 0,16 (0,75 \cdot 15 + 5,6) = 2,70 \text{ m/s}, \quad I = 2,70/15 = 0,18.$$

Pri 10 m/s teda turbína musí vydržať fluktuácie rýchlosti so smerodajnou odchýlkou približne 2 m/s.

2.5 Štatistické rozdelenie rýchlosti vetra

2.5.1 Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia

Ak zoradíme desaťminútové priemery rýchlosti vetra nameranej v lokalite počas dlhého obdobia (aspoň jedného roka) do tried šírky Δv (napr. 1 m/s), dostaneme histogram početností. Pri veľkom počte údajov ho možno aproximovať spojitou **hustotou pravdepodobnosti** $f(v)$, pre ktorú platí

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1. \quad (2.12)$$

Pravdepodobnosť, že rýchlosť vetra bude v intervale $\langle v_1, v_2 \rangle$, je

$$\Pr(v_1 \leq v \leq v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv = F(v_2) - F(v_1), \quad (2.13)$$

kde $F(v)$ je **distribučná funkcia**. Súčin tejto pravdepodobnosti a počtu hodín v roku (8760 h) je počet hodín, počas ktorých je rýchlosť vetra v danom intervale.

Stredná hodnota ľubovoľnej funkcie rýchlosti $g(v)$ je

$$\bar{g} = \int_0^{\infty} g(v) f(v) dv; \quad (2.14)$$

pre $g = v$ dostaneme strednú rýchlosť $\bar{v}$, pre $g = v^3$ strednú hodnotu tretej mocniny rýchlosti, ktorú potrebujeme na výpočet strednej výkonovej hustoty vetra.

2.5.2 Weibullovo rozdelenie

Rozdelenie rýchlostí vetra v mnohých lokalitách dobre opisuje dvojparametrické **Weibullovo rozdelenie** [2, 3, 15] s hustotou pravdepodobnosti

$$f(v) = \frac{k}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^k\right] \quad (2.15)$$

a distribučnou funkciou

$$F(v) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^k\right], \quad (2.16)$$

kde c (m/s) je **parameter mierky** a k (–) **parameter tvaru**. Čím je k väčšie, tým je rozdelenie užšie, t.j. rýchlosti vetra sú sústredené bližšie k strednej hodnote (obr. 2.9).

Momenty Weibullovoho rozdelenia vyjadríme pomocou funkcie gama $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Dosadením (2.15) do (2.14) a substitúciou $t = (v/c)^k$ dostaneme pre n -tý moment

$$\bar{v}^n = c^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right), \quad (2.17)$$

teda strednú rýchlosť a strednú hodnotu tretej mocniny rýchlosti

$$\bar{v} = c \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \bar{v}^3 = c^3 \Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right). \quad (2.18)$$

Stredná výkonová hustota vetra je potom

$$\overline{\left(\frac{P_w}{A}\right)} = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^3 = \frac{1}{2} \rho c^3 \Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right). \quad (2.19)$$

Vybrané hodnoty funkcie gama sú v tab. 2.2.

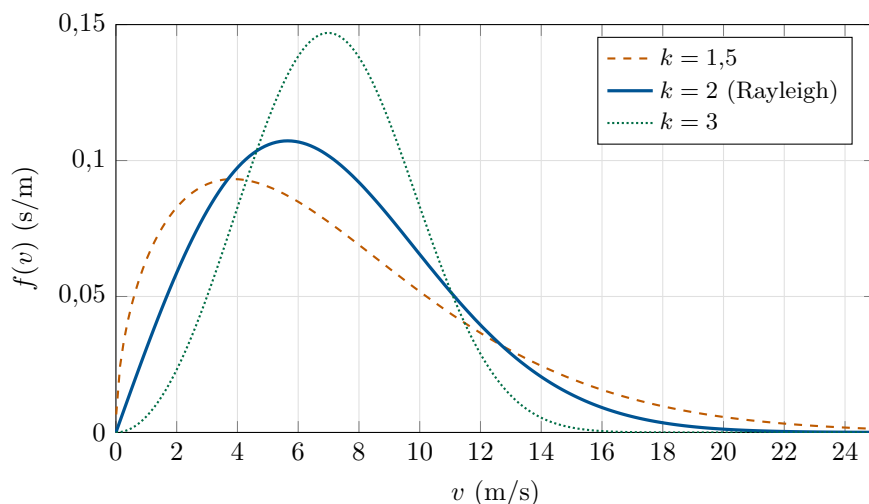
Tabuľka 2.2. Hodnoty funkcie gama potrebné pri práci s Weibullovým rozdelením.

k	$\Gamma(1 + 1/k)$	$\Gamma(1 + 3/k)$	$\bar{v}^3/\bar{v}^3$
1,5	0,9027	2,0000	2,719
2,0	0,8862	1,3293	1,910
2,5	0,8873	1,1018	1,577
3,0	0,8930	1,0000	1,404

2.5.3 Rayleighovo rozdelenie

Pre $k = 2$ prechádza Weibullovo rozdelenie na **Rayleighovo rozdelenie**. Keďže $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, platí $c = 2\bar{v}/\sqrt{\pi}$ a rozdelenie je určené iba strednou rýchlosťou vetra:

$$F(v) = 1 - \exp\left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2\right], \quad f(v) = \frac{\pi}{2} \frac{v}{\bar{v}^2} \exp\left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2\right]. \quad (2.20)$$



Obr. 2.9. Hustota pravdepodobnosti Weibullovoho rozdelenia pre parameter mierky $c = 8 \text{ m/s}$ a tri hodnoty parametra tvaru.

Rayleighovo rozdelenie s priemernou rýchlosťou V_{ave} predpokladá norma IEC 61400-1 pri výpočte zatažení pre štandardné triedy turbín [14]. Je vhodné aj na prvý odhad, ak z lokality poznáme iba strednú rýchlosť vetra.

2.5.4 Vplyv tvaru rozdelenia na výkonovú hustotu

Pomer $\overline{v^3}/\bar{v}^3$ v tab. 2.2 ukazuje, koľkokrát je skutočná stredná výkonová hustota vetra väčšia ako výkonová hustota vypočítaná zo strednej rýchlosti. Pre Rayleighovo rozdelenie je

$$\frac{\overline{v^3}}{\bar{v}^3} = \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3/2)^3} = \frac{6}{\pi} \approx 1,91.$$

Výpočet výkonu vetra zo strednej rýchlosti by teda podhodnotil strednú výkonovú hustotu takmer na polovicu. To je kvantitatívne vyjadrenie poznámky z čl. 1.5.

Príklad 2.5: Stredná výkonová hustota vetra

V lokalite je rozdelenie rýchlosti vetra vo výške osi rotora opísané Weibullovým rozdelením s $c = 8 \text{ m/s}$ a $k = 2$. Vypočítajte strednú rýchlosť, strednú výkonovú hustotu vetra ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$) a porovnajte ju s výkonovou hustotou vypočítanou zo strednej rýchlosti.

Riešenie. Podľa (2.18) a tab. 2.2:

$$\bar{v} = 8 \cdot 0,8862 = 7,09 \text{ m/s}, \quad \overline{v^3} = 8^3 \cdot 1,3293 = 680,6 \text{ m}^3/\text{s}^3.$$

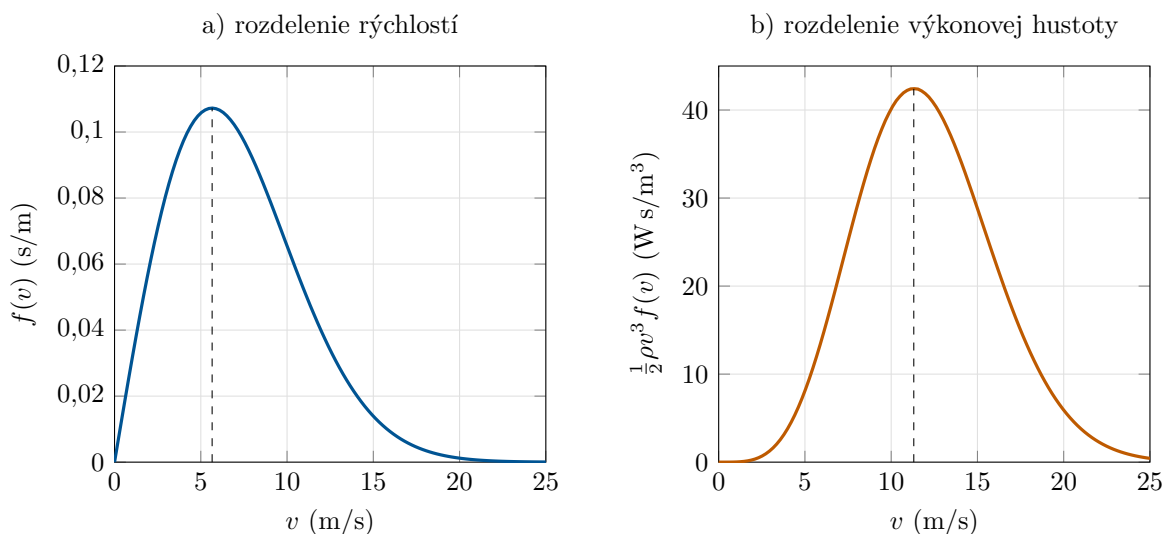
Stredná výkonová hustota:

$$\overline{P_w/A} = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 680,6 = 417 \text{ W/m}^2.$$

Zo strednej rýchlosti by sme dostali $\frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 7,09^3 = 218 \text{ W/m}^2$, teda $417/218 = 1,91$ -krát menej.

Rozdiel medzi rozdelením *rýchlostí* a rozdelením *energie* podľa rýchlostí je na obr. 2.10. Hustota pravdepodobnosti $f(v)$ z čl. 2.5.4 má maximum pri $v = c/\sqrt{2} \approx 5,7 \text{ m/s}$, kým súčin

$\frac{1}{2}\rho v^3 f(v)$, ktorý udáva, akou mierou prispievajú jednotlivé rýchlosti k strednej výkonovej hustote, má maximum pri $v = c\sqrt{2} \approx 11,3 \text{ m/s}$ (pre $k = 2$ to vyplýva z derivácie $v^4 e^{-(v/c)^2}$). Energia vetra je teda sústredená pri rýchlostiach výrazne vyšších, ako je najčastejšia rýchlosť.



Obr. 2.10. Weibullovo rozdelenie s $c = 8 \text{ m/s}$, $k = 2$: a) hustota pravdepodobnosti rýchlosti vetra, b) príspevok jednotlivých rýchlostí k strednej výkonovej hustote (plocha pod krivkou je 417 W/m^2 , čl. 2.5.4).

2.5.5 Určenie parametrov Weibullovo rozdelenia

Parametre c a k sa určujú z nameraných údajov bežnými štatistickými metódami odhadu parametrov, napr. metódou momentov alebo metódou maximálnej vierohodnosti. Jednoduchý empirický odhad, ktorý navrhli Justus a kol. [16], vychádza zo strednej hodnoty $\bar{v}$ a smerodajnej odchýlky σ_v súboru desaťminútových priemerov:

$$k \approx \left(\frac{\sigma_v}{\bar{v}} \right)^{-1,086}, \quad c = \frac{\bar{v}}{\Gamma(1 + 1/k)}. \quad (2.21)$$

Pozor na rozdiel medzi σ_v a σ_u : σ_v opisuje rozptyl desaťminútových priemerov počas dlhého obdobia, kým σ_u v (2.9) opisuje turbulentné fluktuácie v jednom desaťminútovom intervale.

Príklad 2.6: Odhad parametrov Weibullovo rozdelenia

Ročný súbor desaťminútových priemerov rýchlosti vetra má strednú hodnotu $7,0 \text{ m/s}$ a smerodajnú odchýlku $3,5 \text{ m/s}$. Odhadnite parametre Weibullovo rozdelenia podľa (2.21).

Riešenie.

$$k = \left(\frac{3,5}{7,0} \right)^{-1,086} = 0,5^{-1,086} = 2,12.$$

Funkcia gama: $\Gamma(1 + 1/2,12) = \Gamma(1,472) \approx 0,8857$, takže

$$c = \frac{7,0}{0,8857} = 7,90 \text{ m/s}.$$

2.6 Ročná výroba energie

Ak poznáme výkonovú krivku turbíny $P(v)$ (čl. 1.6.3) a rozdelenie rýchlosti vetra vo výške osi rotora $f(v)$, strednú hodnotu výkonu dostaneme podľa (2.14) a ročnú výrobu energie (angl. *annual energy production, AEP*) vynásobením počtom hodín v roku $T_r = 8760$ h:

$$E_r = T_r \int_{v_{\text{in}}}^{v_{\text{out}}} P(v) f(v) dv. \quad (2.22)$$

V praxi je výkonová krivka zadaná tabuľkou po triedach rýchlosti (napr. po 1 m/s alebo 0,5 m/s), preto sa integrál nahrádza súčtom cez triedy (**metóda tried**, angl. *method of bins*):

$$E_r \approx T_r \sum_i P(v_i) [F(v_i + \Delta v/2) - F(v_i - \Delta v/2)], \quad (2.23)$$

kde v_i je stred i -tej triedy. Pomer skutočne vyrobenej energie k energii, ktorú by turbína vyrobila pri trvalej prevádzke s menovitým výkonom, je **súčiniteľ využitia inštalovaného výkonu** (angl. *capacity factor*):

$$k_c = \frac{E_r}{P_n T_r}. \quad (2.24)$$

Príklad 2.7: Ročná výroba energie metódou tried

Odhadnite ročnú výrobu energie turbíny s idealizovanou výkonovou krivkou z obr. 1.11 ($D = 126$ m, $P_n = 5$ MW, $c_p = 0,44$, $v_{\text{in}} = 3$ m/s, $v_{\text{out}} = 25$ m/s, $\rho = 1,225$ kg/m³), ak je rozdelenie rýchlosti vetra v osi rotora Rayleighovo so strednou rýchlosťou 8,5 m/s. Použite triedy šírky 1 m/s.

Riešenie. Pre každú triedu vypočítame pravdepodobnosť podľa (2.20), počet hodín v roku, výkon turbíny v strede triedy a energiu. Výsledky sú v tab. 2.3 a na obr. 2.11. Napríklad pre triedu $v_i = 8$ m/s (od 7,5 m/s do 8,5 m/s):

$$F(8,5) - F(7,5) = e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{7,5}{8,5}\right)^2} - e^{-\frac{\pi}{4} \left(\frac{8,5}{8,5}\right)^2} = 0,5426 - 0,4559 \approx 0,0866,$$

čo zodpovedá $0,0866 \cdot 8760 = 759$ h. Výkon turbíny pri 8 m/s je $0,44 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 12\,469 \cdot 8^3 = 1721$ kW a energia v triede $1721 \cdot 759 = 1305$ MWh. Súčtom cez všetky triedy dostaneme

$$E_r \approx 20\,030 \text{ MWh} \approx 20,0 \text{ GWh}, \quad k_c = \frac{20\,030}{5 \cdot 8760} = 0,46.$$

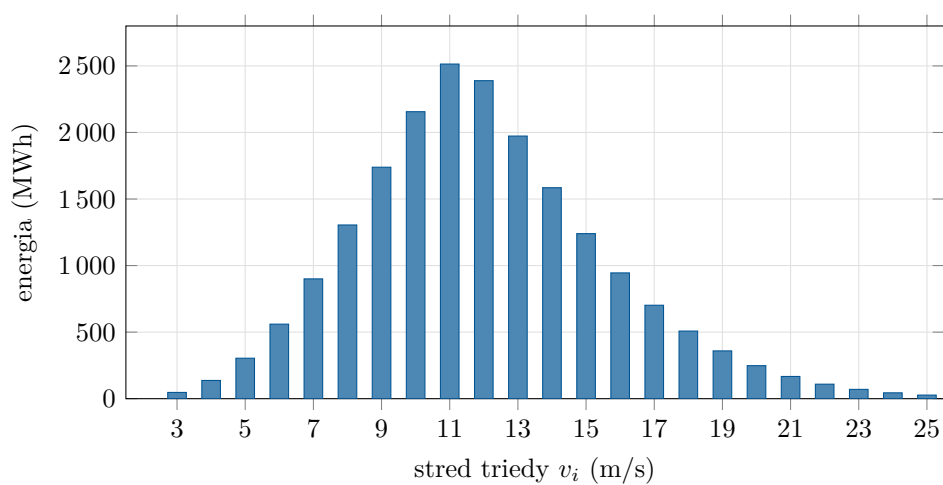
Presný výpočet integrálu (2.22) dáva 20 016 MWh, takže chyba metódy tried je tu menšia ako 0,1 %.

Výsledok je horným odhadom: idealizovaná výkonová krivka predpokladá konštantný c_p a výpočet nezahŕňa nedostupnosť turbíny, straty v úplave susedných turbín (kap. 12) ani elektrické straty.

Z obr. 2.11 je zrejmé, že najviac energie sa nevyrobí pri najčastejšej rýchlosti vetra (okolo 7 m/s), ale pri rýchlostiach blízkyh menovitej rýchlosti. Rýchlosti pod 5 m/s prispievajú k ročnej výrobe len málo, hoci sa vyskytujú často.

Tabuľka 2.3. Výpočet ročnej výroby energie metódou tried k čl. 2.6 (Rayleighovo rozdelenie, $\bar{v} = 8,5 \text{ m/s}$). Triedy pod 3 m/s a nad 25 m/s neprispievajú.

v_i (m/s)	pravdepodobnosť	hodiny (h)	$P(v_i)$ (kW)	energia (MWh)
3	0,0590	517	91	47
4	0,0729	639	215	137
5	0,0827	724	420	304
6	0,0880	771	726	560
7	0,0892	781	1153	900
8	0,0866	759	1721	1305
9	0,0810	710	2450	1739
10	0,0733	642	3360	2156
11	0,0642	562	4473	2514
12	0,0545	478	5000	2389
13	0,0450	395	5000	1973
14	0,0362	317	5000	1585
15	0,0283	248	5000	1240
16	0,0216	189	5000	945
17	0,0160	140	5000	702
18	0,0116	102	5000	508
19	0,0082	72	5000	359
20	0,0057	50	5000	248
21	0,0038	33	5000	167
22	0,0025	22	5000	109
23	0,0016	14	5000	70
24	0,0010	9	5000	44
25	0,0006	5	5000	27
Spolu				20 030



Obr. 2.11. Rozdelenie ročnej výroby energie podľa tried rýchlosti vetra k čl. 2.6.

2.7 Triedy veterných turbín podľa IEC 61400-1

Turbíny sa navrhujú pre typizované veterné podmienky, ktoré definuje norma IEC 61400-1 [14]. Trieda turbíny je určená dvoma znakmi: rímskou číslicou (trieda rýchlosti vetra I, II, III) a písmenom (kategória turbulencie A+, A, B, C). Základné parametre sú v tab. 2.4. Referenčná rýchlosť V_{ref} je referenčná extrémna desaťminútová stredná rýchlosť vetra s dobou opakovania 50 rokov vo výške osi rotora; stredná ročná rýchlosť vetra V_{ave} je pre štandardné triedy $0,2 V_{\text{ref}}$ [14]. Štvrté vydanie normy doplnilo kategóriu turbulencie A+ a možnosť tropickej triedy T so zvýšenou referenčnou rýchlosťou 57 m/s. Ak podmienky lokality nezodpovedajú žiadnej štandardnej triede, parametre si určí projektant ako triedu S.

Tabuľka 2.4. Základné parametre tried veterných turbín podľa IEC 61400-1 [14].

Trieda rýchlosti vetra		I	II	III
V_{ref} (m/s)		50	42,5	37,5
$V_{\text{ave}} = 0,2 V_{\text{ref}}$ (m/s)		10	8,5	7,5
A+	I_{ref} (-)		0,18	
A	I_{ref} (-)		0,16	
B	I_{ref} (-)		0,14	
C	I_{ref} (-)		0,12	

Napríklad referenčná turbína IEA 15 MW je navrhnutá pre triedu IB [7], t. j. pre $V_{\text{ref}} = 50$ m/s, strednú ročnú rýchlosť 10 m/s a $I_{\text{ref}} = 0,14$. Turbína nižšej triedy (III) je určená pre lokality so slabším vetrom; spravidla má pri rovnakom menovitom výkone väčší rotor, pretože extrémne zaťaženia, pre ktoré sa navrhuje, sú menšie.

Príklad 2.8: Doba prevádzky podľa Rayleighovho rozdelenia

Turbína triedy III pracuje v lokalite so strednou ročnou rýchlosťou vetra v osi rotora rovnou V_{ave} tejto triedy. Zapínacia rýchlosť je 3 m/s, vypínacia 25 m/s. Za predpokladu Rayleighovho rozdelenia určte, koľko hodín v roku je rýchlosť vetra v prevádzkovom rozsahu turbíny.

Riešenie. $V_{\text{ave}} = 0,2 \cdot 37,5 = 7,5$ m/s. Podľa (2.20):

$$F(3) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}(3/7,5)^2} = 0,1181, \quad F(25) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}(25/7,5)^2} = 0,99984.$$

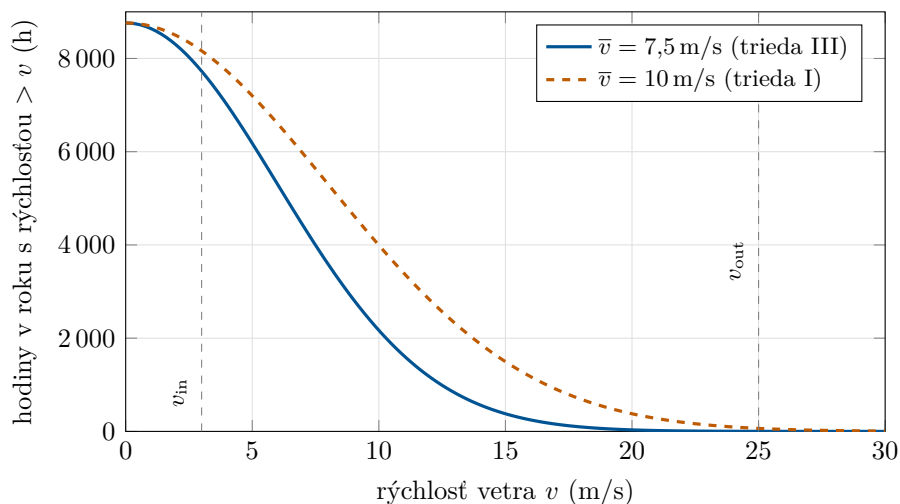
Pravdepodobnosť prevádzky je $0,99984 - 0,1181 = 0,8817$, teda približne $0,8817 \cdot 8760 \approx 7720$ h ročne. Počas zvyšných približne 1030 h je vietor slabší ako zapínacia rýchlosť; rýchlosť nad vypínacou rýchlosťou sa vyskytuje len výnimočne.

Výsledok príkladu možno odčítať aj z **čiar trvania rýchlosti vetra** na obr. 2.12, ktorá udáva počet hodín v roku, počas ktorých je rýchlosť vetra väčšia ako daná hodnota. Pre Rayleighovo rozdelenie je tento počet $T_r [1 - F(v)] = 8760 \exp[-\frac{\pi}{4}(v/\bar{v})^2]$.

2.8 Meranie vetra

Údaje o vetre v lokalite sa získavajú meraním, ktoré pri príprave projektu trvá spravidla aspoň jeden rok [2, 3]. Používajú sa najmä tieto prístroje [3, 10]:

- **Miskový anemometer** meria veľkosť vodorovnej rýchlosti z otáčok rotora s miskami,



Obr. 2.12. Čiara trvania rýchlosti vetra pre Rayleighovo rozdelenie so strednou rýchlosťou zodpovedajúcou triedam III a I podľa IEC 61400-1.

ktorý je poháňaný odporovou silou – ide o odporové zariadenie v zmysle čl. 1.3.2. Spolu so *smerovkou* je základným prístrojom meteorologických stožiarov.

- **Ultrazvukový (sonický) anemometer** určuje zložky rýchlosti z času šírenia zvukových impulzov medzi dvojicami snímačov. Nemá pohyblivé časti a umožňuje merať aj rýchle turbulentné fluktuácie a zvislú zložku rýchlosti.
- **Dialkové metódy** – lidar (využíva odraz laserového lúča od aerosólov) a sodar (využíva odraz zvuku) – merajú rýchlosť vetra zo zeme vo viacerých výškach, a to aj vo výškach, do ktorých by bolo stavanie stožiara nákladné.

Na meteorologickom stožari sa rýchlosť zvyčajne meria vo viacerých výškach, čo umožňuje určiť rýchlostný profil, napr. exponent mocninového zákona podľa (2.8). Namerané údaje sa spracúvajú do desaťminútových priemerov a smerodajných odchýlok, z ktorých sa určuje rozdelenie rýchlostí, intenzita turbulencie a ruža vetra (rozdelenie početnosti podľa smeru).

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Vietor vzniká z tlakových rozdielov spôsobených nerovnomerným ohrevom Zeme. Nad medznou vrstvou je približne geostrofický, $v_g = (1/\rho f) \partial p / \partial n$.
- Spektrálna medzera medzi periódami asi 10 min a 2 h umožňuje rozložiť rýchlosť na desaťminútový priemer U a turbulentnú fluktuáciu u' .
- V prízemnej vrstve pri neutrálnom zvrstvení platí logaritmický zákon $U = (u_*/\kappa) \ln(z/z_0)$; v praxi sa používa aj mocninový zákon, IEC 61400-1 predpisuje $\alpha = 0,2$.
- Intenzita turbulencie $I = \sigma_u/U$; podľa modelu normálnej turbulencie $\sigma_1 = I_{\text{ref}}(0,75V_{hub} + 5,6)$.

- Rozdelenie desaťminútových priemerov opisuje Weibullovo rozdelenie; pre $k = 2$ Rayleighovo. Stredná výkonová hustota je $\frac{1}{2}\rho c^3\Gamma(1 + 3/k)$, pre Rayleighovo rozdelenie $6/\pi$ -krát väčšia ako výkonová hustota zo strednej rýchlosti.
- Ročná výroba energie je $E_r = T_r \int P(v)f(v) dv$; počíta sa metódou tried.
- Triedy turbín IEC 61400-1 sú dané referenčnou rýchlosťou (I, II, III) a kategóriou turbulencie (A+, A, B, C).

Kontrolné otázky

1. Ktoré sily pôsobia na pohyb vzduchu v atmosfére? Ktoré z nich sú v rovnováhe pri geostrofickom vetre?
2. Čo je spektrálna medzera a prečo umožňuje používať desaťminútové priemery rýchlosti?
3. Opíšte štruktúru atmosférickej medznej vrstvy. V ktorej jej časti platí logaritmický zákon?
4. Ako ovplyvňuje stabilita atmosféry rýchlostný profil a turbulenciu?
5. Aký je fyzikálny význam parametra drsnosti z_0 ? Je to výška prekážok?
6. Porovnajte logaritmický a mocninový zákon. Prečo je extrapolácia rýchlosti z malej výšky neistá?
7. Čo je strih vetra a aký má vplyv na zaťaženie lopatiek?
8. Definujte intenzitu turbulencie. Ako sa mení s rýchlosťou vetra podľa modelu normálnej turbulencie?
9. Aký je význam parametrov c a k Weibullovoho rozdelenia?
10. Prečo nemožno strednú výkonovú hustotu vetra vypočítat zo strednej rýchlosti?
11. Ako sa počíta ročná výroba energie metódou tried? Čo je súčiniteľ využitia inštalovaného výkonu?
12. Čím sú určené triedy turbín podľa IEC 61400-1? Pre akú lokalitu je určená turbína triedy IIIA?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Úloha 2.1. Vo výške 10 m nad poľnohospodárskou krajinou ($z_0 = 0,1 \text{ m}$) je stredná rýchlosť vetra 6 m/s. Určte strednú rýchlosť vo výške 100 m podľa logaritmického zákona.

(Výsledok: 9,0 m/s)

Úloha 2.2. Na stožiar bola nameraná stredná rýchlosť 6,0 m/s vo výške 30 m a 7,2 m/s vo výške 80 m. Určte exponent mocninového zákona.

(Výsledok: $\alpha \approx 0,19$)

Úloha 2.3. Rozdelenie rýchlosti vetra je Weibullovo s $c = 9$ m/s a $k = 2,2$ ($\Gamma(1,455) = 0,8856$, $\Gamma(2,364) = 1,2135$). Vypočítajte strednú rýchlosť a strednú výkonovú hustotu vetra.

(Výsledok: $\bar{v} \approx 7,97$ m/s, $\overline{P_w/A} \approx 542$ W/m²)

Úloha 2.4. Stredná rýchlosť vetra v osi rotora je 10 m/s a rozdelenie je Rayleighovo. Koľko hodín ročne je rýchlosť vetra väčšia ako vypínacia rýchlosť 25 m/s?

(Výsledok: približne 0,74 %, t. j. asi 65 h)

Úloha 2.5. Vypočítajte smerodajnú odchýlku a intenzitu turbulencie podľa modelu normálnej turbulencie pre kategóriu B pri rýchlosti 8 m/s.

(Výsledok: $\sigma_1 \approx 1,62$ m/s, $I \approx 0,20$)

Úloha 2.6. Referenčná turbína IEA 15 MW je navrhnutá pre triedu IB [7]. Uveďte V_{ref} , V_{ave} a I_{ref} tejto triedy a vypočítajte σ_1 pri rýchlosti 10 m/s.

(Výsledok: 50 m/s, 10 m/s, 0,14; $\sigma_1 \approx 1,83$ m/s)

Úloha 2.7. Turbína s menovitým výkonom 3 MW vyrobila za rok 7000 MWh. Určte súčiniteľ využitia inštalovaného výkonu.

(Výsledok: $k_c \approx 0,27$)

Úloha 2.8. Dokážte, že pre Rayleighovo rozdelenie platí $\overline{v^3}/\bar{v}^3 = 6/\pi$. Využite (2.18) a vzťahy $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$.

Úloha 2.9. Zopakujte výpočet z čl. 2.6 pre strednú rýchlosť vetra 7,5 m/s (trieda III). Stačí použiť triedy od 3 m/s do 25 m/s a výkonovú krivku z tab. 2.3. Ako sa zmenil súčiniteľ využitia inštalovaného výkonu?

(Výsledok: $E_r \approx 16\,500$ MWh, $k_c \approx 0,38$)

Kapitola 3

Základy aerodynamiky

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- určiť vlastnosti vzduchu potrebné pri aerodynamických výpočtoch,
- použiť rovnicu kontinuity, vetu o zmene hybnosti a Bernoulliho rovnicu na kontrolný objem a prúdovú trubicu,
- vypočítať Reynoldsovo a Machovo číslo pre prierez lopatky a posúdiť vplyv viskozity a stlačiteľnosti,
- opísať laminárnu a turbulentnú medznú vrstvu, prechod a odtrhnutie prúdu,
- vysvetliť fyzikálny význam vírivosti na pohybe tekutinovej častice a rozlíšiť vírivé a nevírivé prúdenie,
- vysvetliť pojmy vírivosť, cirkulácia a vírové vlákno a použiť Kuttovu–Žukovského vetu a Biotov–Savartov zákon,
- skladať jednoduché potenciálové prúdenia, opísať obtekanie valca s cirkuláciou a vysvetliť Magnusov jav,
- rozlíšiť trecí, tvarový a indukovaný odpor a zaradiť telesá podľa prevládajúceho druhu odporu,
- opísať režimy obtekania valca a odhadnúť frekvenciu odtrhávania vírov,
- definovať vztlak, odpor a ich súčinitele.
- vysvetliť vírovú sústavu a indukovaný odpor krídla konečného rozpätia.

Kapitola zhŕňa poznatky z mechaniky tekutín, ktoré v ďalšom texte priamo využijeme. Predpokladá sa, že čitateľ ich pozná z kurzu mechaniky tekutín; odvodenia preto uvádzame stručne a dôraz kladieme na to, *kde a ako* sa jednotlivé vzťahy uplatnia v aerodynamike veterných turbín. Podrobný výklad nájde čitateľ v učebniciach aerodynamiky [17] a teórie medznej vrstvy [18]; zhrnutie zamerané na veterné turbíny obsahuje [1].

3.1 Vlastnosti vzduchu

Pri aerodynamických výpočtoch veterných turbín považujeme vzduch za newtonovskú tekutinu, ktorej stav opisuje stavová rovnica ideálneho plynu (1.8). Okrem hustoty (čl. 1.5.2) potrebujeme **dynamickú viskozitu** μ (Pa s) a **kinematickú viskozitu**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{m}^2/\text{s}). \quad (3.1)$$

Dynamická viskozita plynov prakticky nezávisí od tlaku a s teplotou rastie. V štandardnej atmosfére sa vyjadruje Sutherlandovým vzťahom [9]

$$\mu = \frac{\beta_S T^{3/2}}{T + S}, \quad \beta_S = 1,458 \cdot 10^{-6} \text{ kg}/(\text{m s K}^{1/2}), \quad S = 110,4 \text{ K}. \quad (3.2)$$

Na hladine mora v štandardnej atmosfére ($T_0 = 288,15 \text{ K}$) je $\mu_0 = 1,7894 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$ a $\nu_0 = 1,4607 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ [9].

Rýchlosť zvuku v ideálnom plyne je

$$a = \sqrt{\kappa_v R T}, \quad (3.3)$$

kde $\kappa_v = 1,4$ je Poissonova konštanta (pomer mernej tepelnej kapacity pri stálom tlaku a pri stálom objeme) vzduchu. Pri $T_0 = 288,15 \text{ K}$ je $a_0 = 340,3 \text{ m/s}$.

Príklad 3.1: Viskozita vzduchu pri rôznych teplotách

Vypočítajte dynamickú a kinematickú viskozitu vzduchu pri tlaku $101\,325 \text{ Pa}$ a teplotách -10°C a 30°C .

Riešenie. Pre $T = 263,15 \text{ K}$ podľa (3.2):

$$\mu = \frac{1,458 \cdot 10^{-6} \cdot 263,15^{3/2}}{263,15 + 110,4} = 1,666 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}.$$

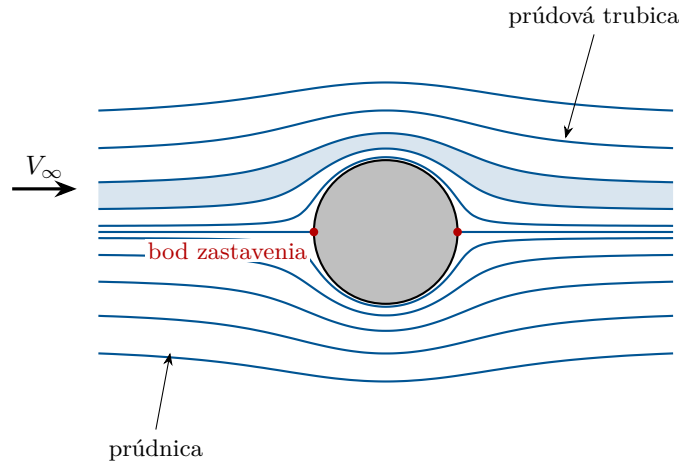
Hustota (čl. 1.5.2) je $\rho = 1,341 \text{ kg/m}^3$, takže $\nu = 1,666 \cdot 10^{-5} / 1,341 = 1,242 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Pre $T = 303,15 \text{ K}$ analogicky $\mu = 1,861 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$, $\rho = 1,164 \text{ kg/m}^3$ a $\nu = 1,598 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Kinematická viskozita sa v tomto rozsahu teplôt mení asi o 29 %, čo priamo ovplyvňuje Reynoldsovo číslo (čl. 3.6).

3.2 Opis prúdenia

Prúdenie opisujeme polom rýchlosti $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, tlaku $p(\mathbf{x}, t)$ a hustoty $\rho(\mathbf{x}, t)$ (Eulerov opis). Prúdenie je **ustálené** (stacionárne), ak tieto veličiny v danom bode nezávisia od času. Rotor veternej turbíny vytvára neustálené prúdenie, pretože lopatky sa pohybujú. Vo vzťažnej sústave spojennej s rotujúcou lopatkou však môže byť prúdenie pri rovnomernom vetre a stálych otáčkach ustálené. Túto skutočnosť využíva teória prvkov lopatky (kap. 7).

Prúdnica je krivka, ktorej dotyčnica má v každom bode smer rýchlosti. Plocha tvorená prúdnicami prechádzajúcimi uzavretou krivkou tvorí **prúdovú trubicu**; cez jej plášť tekutina nepreteká. Pri ustálenom prúdení prúdnice splývajú s dráhami častíc. Prúdová trubica, ktorá obaľuje rotor, je základom hybnostnej teórie (kap. 5).

Pojmy prúdnica a prúdová trubica ilustruje obr. 3.1 na príklade obtekania valca prúdom bez trenia.



Obr. 3.1. Prúdnice pri obtekaní valca nestlačiteľným prúdom bez trenia (vypočítané z prúdovej funkcie $\psi = V_\infty y (1 - R^2/r^2)$ [17]). Vyfarbená je jedna prúdová trubica: pri valci sa zužuje a prúd sa v nej zrýchľuje.

3.3 Rovnica kontinuity

Zákon zachovania hmotnosti pre pevný kontrolný objem V s povrchom S a vonkajšou jednotkovou normálou $\mathbf{n}$ má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (3.4)$$

Pri ustálenom prúdení prvý člen odpadá: hmotnosť, ktorá do kontrolného objemu vteká, z neho aj vyteká. Pre prúdovú trubicu s prierezmi A_1 a A_2 , v ktorých je rýchlosť rovnomerne rozdelená, dostaneme

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}. \quad (3.5)$$

Pri nestlačiteľnom prúdení ($\rho = \text{konšt.}$) sa zachováva objemový prietok vA a diferenciálny tvar rovnice kontinuity je

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

Príklad 3.2: Rozširovanie prúdovej trubice

Vzduch prúdi v prúdovej trubici, ktorá prechádza rotorom. Ďaleko pred rotorom je rýchlosť 10 m/s, ďaleko za rotorom je vzduch spomalený na 6,7 m/s. Koľkokrát je prierez prúdovej trubice za rotorom väčší ako pred ním? Prúdenie považujte za nestlačiteľné.

Riešenie. Z (3.5) pri $\rho_1 = \rho_2$: $A_2/A_1 = v_1/v_2 = 10/6,7 \approx 1,5$. Spomalenie vzduchu rotorom teda nutne vedie k rozšíreniu prúdovej trubice. Tento jav podrobne rozoberieme v kap. 5.

3.4 Veta o zmene hybnosti

Druhý Newtonov zákon pre pevný kontrolný objem hovorí, že výslednica vonkajších síl pôsobiach na tekutinu v kontrolnom objeme sa rovná časovej zmene hybnosti v objeme a toku

hybnosti cez jeho povrch [17]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \oint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \oint_S p \mathbf{n} dS + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_v. \quad (3.7)$$

Na pravej strane je tlaková sila na povrch kontrolného objemu, sila $\mathbf{F}_t$, ktorou na tekutinu pôsobia telesá vnútri objemu (napr. rotor alebo profil), a viskózne sily $\mathbf{F}_v$ na povrchu objemu. Objemové sily (tiaž) pri aerodynamike vodorovného prúdenia zanedbávame.

Veta o zmene hybnosti je mimoriadne užitočná, pretože umožňuje určiť silu na teleso iba z rýchlostí a tlakov na hraniciach kontrolného objemu, bez znalosti prúdenia v okolí telesa. Na nej je založená hybnostná teória rotora (kap. 5 and 6). Sila, ktorou tekutina pôsobí na teleso, je $-\mathbf{F}_t$.

Príklad 3.3: Odpor telesa z deficitu rýchlosti v úplave

Za dlhým valcovým telesom (dvojrozmerné prúdenie) je v dostatočnej vzdialenosti, kde je tlak už rovný tlaku nerušeného prúdu p_∞ , nameraný rýchlostný profil

$$u(y) = U \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|y|}{b} \right) \right] \quad \text{pre } |y| \leq b, \quad u(y) = U \quad \text{inde,}$$

kde $U = 10 \text{ m/s}$ a $b = 0,2 \text{ m}$ (obr. 3.2). Určte odpor telesa na jednotku dĺžky ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

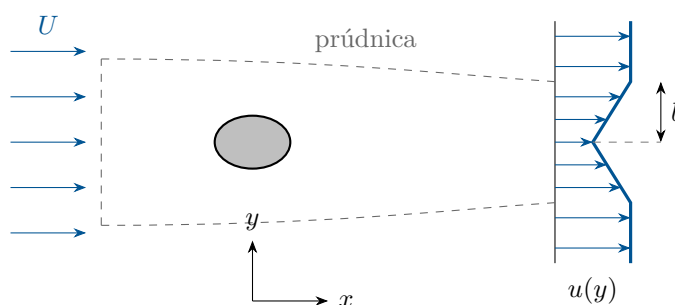
Riešenie. Zvolíme kontrolný objem ohraničený prierezom pred telesom (rýchlosť U), prierezom v úplave a prúdnicami, ktoré prechádzajú okrajmi úplavy. Tlak je na hraniciach rovný p_∞ , viskózne sily na hraniciach zanedbáme. Hmotnosť vstupujúca a vystupujúca na jednotku dĺžky je rovnaká, $\int \rho U dy_1 = \int \rho u dy$. Z vety o hybnosti v smere prúdu dostaneme odpor na jednotku dĺžky

$$D' = \rho \int_{-b}^b u (U - u) dy.$$

Označme $s = 1 - |y|/b$. Potom $u = U(1 - s/2)$, $U - u = Us/2$ a $dy = b ds$ na každej polovici úplavy:

$$D' = 2\rho U^2 b \int_0^1 \left(1 - \frac{s}{2}\right) \frac{s}{2} ds = 2\rho U^2 b \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3}\rho U^2 b.$$

Číselne: $D' = \frac{1}{3} \cdot 1,225 \cdot 10^2 \cdot 0,2 = 8,17 \text{ N/m}$. Odpor telesa sa prejavuje ako strata hybnosti v úplave – analogicky ako ťah rotora (kap. 5).



Obr. 3.2. Kontrolný objem na určenie odporu telesa z rýchlostného profilu v úplave k čl. 3.4.

3.5 Bernoulliho rovnica

Pre ustálené, nestlačiteľné prúdenie bez trenia platí pozdĺž prúdnic **Bernoulliho rovnica**

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 = \text{konšt.}, \quad (3.8)$$

kde výšku nad referenčnou hladinou (tlaž) sme opäť zanedbali. Súčet **statického tlaku** p a **dynamického tlaku** $q = \frac{1}{2} \rho v^2$ je **celkový tlak** p_0 . Ak je prúdenie ďaleko pred telesom rovnomerné, majú všetky prúdnic rovnaký celkový tlak a Bernoulliho rovnica platí v celej oblasti prúdenia bez trenia.

Pre aerodynamiku veterných turbín je dôležité, kedy Bernoulliho rovnica *neplatí*:

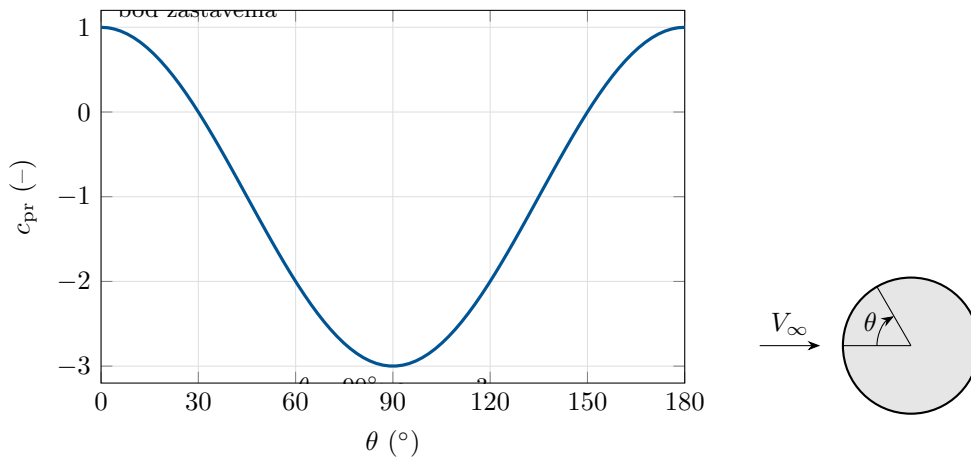
- pri prechode prúdnic cez rotor – rotor koná s tekutinou prácu (odoberá jej energiu), preto sa celkový tlak za rotorom zníži; Bernoulliho rovnicu možno použiť zvlášť pred rotorom a zvlášť za ním (kap. 5),
- v medznej vrstve a v úplave, kde sa energia disipuje trením,
- pri výrazne neustálenom prúdení.

Rozloženie tlaku po povrchu telesa sa vyjadruje bezrozmerným **súčiniteľom tlaku**

$$c_{\text{pr}} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{v}{V_{\infty}} \right)^2, \quad (3.9)$$

kde druhá rovnosť platí, ak možno použiť Bernoulliho rovnicu. Index „pr“ používame, aby sa súčiniteľ tlaku nezamieňal so súčiniteľom výkonu c_P . V bode zastavenia prúdu ($v = 0$) je $c_{\text{pr}} = 1$; tam, kde sa prúd zrýchľuje nad rýchlosť nerušeného prúdu, je $c_{\text{pr}} < 0$ (podtlak).

Príkladom je rozloženie tlaku po povrchu valca pri obtekaní bez trenia, pre ktoré platí $c_{\text{pr}} = 1 - 4 \sin^2 \theta$, kde θ je uhol meraný od bodu zastavenia [17] (obr. 3.3). Rozloženie je súmerné spredu aj zozadu, takže výsledná sila je nulová. Skutočný valec má za sebou odtrhnutú úplavu s podtlakom, a preto odpor (čl. 3.7.3).



Obr. 3.3. Súčiniteľ tlaku na povrchu valca pri obtekaní bez trenia $c_{\text{pr}} = 1 - 4 \sin^2 \theta$. Pribeh pre θ od 180° do 360° je súmerný.

Príklad 3.4: Dynamický tlak na konci lopatky

Koniec lopatky referenčnej turbíny NREL 5 MW sa pri menovitých otáčkach pohybuje rýchlosťou približne 80 m/s (čl. 1.6.2). Určte dynamický tlak zodpovedajúci tejto rýchlosti a posúďte, či možno prúdenie považovať za nestlačiteľné ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $a = 340,3 \text{ m/s}$).

Riešenie. $q = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 80^2 = 3920 \text{ Pa}$, čo je približne 3,9 % atmosférického tlaku. Machovo číslo je $M = 80/340,3 = 0,235$. Pri izentropickom zastavení prúdu sa hustota zmení relatívne približne o $M^2/2 = 0,028$, t. j. o 2,8 % [17]. Predpoklad nestlačiteľného prúdenia je preto pre lopatky veterných turbín oprávnený; bežne sa za hranicu považuje $M \approx 0,3$ [17].

3.6 Viskozita a podobnosť prúdenia**3.6.1 Navierove–Stokesove rovnice**

Pohyb newtonovskej nestlačiteľnej tekutiny opisujú okrem rovnice kontinuity (3.6) **Navierove–Stokesove rovnice**

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3.10)$$

Ľavá strana predstavuje zotrvačné sily, pravá tlakové a viskózne sily. Pre praktické prúdenia tieto rovnice nemožno riešiť analyticky; numerické riešenie je predmetom výpočtovej dynamiky tekutín (kap. 12). Ak viskózný člen zanedbáme, dostaneme Eulerove rovnice, z ktorých integráciou pozdĺž prúdnic vyplýva Bernoulliho rovnica (3.8).

3.6.2 Reynoldsovo a Machovo číslo

Pomer zotrvačných a viskózných síl vyjadruje **Reynoldsovo číslo**

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}, \quad (3.11)$$

kde V je charakteristická rýchlosť a L charakteristická dĺžka. Pre prierez lopatky je charakteristickou dĺžkou tetiva profilu c a charakteristickou rýchlosťou relatívna rýchlosť obtekania W (kap. 7). Pomer rýchlosti prúdenia k rýchlosti zvuku je **Machovo číslo**

$$M = \frac{V}{a}. \quad (3.12)$$

Z rozmerovej analýzy vyplýva, že dve geometricky podobné prúdenia sú fyzikálne podobné, ak majú rovnaké Reynoldsovo a Machovo číslo. Na týchto dvoch číslach (a na uhle nábehu) preto závisia bezrozmerné súčinitele aerodynamických síl (čl. 3.11). Pri modelových skúškach rotorov vo veternom tuneli sa Reynoldsovo číslo zvyčajne nepodarí dosiahnuť rovnaké ako na skutočnej turbíne, čo treba pri prenose výsledkov zohľadniť [1, 2].

Príklad 3.5: Reynoldsovo číslo prierezu lopatky

Určte Reynoldsovo číslo (a) prierezu lopatky veľkej turbíny s tetivou 2 m obtekaného relatívnou rýchlosťou 80 m/s, (b) prierezu lopatky malej turbíny s tetivou 0,1 m

obtekaného rýchlosťou 30 m/s. Hodnoty tetív a rýchlostí sú zvolené ilustratívne; $\nu = 1,461 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Riešenie. (a) $Re = 80 \cdot 2 / 1,461 \cdot 10^{-5} = 1,1 \cdot 10^7$, (b) $Re = 30 \cdot 0,1 / 1,461 \cdot 10^{-5} = 2,1 \cdot 10^5$. Reynoldsove čísla sa líšia o dva rády. Ako ukážeme v kap. 4, charakteristiky profilov (najmä odpor a maximálny vztlak) od Reynoldsovho čísla závisia, preto nemožno údaje o profiloch prenášať medzi turbínami veľmi rozdielnych veľkostí bez overenia.

3.7 Medzná vrstva

3.7.1 Pojem medznej vrstvy

Pri veľkých Reynoldsových číslach sa vplyv viskozity obmedzuje na tenkú **medznú vrstvu** pri povrchu telesa a na úplav za ním [18]. Na povrchu je rýchlosť tekutiny nulová (podmienka ulpievania) a v medznej vrstve rastie na rýchlosť vonkajšieho prúdu U_e . Mimo medznej vrstvy možno prúdenie považovať za prúdenie bez trenia. Tlak sa naprieč tenkou medznou vrstvou prakticky nemení, takže tlak na povrchu telesa je určený vonkajším prúdom. Toto rozdelenie oblasti prúdenia, ktoré zaviedol Prandtl, je základom výpočtu aerodynamických charakteristík profilov [17].

Hrúbka medznej vrstvy δ sa zvyčajne definuje ako vzdialenosť od povrchu, kde rýchlosť dosiahne 99 % rýchlosti vonkajšieho prúdu.

3.7.2 Laminárna a turbulentná medzná vrstva

Na rovinnej doske obtekanej pozdĺžne rovnomerným prúdom je medzná vrstva za nábežnou hranou laminárna. Pri určitom miestnom Reynoldsovom čísle $Re_x = Ux/\nu$ nastáva **prechod** (tranzícia) do turbulentnej medznej vrstvy. Pre dosku v prúde s malou turbulentnosťou sa ako orientačná hodnota uvádza kritické Reynoldsovo číslo rádovo $5 \cdot 10^5$; skutočná poloha prechodu závisí od turbulentnosti vonkajšieho prúdu, drsnosti povrchu a tlakového gradientu [17, 18].

Pre rovinnú dosku platia známe vzťahy [17, 18]:

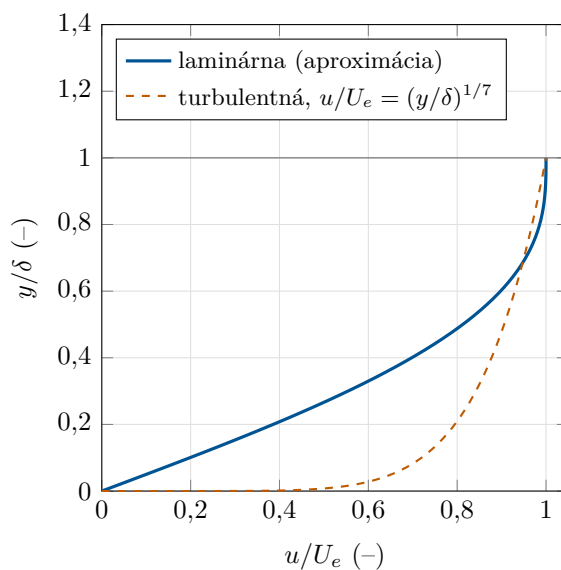
$$\text{laminárna: } \frac{\delta}{x} \approx \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}}, \quad c_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}, \quad (3.13)$$

$$\text{turbulentná: } \frac{\delta}{x} \approx \frac{0,37}{Re_x^{1/5}}, \quad c_f \approx \frac{0,074}{Re_L^{1/5}}, \quad (3.14)$$

kde c_f je súčiniteľ trecieho odporu jednej strany dosky dĺžky L vzťahovaný na $\frac{1}{2}\rho U^2$ a plochu dosky; turbulentné vzťahy predpokladajú turbulentnú medznú vrstvu od nábežnej hrany. Turbulentná medzná vrstva je hrubšia, má plnší rýchlostný profil (obr. 3.4) a väčšie trenie na stene.

Príklad 3.6: Medzná vrstva na rovinnej doske

Rovinná doska dĺžky 1 m je obtekaná vzduchom rýchlosťou 50 m/s ($\nu = 1,461 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$). Určte (a) polohu prechodu pri $Re_x = 5 \cdot 10^5$ a hrúbku laminárnej medznej vrstvy v tomto mieste, (b) hrúbku medznej vrstvy na konci dosky za predpokladu turbulentnej medznej vrstvy od nábežnej hrany.

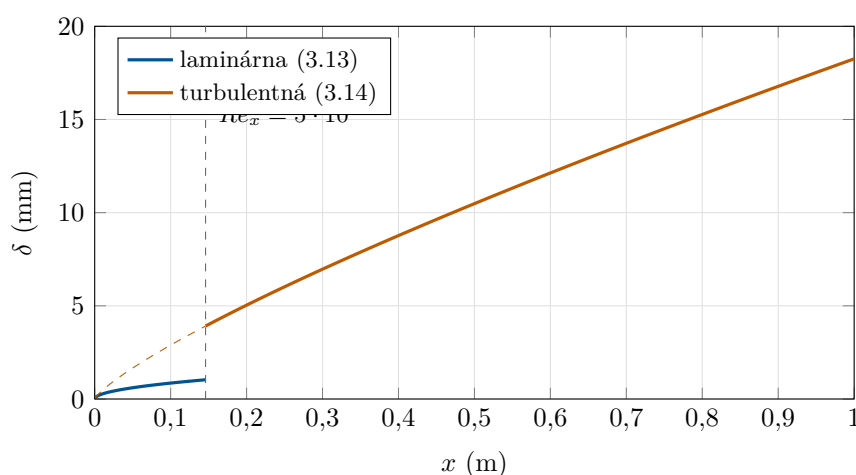


Obr. 3.4. Porovnanie tvaru rýchlostného profilu laminárnej a turbulentnej medznej vrstvy. Laminárny profil je aproximovaný polynómom $u/U_e = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$, $\eta = y/\delta$, turbulentný mocninovým zákonom s exponentom $1/7$; obe aproximácie sú bežne používané v integrálnych metódach [18].

Riešenie. (a) $x_{tr} = Re_x \nu / U = 5 \cdot 10^5 \cdot 1,461 \cdot 10^{-5} / 50 = 0,146$ m. Podľa (3.13): $\delta = 5,0 \cdot 0,146 / \sqrt{5 \cdot 10^5} = 1,03 \cdot 10^{-3}$ m ≈ 1 mm.

(b) $Re_L = 50 \cdot 1 / 1,461 \cdot 10^{-5} = 3,42 \cdot 10^6$. Podľa (3.14): $\delta = 0,37 \cdot 1 / (3,42 \cdot 10^6)^{1/5} = 0,018$ m ≈ 18 mm.

Medzná vrstva je aj na konci dosky tenká v porovnaní s jej dĺžkou, čo potvrdzuje oprávnenosť Prandtlovho rozdelenia oblasti prúdenia.

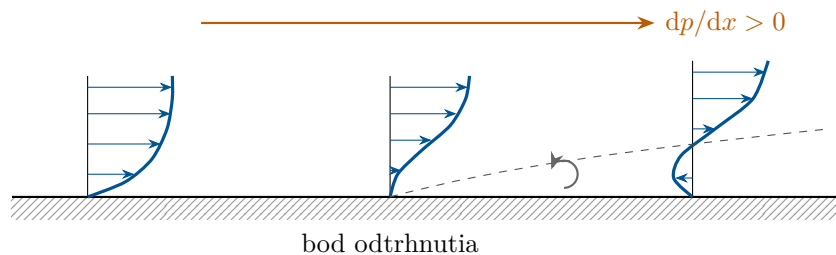


Obr. 3.5. Hrúbka medznej vrstvy na rovinnej doske podľa čl. 3.7.2 ($U = 50$ m/s). V tomto zjednodušenom výpočte sa hrúbka pri prechode zväčší skokom, v skutočnosti prechod prebieha na konečnej dĺžke. Čiarkovane je turbulentná vrstva uvažovaná od nábežnej hrany.

3.7.3 Odrhnutie prúdu

Ak tlak v smere prúdenia rastie (**nepriaznivý tlakový gradient**, $dp/dx > 0$), tekutina v medznej vrstve, ktorá má pri stene malú kinetickú energiu, je brzdená. Pri dostatočne veľkom náraste tlaku sa pri stene zastaví, začne prúdiť späť a medzná vrstva sa od povrchu **odtrhne** (obr. 3.6). Za miestom odtrhnutia vzniká oblasť vírivého spätného prúdenia, ktorá výrazne mení rozloženie tlaku na telese [17, 18].

Turbulentná medzná vrstva je vďaka intenzívnemu premiešavaniu odolnejšia proti odtrhnutiu ako laminárna, pretože do oblasti pri stene privádza tekutinu s väčšou hybnosťou. Na profile lopatky nastáva odtrhnutie na sacej strane pri veľkých uhloch nábehu – tento stav sa nazýva **stall** (preťaženie profilu) a je spojený s poklesom vztlaku a prudkým nárastom odporu (kap. 4). Ako sme spomenuli v kap. 1, niektoré turbíny využívajú stall zámerne na obmedzenie výkonu pri silnom vetre.



Obr. 3.6. Odrhnutie medznej vrstvy pri nepriaznivom tlakovom gradiente (schematicky): rýchlostný profil pred odtrhnutím, v bode odtrhnutia (nulové trenie na stene) a za ním so spätným prúdením pri stene.

3.8 Odpor telies

3.8.1 Zložky odporu

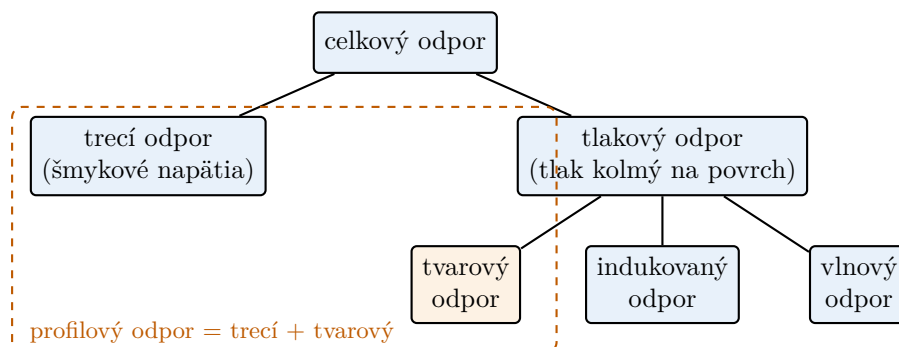
Celkový odpor telesa je sila v smere nerušeného prúdu; rovná sa úbytku hybnosti prúdu medzi miestami ďaleko pred telesom a ďaleko za ním (čl. 3.4) [19, čl. 1.5.5]. Podľa toho, ako sila pôsobí na povrch telesa, ho delíme na dve zložky [19, čl. 1.5.5] (obr. 3.7):

- **trecí odpor** – výslednica tangenciálnych (šmykových) napätí na povrchu telesa v smere prúdu; priamo súvisí s viskozitou a v prúde bez trenia by neexistoval,
- **tlakový odpor** – výslednica tlakov kolmých na povrch v smere prúdu. Skladá sa z *indukovaného odporu*, ktorý súvisí so vztlakom kídla konečného rozpätia (čl. 3.12), *vlnového odporu* pri nadzvukových rýchlostiach (pri veterných turbínach nevzniká) a **tvárového odporu**.

Súčet trecieho a tvarového odporu sa nazýva **profilový odpor** [19, čl. 1.5.5]; to je odpor profilu lopatky, ktorý vystupuje v charakteristikách $c_D(\alpha)$ (kap. 4).

Tvarový odpor vzniká takto [19, čl. 1.5.5]: v prúde bez trenia sa tlakové sily na prednú a zadnú časť telesa presne vyrovnajú (d'Alembertov paradox, obr. 3.18). Medzná vrstva však účinne mení tvar telesa a pri odtrhnutí sa za telesom vytvorí úplava s nízkym tlakom. Tlak na zadnej časti telesa sa preto neobnoví na hodnotu, ktorú by mal pri prúde bez trenia,

a výslednica tlakov smeruje dozadu. Tvarový odpor teda, rovnako ako trecí, existuje len vďaka viskozite.



Obr. 3.7. Zložky odporu telesa podľa [19, čl. 1.5.5]. Vlnový odpor vzniká len pri nadzvukovom prúdení.

3.8.2 Tlakový, trecí a kombinovaný odpor

Pomer trecieho a tvarového odporu závisí od tvaru telesa. Typické prípady sú na obr. 3.8 [19, čl. 1.5.5]:

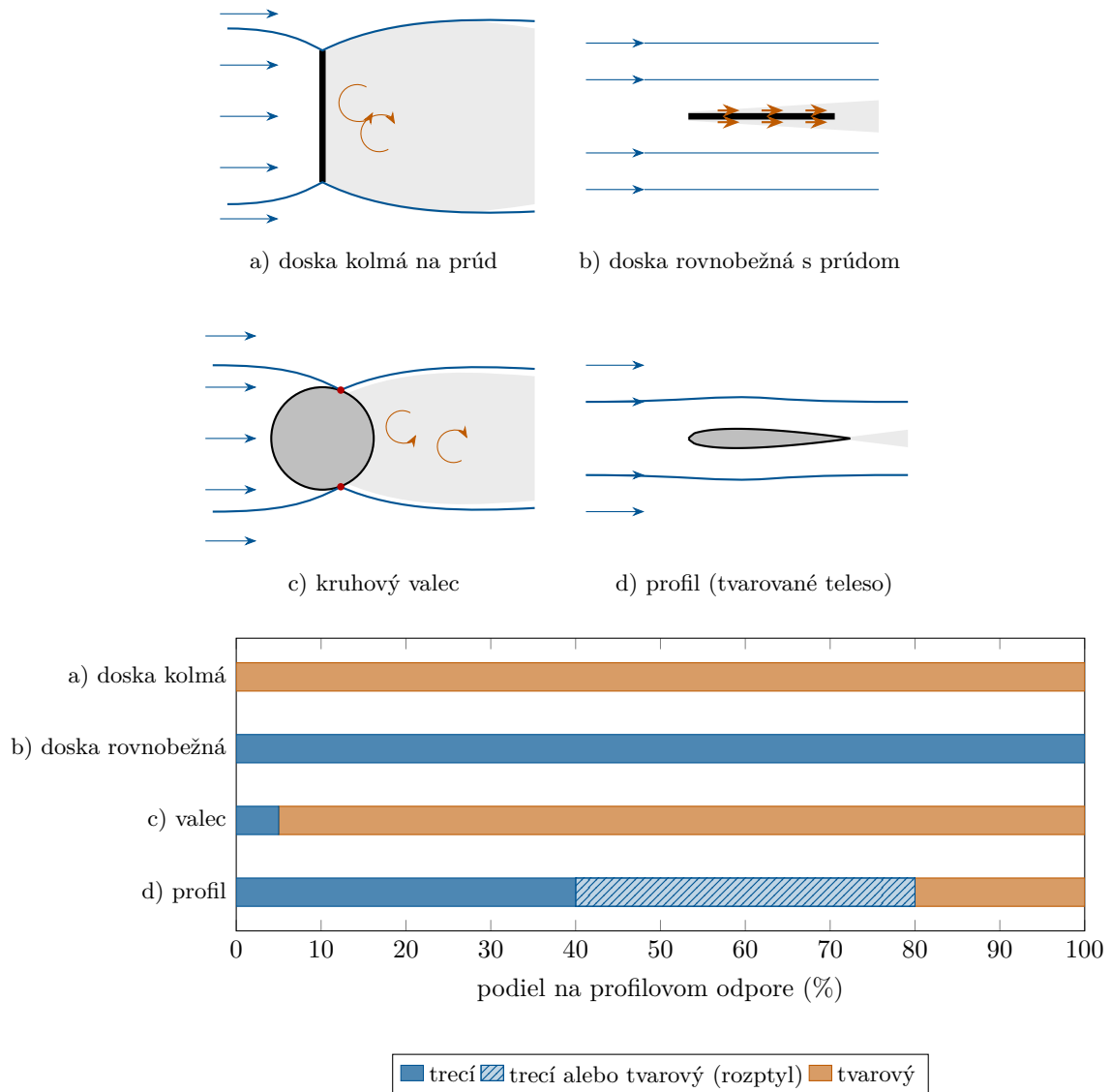
- *Doska kolmá na prúd* – odpor je výlučne tlakový (tvarový), spôsobený najmä veľkým podtlakom na zadnej strane. Trecie napätia pôsobia v rovine dosky, a nemajú teda zložku v smere prúdu. Prúd sa odtrhne na ostrých hranách, úplava je veľmi široká.
- *Doska rovnobežná s prúdom* – odpor je výlučne trecí: tlak pôsobí kolmo na dosku a nemá zložku v smere prúdu.
- *Kruhový valec* – kombinovaný odpor, v ktorom prevláda tvarový: trecí tvorí len asi 5 % a tvarový 95 %; pomer závisí od Reynoldsovho čísla.
- *Profil alebo aerodynamicky tvarované teleso* – kombinovaný odpor; vplyv viskozity na rozloženie tlaku je oveľa menší ako pri valci, a preto je aj tvarový odpor oveľa menší. Trecí odpor tvorí typicky 40 až 80 % celkového odporu v závislosti od Reynoldsovho čísla, pomernej hrúbky a ďalších činiteľov.

Tvarované (aerodynamické) telesá sa smerom k zadnej hrane pozvoľna zužujú, takže nepriaznivý tlakový gradient je malý a odtrhnutie nastane až tesne pri odtokovej hrane; úplava je úzka a odpor je daný najmä trením [13, čl. A3.5]. Veľkosť úplavy je dobrým ukazovateľom profilového odporu telesa [19, čl. 1.5.5]: úbytok hybnosti sa v nej prejavuje znížením rýchlosti a vynaložená energia intenzívnym vírením.

Príklad 3.7: Doska kolmá a rovnobežná s prúdom

Veľmi dlhá doska so šírkou 1 m je obtekaná vzduchom rýchlosťou 50 m/s ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1,461 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$). Porovnajme odpor na meter dĺžky, ak je doska a) kolmá na prúd ($c_D = 2,0$ pre nekonečne dlhú dosku [13, čl. 5.6.1]), b) rovnobežná s prúdom s turbulentnou medznou vrstvou na oboch stranách.

Riešenie. Dynamický tlak $q = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 50^2 = 1531 \text{ Pa}$. a) $D' = c_D q b = 2,0 \cdot 1531 \cdot 1 = 3060 \text{ N/m}$. b) $Re_L = 50 \cdot 1 / 1,461 \cdot 10^{-5} = 3,42 \cdot 10^6$, podľa (3.14) $c_f = 0,074 / (3,42 \cdot$



Obr. 3.8. Telesá s prevládajúcim tlakovým (a), trecím (b) a kombinovaným (c, d) odporom. Hore: obtekanie a úplava (sivo) schematicky, modré čiary sú prúdnice, oranžové šípky trecie napätia, červené body miesta odtrhnutia; podľa [19, obr. 1.14–1.17] a [13, obr. A3.10, A3.11]. Dole: podiel trecieho a tvarového odporu podľa [19, čl. 1.5.5]; pre profil je trecí odpor 40 až 80 %, šrafovaný úsek vyjadruje tento rozptyl.

$10^6)^{1/5} = 0,00365$ a pre obe strany $D' = 2 c_f q b = 2 \cdot 0,00365 \cdot 1531 \cdot 1 = 11,2 \text{ N/m}$. Tá istá doska má pri kolmom obtekaní asi 270-krát väčší odpor. Pri laminárnej medznej vrstve by bol trecí odpor ešte asi päťkrát menší ($c_f = 1,328/\sqrt{Re_L} = 0,00072$).

3.8.3 Súčiniteľ odporu a jeho závislosť od Reynoldsovho čísla

Súčiniteľ odporu telesa sa definuje [13, rov. (A3.4)]

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A}, \quad (3.15)$$

kde A je spravidla čelná plocha telesa (priemet do roviny kolmej na prúd); pri profiloch a krídlach sa používa tetiva alebo plocha krídla (čl. 3.11), pri dvojrozmernom telese sila a plocha na jednotku dĺžky. Súčiniteľ odporu je vo všeobecnosti funkciou Reynoldsovho čísla a s rastúcim Re spravidla klesá [13, čl. A3.2]. Napríklad pre guľu pri veľmi malých Reynoldsových číslach (Stokesovo plazivé prúdenie) platí $c_D = 24/Re$ [13, rov. (A3.3)].

Pri telesách s ostrými hranami sa prúd odtrhne vždy na hranách, a preto je súčiniteľ odporu napr. dosky kolmej na prúd takmer nezávislý od Reynoldsovho čísla; závisí však od pomeru strán dosky [13, čl. A3.5]. Pre nekonečne dlhú dosku je $c_D = 2,0$, pre pomer dĺžky k šírke 30 podľa britskej normy pre zataženie budov 1,68 [13, čl. 5.6.1]. Pri telesách so zaoblenými tvarmi (valec, guľa) poloha odtrhnutia závisí od stavu medznej vrstvy: turbulentná medzná vrstva sa odtrhne neskôr, úplava sa zúži a tvarový odpor klesne, hoci trecí odpor vzrastie [13, čl. A3.5]. Preto pri kritickom Reynoldsovom čísle súčiniteľ odporu valca alebo gule náhle klesne (čl. 3.8.4). Prechod medznej vrstvy možno vyvolať aj umelo – zdrsnením povrchu alebo drôtikom [13, čl. A3.5].

Príklad 3.8: Golfová loptička

Golfová loptička má priemer asi 42 mm. Pri hladkom povrchu nastáva pokles odporu pri $Re \approx 3,85 \cdot 10^5$, pri drsnom (jamkovom) povrchu už pri $Re \approx 10^5$ [19, čl. 7.5.2]. Určte zodpovedajúce rýchlosti letu ($\nu = 1,461 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

Riešenie. $V = Re \nu / D$: pre hladkú loptičku $3,85 \cdot 10^5 \cdot 1,461 \cdot 10^{-5} / 0,042 = 134 \text{ m/s}$, pre jamkovú $10^5 \cdot 1,461 \cdot 10^{-5} / 0,042 = 35 \text{ m/s}$. Hladká loptička by teda lietala pod kritickou rýchlosťou s veľkým odporom, jamková nad ňou s menším odporom – a doletí ďalej [19, čl. 7.5.2].

Pre veterné turbíny je odpor neaerodynamických telies dôležitý pri výpočte zataženia stojacej turbíny. Pri prúdení kolmo na lopatku sa v minulosti používal súčiniteľ odporu nekonečnej dosky 2,0 znížený podľa pomeru strán; merania na skutočných lopatkách však dali hodnoty 1,24 a 1,25 a dánska norma DS 472 predpisovala najmenej 1,3 [13, čl. 5.6.1].

Príklad 3.9: Odpor stojacej lopatky

Stojaca lopatka s plochou (priemetom) 200 m^2 je obtekaná vetrom rýchlosťou 50 m/s kolmo na svoju plochu. Odhadnite silu s $c_D = 1,3$ ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

Riešenie. $D = c_D \frac{1}{2} \rho V^2 A = 1,3 \cdot 0,5 \cdot 1,225 \cdot 2500 \cdot 200 = 398 \text{ kN}$. Pri hodnote 2,0 pre nekonečnú dosku by vyšlo 613 kN , o 54 % viac.

3.8.4 Obtekanie valca a Kármánova vírová cesta

Obtekanie valca je typickým príkladom obtekania neaerodynamického telesa, pri ktorom sa prúd odtrhne a za telesom vznikne široká úplava; odpor je potom daný najmä tlakom, nie trením [19, čl. 7.5]. Pre veternú turbínu je dôležitý pri obtekaní stožiaru (kap. 10) a rôznych valcových prvkov konštrukcie. Charakter obtekania sa mení s Reynoldsovým číslom $Re = V_\infty D / \nu$ (obr. 3.10) [19, čl. 7.5]:

- $Re < 1$: plazivé prúdenie, prúdnice sú súmerné spredu aj zozadu,
- $5 < Re < 41$: prúd sa odtrhne a za valcom sú dva súmerné ustálené víry,
- $Re > 41$: ustálené prúdenie nie je možné, víry sa striedavo odtrhávajú z oboch strán a vzniká **Kármánova vírová cesta**,
- okolo $Re \approx 3 \cdot 10^5$ (**kritické Reynoldsovo číslo**): medzná vrstva sa po odtrhnutí zmení na turbulentnú a znovu prilne, miesto odtrhnutia sa posunie dozadu, úplava sa zúži a súčiniteľ odporu náhle klesne; pre $Re > 1,3 \cdot 10^6$ je $c_D \approx 0,6$,
- v rozsahoch $200 < Re < 400$ a $3 \cdot 10^5 < Re < 3 \cdot 10^6$ je odtrhávanie vírov málo pravidelné; pri $Re \approx 3 \cdot 10^6$ sa pravidelnosť obnoví.

Kritické Reynoldsovo číslo závisí od turbulencie prúdu a drsnosti povrchu: obe spôsobujú pokles odporu pri menšom Re [19, čl. 7.5].

Pri odtrhávaní víru sa okolo valca mení cirkulácia, a preto na valec pôsobí priečna sila, ktorá mení smer s frekvenciou odtrhávania vírov. Ak sa táto frekvencia zhoduje s vlastnou frekvenciou konštrukcie, môžu vzniknúť veľké kmity [19, čl. 7.5]. Frekvenciu odtrhávania n vyjadruje **Strouhalovo číslo**

$$S = \frac{n D}{V_\infty}, \quad (3.16)$$

ktoré je funkciou Reynoldsovo čísla; v rozsahu vírovej cesty je približne 0,2 [19, obr. 7.17b]. Striedavé odtrhávanie vírov a vzniknutá vírová cesta sú znázornené na obr. 3.9. Víry sa za valcom pohybujú v dvoch radoch s rovnakými rozstupmi, majú rovnakú silu a opačný zmysel otáčania a posúvajú sa pomalšie ako nerušený prúd [19, čl. 7.5].

Príklad 3.10: Odtrhávanie vírov z valcových prvkov

Pri rýchlosti vetra 10 m/s odhadnite Reynoldsovo číslo a frekvenciu odtrhávania vírov a) pre rúrku meteorologického stožiaru s priemerom 0,1 m, b) pre stožiar turbíny s priemerom 4 m ($\nu = 1,4607 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $S \approx 0,2$).

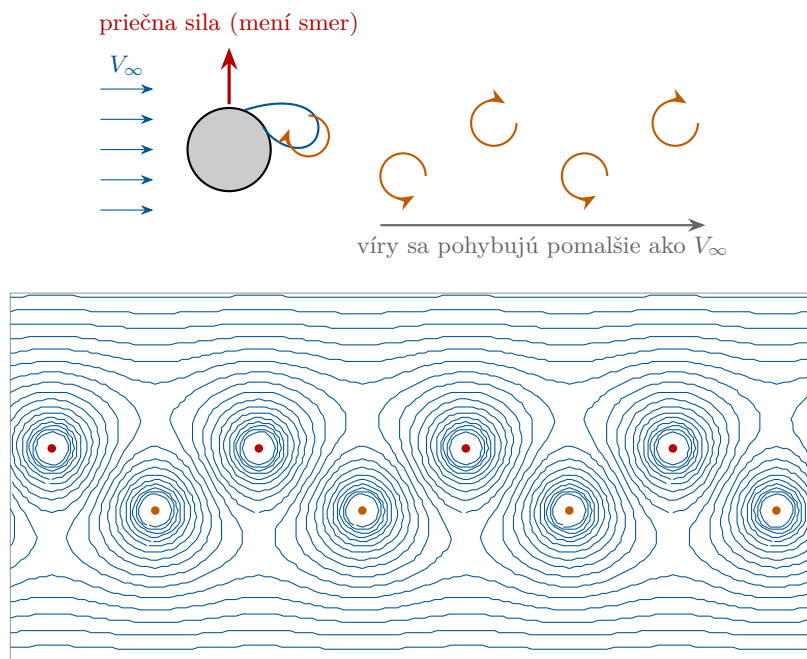
Riešenie. a) $Re = 10 \cdot 0,1 / 1,4607 \cdot 10^{-5} = 6,8 \cdot 10^4$ – oblasť pravidelnej vírovej cesty; $n = S V_\infty / D = 0,2 \cdot 10 / 0,1 = 20 \text{ Hz}$.

b) $Re = 10 \cdot 4 / 1,4607 \cdot 10^{-5} = 2,7 \cdot 10^6$ – oblasť nad kritickým Reynoldsovým číslom, v ktorej je odtrhávanie vírov málo pravidelné; odhad $n = 0,2 \cdot 10 / 4 = 0,5 \text{ Hz}$ je preto len orientačný.

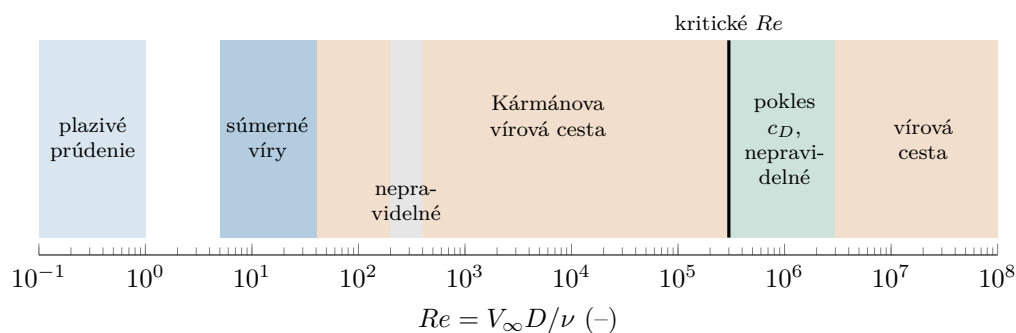
3.9 Vírivosť, cirkulácia a víry

3.9.1 Pohyb tekutinovej častice

Malá tekutinová častica sa pri pohybe prúdovým poľom môže [19, čl. 2.7.1]



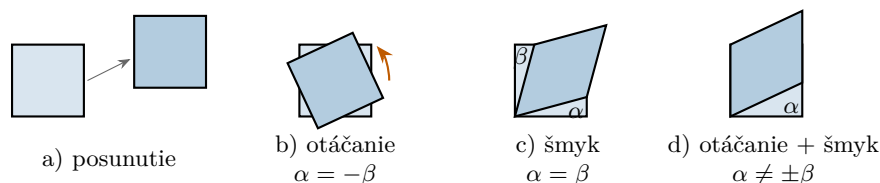
Obr. 3.9. Kármánova vírová cesta. Hore: striedavé odtrhávanie vírov z valca a priečna sila, ktorá pri tom vzniká (schematicky, podľa opisu v [19, čl. 7.5]). Dole: prúdnicie modelu dvoch radov bodových vírov s opačným zmyslom otáčania v sústave, ktorá sa pohybuje spolu s vírmi (vlastný výpočet; rozostup radov, vzdialenosť vírov a ich sila sú zvolené ilustratívne). Červené body: víry jedného zmyslu otáčania, oranžové: opačného.



Obr. 3.10. Režimy obtekania kruhového valca v závislosti od Reynoldsovho čísla (hranice podľa [19, čl. 7.5]; biele oblasti sú prechodné).

- *posúvať* (translácia),
- *meniť objem* – pri nestlačiteľnom prúde sa objem nemení,
- *deformovať* – meniť tvar pri zachovaní objemu; túto deformáciu možno rozložiť na *otáčanie* a *šmykové pretvorenie* (obr. 3.11).

Ak sa hrana častice pôvodne rovnobežná s osou x pootočí o uhol α proti smeru hodinových ručičiek a hrana rovnobežná s osou y o uhol β v smere hodinových ručičiek, častica sa ako celok otočí o $(\alpha - \beta)/2$ proti smeru hodinových ručičiek a šmykovo sa pretvorí o $(\alpha + \beta)/2$ [19, čl. 2.7.1, 2.7.2]. Uhlová rýchlosť častice je teda priemerom uhlových rýchlostí dvoch na seba kolmých materiálových úsečiek.



Obr. 3.11. Pohyb a deformácia malej tekutinovej častice pri rovinnom prúde (schematicky, podľa [19, obr. 2.24]). Pôvodný tvar je svetlý, nový tmavší.

3.9.2 Vírivosť

Pri rovinnom prúde s rýchlosťou (u, v) je **vírivosť** [19, rov. (2.76)]

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.17)$$

čo je dvojnásobok okamžitej uhlovej rýchlosti častice $d(\alpha - \beta)/(2 dt)$. V trojrozmernom prúde je vírivosť vektor – rotor rýchlostného poľa,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (3.18)$$

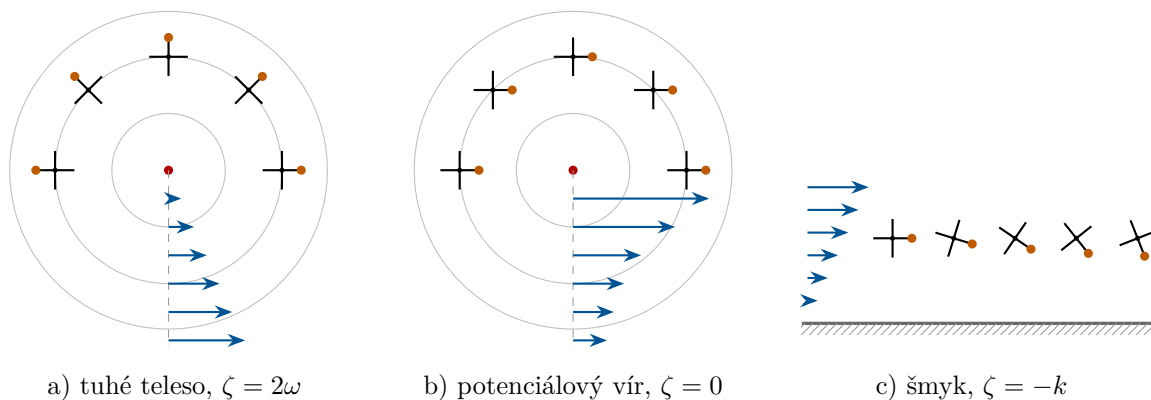
ktorého zložky sú dvojnásobky uhlových rýchlostí častice okolo jednotlivých osí [19, čl. 2.7.4]. Jednotkou vírivosti je rad/s. Náborne si vírivosť možno predstaviť ako otáčanie veľmi malého lopatkového kolieska unášaného prúdom: koliesko sa otáča uhlovou rýchlosťou $\zeta/2$. Analogicky k prúdniciam a prúdovým trubiciam definujeme **vírové čiary** (dotyčnice k vektoru vírivosti) a **vírové trubice** [19, čl. 2.7.4].

Pri prúde s kruhovými prúdnicami a obvodovou rýchlosťou $v_\theta(r)$ je [19, rov. (2.79)]

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{d(r v_\theta)}{dr}. \quad (3.19)$$

Tri jednoduché príklady na obr. 3.12 ukazujú, že vírivosť nie je to isté ako zakrivenie prúdnic:

- *Otáčanie ako tuhé teleso*, $v_\theta = \omega r$: podľa (3.19) $\zeta = 2\omega$ všade. Častice obiehajú a zároveň sa otáčajú – tak sa správa jadro víru (čl. 3.9.5).
- *Potenciálový vír*, $v_\theta = \Gamma/(2\pi r)$: súčin $r v_\theta$ je konštantný, a preto $\zeta = 0$ všade okrem osi. Častice obiehajú po kružniciach, ale *neotáčajú sa* – prúdenie je nevírové, hoci prúdnice sú kružnice.



Obr. 3.12. Poloha a natočenie malého lopatkového kolieska unášaného prúdom v piatich okamihoch (vlastný výpočet; koliesko sa otáča uhlovou rýchlosťou $\zeta/2$, oranžový bod vyznačuje jedno rameno). Modré šípky ukazujú rozloženie rýchlosti. a) Pri otáčaní ako tuhé teleso sa koliesko otočí spolu s obetom. b) V potenciálovom víre obieha, ale zachováva smer. c) V šmykovom prúdení sa pri priamočiarom pohybe otáča.

- *Šmykové prúdenie*, $u = ky$, $v = 0$: podľa (3.17) $\zeta = -k$. Prúdnicie sú priamky, a napriek tomu sa častice otáčajú (v smere hodinových ručičiek). Takéto prúdenie je napr. v medznej vrstve.

Vírivosť súvisí so šmykovým pretvorením, a preto v aerodynamike súvisí s viskozitou [19, čl. 2.7.6]. Ak možno vplyv viskozity zanedbať, je vírivosť spravidla nulová – častice sa pohybujú bez otáčania. Takéto prúdenie sa nazýva **nevírivé** alebo **potenciálové**; rýchlosť potom možno vyjadriť ako gradient potenciálu, $\mathbf{v} = \nabla\phi$ [19, čl. 2.7.6]. Pre nestlačiteľné potenciálne prúdenie z (3.6) vyplýva Laplaceova rovnica $\nabla^2\phi = 0$, ktorá je lineárna – riešenia preto možno skladať (čl. 3.10) [17]. Vírivosť vzniká len vo viskóznom prúdení; pri veľkých Reynoldsových číslach je sústredená v tenkých medzných vrstvách a v úplavách za telesami [19, čl. 2.9] – práve tam, kde sa uplatňuje trenie (čl. 3.7).

Príklad 3.11: Vírivosť v medznej vrstve

Na rovinnej doske z čl. 3.7.2 ($U = 50 \text{ m/s}$) má laminárna medzná vrstva v mieste prechodu hrúbku približne 1 mm. Odhadnite vírivosť v medznej vrstve, ak rýchlostný profil nahradíme priamkou.

Riešenie. Pre $u = Uy/\delta$ je podľa (3.17) $\zeta = -\partial u/\partial y = -U/\delta = -50/0,001 = -5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. Častice v medznej vrstve sa teda otáčajú uhlovou rýchlosťou asi $2,5 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$, kým mimo medznej vrstvy je prúdenie prakticky nevírivé. Skutočný profil je pri stene strmší ako priamka, takže vírivosť pri stene je ešte väčšia.

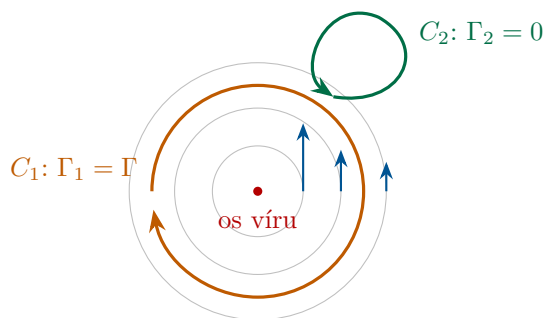
3.9.3 Cirkulácia

Cirkulácia po uzavretej krivke C je

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.20)$$

kde druhá rovnosť vyplýva zo Stokesovej vety (S je plocha ohraničená krivkou C). Cirkulácia je teda tok vírivosti plochou – celková „sila“ vírových čiar, ktoré plochou prechádzajú [19, čl. 2.7.7]. Vírivosť je veličina definovaná v bode, cirkulácia je vlastnosť oblasti ohraničenej

krivkou [19, čl. 2.7.7]. Z (3.20) vyplýva dôležitý dôsledok (obr. 3.13): v nevírovom prúde je cirkulácia po krivke, ktorá neobopína žiadnu vírivosť, nulová; po každej krivke, ktorá obopína os potenciálového víru, je rovnaká a rovná sa Γ víru.



Obr. 3.13. Cirkulácia v potenciálovom víre: krivka C_1 obopína os víru, cirkulácia po nej sa rovná sile víru bez ohľadu na tvar krivky; krivka C_2 os neobopína a cirkulácia po nej je nulová (schematicky).

Príklad 3.12: Cirkulácia pri otáčaní ako tuhé teleso

Tekutina rotuje ako tuhé teleso uhlovou rýchlosťou 2 rad/s. Vypočítajte cirkuláciu po kružnici s polomerom 0,5 m oboma spôsobmi podľa (3.20).

Riešenie. Krivkový integrál: $v_\theta = \omega r = 1$ m/s, $\Gamma = 2\pi r v_\theta = 2\pi \cdot 0,5 \cdot 1 = 3,14$ m²/s. Plošný integrál: $\zeta = 2\omega = 4$ s⁻¹ je konštantná, $\Gamma = \zeta \pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 0,25 = 3,14$ m²/s. Pri potenciálovom víre by bol plošný integrál mimo osi nulový – celá cirkulácia je sústredená v osi.

3.9.4 Vírové vlákno a Biotov–Savartov zákon

Ak je vírivosť sústredená do veľmi tenkej trubice, hovoríme o **vírovom vlákne** so silou (cirkuláciou) Γ . Podľa Helmholtzových viet je sila vírového vlákna pozdĺž neho konštantná a vírové vlákno nemôže v tekutine končiť – musí byť uzavreté alebo siahť do nekonečna či k hranici oblasti [17].

Rýchlosť, ktorú vírové vlákno *indukuje* v okolitom priestore, určuje **Biotov–Savartov zákon**. Element vlákna $d\mathbf{l}$ vyvoláva v bode vzdialenom o vektor $\mathbf{r}$ rýchlosť

$$d\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (3.21)$$

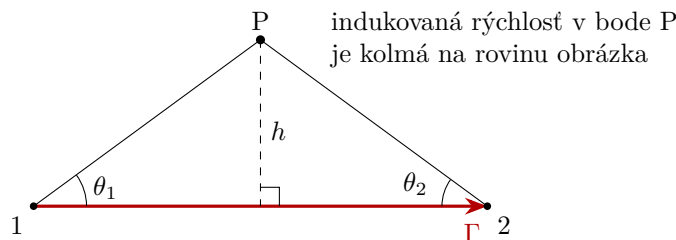
Integráciou pre priamy úsek vlákna (obr. 3.14) dostaneme veľkosť indukovanej rýchlosti v bode vo vzdialenosti h od priamky vlákna

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2), \quad (3.22)$$

kde θ_1 a θ_2 sú uhly medzi vláknom a spojnicami bodu s koncami úseku. Pre nekonečne dlhé vlákno ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$) a pre polonekonečné vlákno, ktoré začína v päte kolmice z bodu ($\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi$), vyplýva

$$v_\infty = \frac{\Gamma}{2\pi h}, \quad v_{\text{polonek.}} = \frac{\Gamma}{4\pi h}. \quad (3.23)$$

Smer indukovanej rýchlosti je kolmý na rovinu určenú vláknom a bodom (pravidlo pravej ruky).



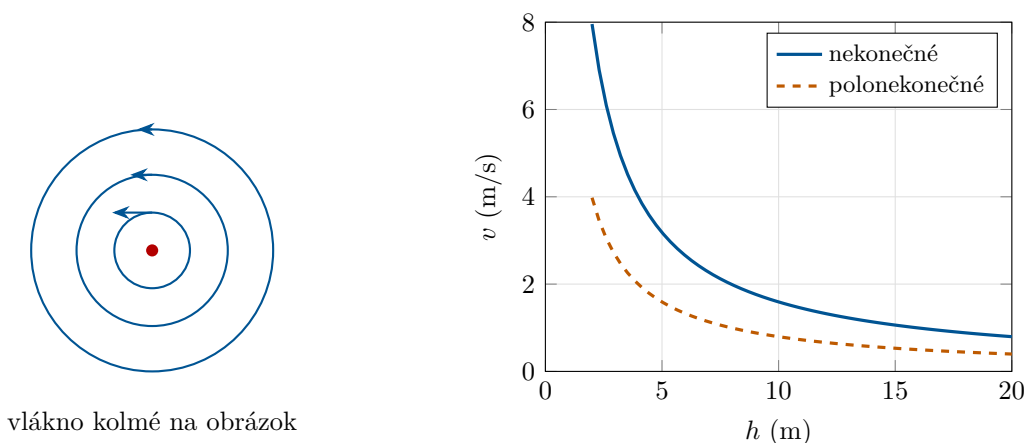
Obr. 3.14. Priamy úsek vírového vlákna a uhly v Biotovom–Savartovom zákone (3.22). Uhly sa merajú od smeru vlákna.

Biotov–Savartov zákon použijeme na výpočet rýchlostí indukovaných vírmi, ktoré vznikajú na lopatkách a odchádzajú do úplavy rotora (kap. 6, 8 and 12). Koncové víry lopatiek sú v prvom priblížení polonekonečné vlákna tvaru skrutkovice.

Príklad 3.13: Rýchlosť indukovaná vírovým vláknom

Vírové vlákno má cirkuláciu $\Gamma = 100 \text{ m}^2/\text{s}$. Určte veľkosť rýchlosti indukovanej vo vzdialenosti 5 m od vlákna, ak je vlákno (a) nekonečne dlhé, (b) polonekonečné a bod leží na kolmici k jeho začiatku.

Riešenie. Podľa (3.23): (a) $v = 100/(2\pi \cdot 5) = 3,18 \text{ m/s}$, (b) $v = 100/(4\pi \cdot 5) = 1,59 \text{ m/s}$.



Obr. 3.15. Rýchlosť indukovaná priamym vírovým vláknom: prúdnicie sú kružnice okolo vlákna a rýchlosť klesá nepriamo úmerne vzdialenosti podľa (3.23) ($\Gamma = 100 \text{ m}^2/\text{s}$, čl. 3.9.4).

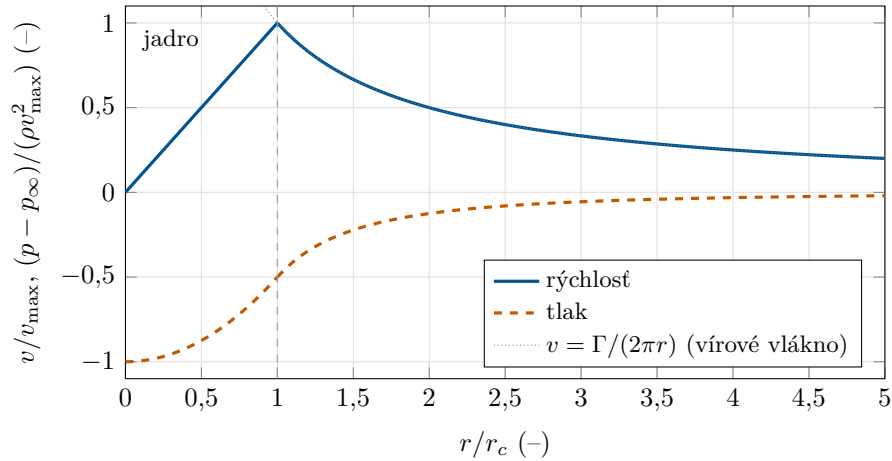
3.9.5 Jadro víru a Rankinov vír

Podľa (3.23) by rýchlosť pri osi vírového vlákna rástla nad všetky medze. Rovnováha tlakovej sily a odstredivej sily tekutinovej častice na kruhovej dráhe dáva $dp/dr = \rho v^2/r$ a spolu s Bernoulliho rovnicou mimo jadra vedie k $vr = \text{konšt.}$ [19, rov. (5.13)–(5.15)]. Blízko osi však vzduch rotuje ako tuhé teleso s konštantnou uhlovou rýchlosťou; táto oblasť sa nazýva **jadro víru** [19, čl. 5.2.3]. Idealizovaný model s ostrou hranicou jadra s polomerom r_c sa nazýva **Rankinov vír**:

$$v(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \frac{r}{r_c} \quad (r \leq r_c), \quad v(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (r > r_c). \quad (3.24)$$

V skutočnom víre nie je hranica jadra ostrá a maximum rýchlosti je zaoblené [19, čl. 5.2.3].

Z rovnováhy $dp/dr = \rho v^2/r$ vyplýva, že tlak smerom k osi klesá. Mimo jadra je podľa Bernoulliho rovnice $p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho v^2$, takže na hranici jadra je pokles tlaku $\frac{1}{2}\rho v_{\max}^2$, kde $v_{\max} = \Gamma/(2\pi r_c)$. V jadre ($v = \omega r$) integráciou $dp/dr = \rho \omega^2 r$ dostaneme ďalší pokles $\frac{1}{2}\rho v_{\max}^2$. Tlak na osi Rankinovho víru je teda o $\rho v_{\max}^2$ nižší ako p_∞ (obr. 3.16). Pokles tlaku a teploty v jadrách vírov za koncami krídel môže spôsobiť kondenzáciu vodnej pary, takže víry sa stanú viditeľnými [19, čl. 5.1.2].



Obr. 3.16. Rýchlosť a tlak v Rankinovom víre podľa (3.24). Tlak je vypočítaný z radiálnej rovnováhy a Bernoulliho rovnice (vlastný výpočet).

Príklad 3.14: Jadro víru

Vírové vlákno z čl. 3.9.4 ($\Gamma = 100 \text{ m}^2/\text{s}$) má jadro s polomerom 0,5 m. Určte najväčšiu rýchlosť a pokles tlaku na osi víru ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

Riešenie. $v_{\max} = \Gamma/(2\pi r_c) = 100/(2\pi \cdot 0,5) = 31,8 \text{ m/s}$. Pokles tlaku na osi $\rho v_{\max}^2 = 1,225 \cdot 31,8^2 = 1241 \text{ Pa}$, polovica z toho pripadá na oblasť mimo jadra.

3.9.6 Kuttova–Žukovského veta

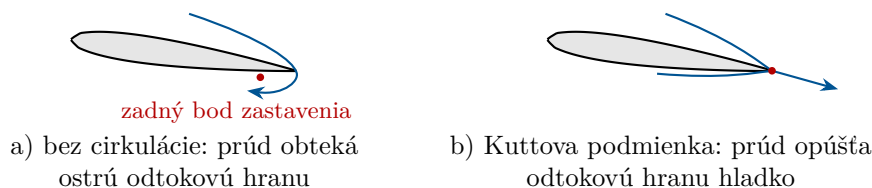
Pri dvojrozmernom obtekaní telesa (napr. profilu nekonečne dlhého krídla) nestlačiteľnou tekutinou bez trenia rýchlosťou V_∞ pôsobí na teleso sila kolmá na smer nerušeného prúdu, ktorej veľkosť na jednotku dĺžky je daná **Kuttovou–Žukovského vetou** [17]:

$$L' = \rho V_\infty \Gamma \quad (3.25)$$

kde Γ je cirkulácia po ľubovoľnej uzavretej krivke obopínajúcej teleso. Vztlak je teda priamo úmerný cirkulácii. Odpor je v dvojrozmernom prúde bez trenia nulový (d'Alembertov paradox); skutočný odpor profilu je dôsledkom viskozity.

Aká cirkulácia sa okolo profilu vytvorí, určuje **Kuttova podmienka**: pri profile s ostrou odtokovou hranou opúšťa prúd odtokovú hranu hladko, bez obtekania ostrej hrany [17]. Z nej vyplýva napríklad vzťah teórie tenkého profilu pre vztlak, ktorý uvedieme v kap. 4.

Kuttova–Žukovského veta spája vztlak prierezu lopatky s cirkuláciou okolo neho. Pretože vztlak sa pozdĺž lopatky mení a na konci lopatky klesá na nulu, mení sa aj cirkulácia. Podľa Helmholtzových viet musí každá zmena viazanej cirkulácie odchádzať do úplavy ako voľný vír. Takto vzniká vírová sústava rotora, ktorá indukuje rýchlosti v rovine rotora – fyzikálna podstata javov, ktoré hybnostná teória opisuje pomocou indukčných faktorov (kap. 5 and 6).



Obr. 3.17. Význam Kuttovej podmienky (schematicky). Veľkosť cirkulácie okolo profilu je taká, aby zadný bod zastavenia ležal na odtokovej hrane.

Príklad 3.15: Vztlak a cirkulácia

Profil s tetivou 1 m je obtekaný rýchlosťou 50 m/s ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$). Cirkulácia okolo profilu je $20 \text{ m}^2/\text{s}$. Určte vztlak na jednotku dĺžky a súčiniteľ vztlaku.

Riešenie. Podľa (3.25): $L' = 1,225 \cdot 50 \cdot 20 = 1225 \text{ N/m}$. Súčiniteľ vztlaku (čl. 3.11):

$$c_L = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c} = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c} = \frac{2\Gamma}{V_\infty c} = \frac{2 \cdot 20}{50 \cdot 1} = 0,8.$$

3.10 Skladanie potenciálových prúdení

Pretože Laplaceova rovnica je lineárna (čl. 3.9), možno zložené dvojrozmerné potenciálové prúdenia skladať z jednoduchých [19, čl. 3.3]. Pri dvojrozmernom nestlačiteľnom prúdení je výhodné použiť **prúdovú funkciu** ψ , pre ktorú $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$; rovnica kontinuity je potom splnená automaticky a čiary $\psi = \text{konšt.}$ sú prúdnice. Rozdiel hodnôt ψ dvoch prúdnic je objemový prietok medzi nimi (na jednotku hĺbky). Základné prúdenia v polárnych súradniciach (r, θ) sú (znamienka zodpovedajú uvedenej definícii ψ ; v [19] je ψ definovaná s opačným znamienkom):

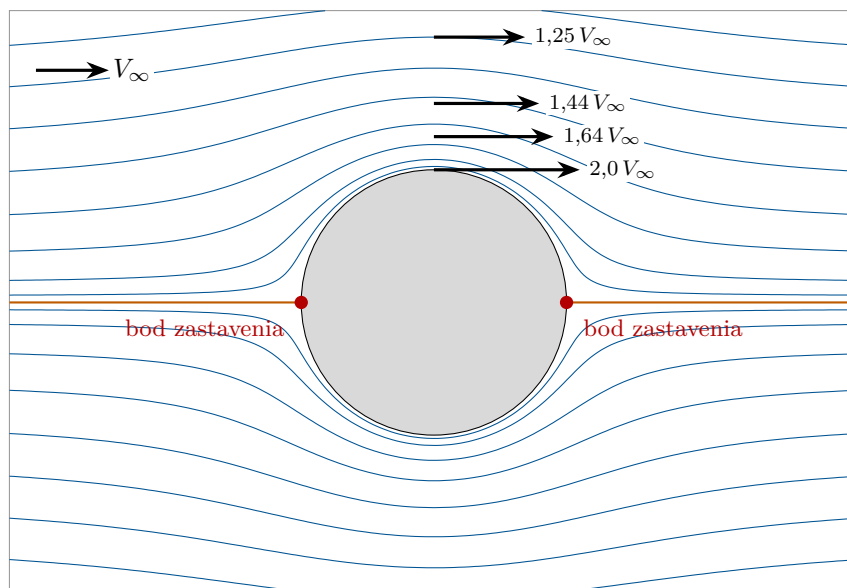
prúdenie	prúdová funkcia
rovnorný prúd rýchlosťou V_∞ v smere x	$\psi = V_\infty r \sin \theta$
zdroj s výdatnosťou m (m^2/s)	$\psi = m\theta/(2\pi)$
vír s cirkuláciou Γ (proti smeru hodinových ručičiek)	$\psi = -\Gamma \ln r/(2\pi)$
dipól s momentom μ (os proti prúdu)	$\psi = -\mu \sin \theta/(2\pi r)$

3.10.1 Obtekanie valca

Súčet rovnomerného prúdu a dipólu dáva $\psi = V_\infty \sin \theta (r - a^2/r)$ s $a = \sqrt{\mu/(2\pi V_\infty)}$. Prúdnicia $\psi = 0$ je kružnica s polomerom a , takže vonkajšie prúdenie je obtekaním valca [19, čl. 3.3.9]. Rýchlosť na povrchu je $2V_\infty \sin \theta$ a nezávisí od polomeru valca; odtiaľ súčiniteľ tlaku $c_{pr} = 1 - 4 \sin^2 \theta$ z obr. 3.3 [19, rov. (3.44), (3.45)].

Prúdnicie potenciálového obtekania valca sú na obr. 3.18. Prúd sa pred valcom rozdelí v prednom bode zastavenia, obteká valec a za ním sa v zadnom bode zastavenia opäť spojí. Nad valcom a pod ním sú prúdnicie zhustené – rýchlosť je tam najväčšia, $2V_\infty$. Na priamke nad valcom ($x = 0$) je rýchlosť $u = V_\infty(1 + a^2/y^2)$, takže vplyv valca so vzdialenosťou rýchlo slabne: vo vzdialenosti priemeru od stredu ($y = 2a$) je rýchlosť už len o 25 % väčšia ako V_∞ . Obraz prúdnic je súmerný spredu aj zozadu, preto je výsledná tlaková sila nulová (d'Alembertov paradox). Skutočné rozloženie tlaku na valci sa s teoretickým zhoduje približne do 70° od

predného bodu zastavenia; ďalej sa od neho výrazne líši a na zadnej strane valca zostáva podtlak, ktorý spôsobuje tvarový odpor [19, čl. 3.3.9] (čl. 3.8).



Obr. 3.18. Potenciálové obtekanie valca: prúdnice $\psi = \text{konšt.}$ s rovnakým rozdielom prietoku medzi susednými prúdnicami a rýchlosť na priamke nad valcom $u/V_\infty = 1 + a^2/y^2$ (vlastný výpočet; porovnaj [19, obr. 3.22]). Hrubou čiarou je deliaca prúdnicca $\psi = 0$. Prúdnicce sú súmerné spredu aj zozadu, výsledná sila je nulová.

Ak k obtekaniu valca pridáme vír s cirkuláciou Γ v smere hodinových ručičiek (**rotujúci valec**), dostaneme [19, čl. 3.3.10]

$$\psi = V_\infty \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a}. \quad (3.26)$$

Rýchlosť na povrchu je $2V_\infty \sin \theta + \Gamma/(2\pi a)$, kde θ meriame od smeru prúdu proti smeru hodinových ručičiek. Nad valcom sa prúd zrýchľuje, pod ním spomaľuje a súčiniteľ tlaku je [19, rov. (3.49)]

$$c_{\text{pr}} = 1 - (2 \sin \theta + B)^2, \quad B = \frac{\Gamma}{2\pi a V_\infty}. \quad (3.27)$$

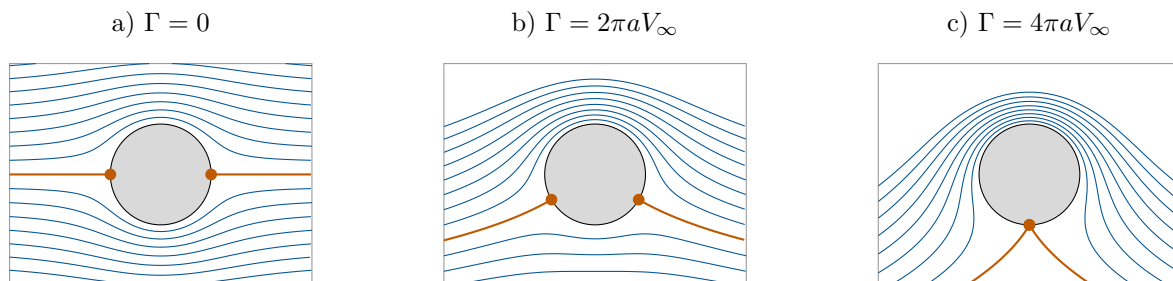
Integráciou tlaku po povrchu dostaneme silu kolmú na prúd $L' = \rho V_\infty \Gamma$, čo je Kuttova–Žukovského veta (3.25); výsledok nezávisí od polomeru valca [19, rov. (3.52)]. Sila na rotujúce teleso v prúde sa nazýva Magnusov jav (čl. 3.10.2).

Body zastavenia na povrchu ležia tam, kde je rýchlosť nulová, t. j. pri $\sin \theta = -\Gamma/(4\pi a V_\infty)$. S rastúcou cirkuláciou sa posúvajú nadol; pri $\Gamma = 4\pi a V_\infty$ splynú v najnižšom bode valca a pri ešte väčšej cirkulácii bod zastavenia valec opustí [19, čl. 3.3.10] (obr. 3.19 and 3.20).

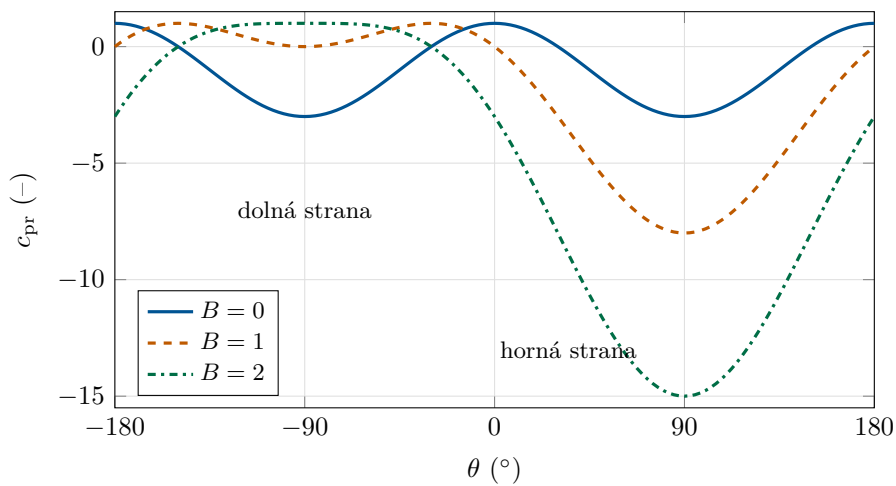
Príklad 3.16: Valec s cirkuláciou

Valec s polomerom 0,5 m je obtekaný rýchlosťou 10 m/s ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$). Aká cirkulácia je potrebná, aby body zastavenia splynuli? Aký je potom vztlak na meter dĺžky a súčiniteľ vztlaku vzťahovaný na priemer?

Riešenie. $\Gamma = 4\pi a V_\infty = 4\pi \cdot 0,5 \cdot 10 = 62,8 \text{ m}^2/\text{s}$. Podľa (3.25) $L' = 1,225 \cdot 10 \cdot 62,8 =$



Obr. 3.19. Prúdnice pri obtekaní valca bez trenia s cirkuláciou (vlastný výpočet podľa (3.26); porovnaj [19, obr. 3.25]). Hrubou čiarou je deliaca prúdnica, bodmi body zastavenia. S rastúcou cirkuláciou sa body zastavenia posúvajú nadol, pri $\Gamma = 4\pi aV_\infty$ splynú.



Obr. 3.20. Súčiniteľ tlaku na povrchu valca s cirkuláciou podľa (3.27); θ je meraný od smeru prúdu (zadný bod) proti smeru hodinových ručičiek, horná strana je pri $\theta = 90^\circ$. Hodnoty $B = 1$ a 2 zodpovedajú obr. 3.19b a c.

770 N/m a

$$c_L = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 2a} = \frac{770}{0,5 \cdot 1,225 \cdot 100 \cdot 1} = 12,6 = 4\pi.$$

Je to oveľa viac, ako dosahujú profily (kap. 4). Výsledok však platí len pre potenciálové prúdenie; skutočné obtekanie valca ovplyvňuje viskozita a odtrhnutie prúdu (čl. 3.8.4).

3.10.2 Magnusov jav

Sila kolmá na smer prúdu, ktorá pôsobí na rotujúce teleso v prúde, sa nazýva **Magnusov jav** podľa jeho objaviteľa [13, čl. A3.6]. V potenciálovom modeli rotujúceho valca (obr. 3.21) je to priamy dôsledok cirkulácie: na strane, kde sa povrch valca pohybuje v smere prúdu, je rýchlosť väčšia a tlak menší, na opačnej strane je rýchlosť menšia a tlak väčší. Rozdiel tlakov medzi horným a dolným bodom valca je podľa (3.27)

$$\frac{p_D - p_H}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = (2 + B)^2 - (2 - B)^2 = 8B \quad (3.28)$$

[19, rov. (3.50), (3.51)] a integráciou tlaku po povrchu vychádza vztlak $L' = \rho V_\infty \Gamma$ [19, rov. (3.52)]. Rovnakú silu by pocítilo aj samotné vírové vlákno so silou Γ , ktoré sa pohybuje rýchlosťou V_∞ ; prímer valca sa vo výsledku nevyskytuje [19, čl. 3.3.10].

V skutočnom prúdení vytvára cirkulačný pohyb okolo rotujúceho telesa trenie na jeho povrchu [13, čl. A3.6]: rotujúci povrch strháva so sebou tekutinu v medznej vrstve. Magnusov jav vysvetľuje napríklad to, prečo sa rotujúce tenisové loptičky v lete stáčajú [13, čl. A3.6], a využíva sa v loptových hrách odpradáva [19, čl. 3.3.10]. Smer sily je ľahké určiť: sila smeruje na tú stranu telesa, na ktorej sa jeho povrch pohybuje v smere prúdu.

Magnusov jav a vztlak profilu majú spoločný pôvod – cirkuláciu okolo telesa. Rozdiel je v tom, čo veľkosť cirkulácie určuje: pri rotujúcom valci rotácia a trenie, pri profile s ostrou odtokovou hranou Kuttova podmienka (obr. 3.17) [19, čl. 4.1.1].

3.11 Aerodynamické sily a ich súčinitele

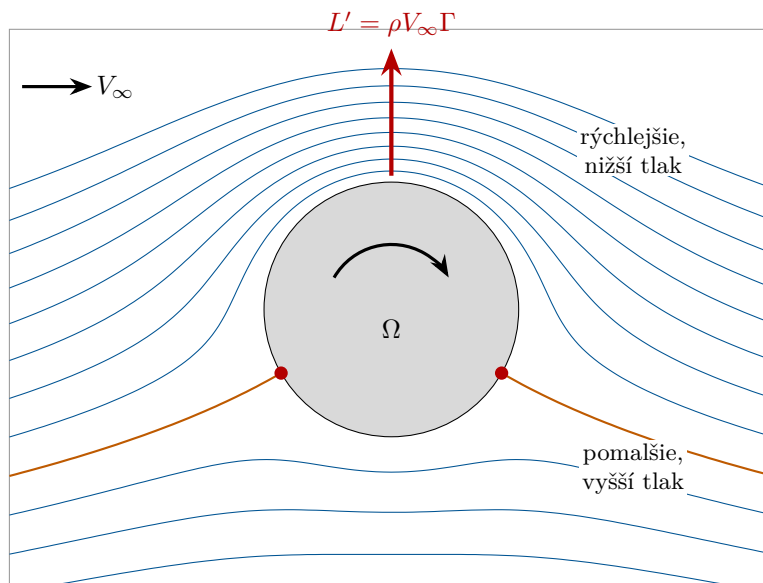
Výslednicu tlakových a trecích síl, ktorými tekutina pôsobí na teleso, rozkladáme na dve zložky [1, 17] (obr. 3.22):

- **vztlak** L (angl. *lift*) – zložka kolmá na smer nerušeného prúdu (pri lopatke na smer relatívnej rýchlosti),
- **odpor** D (angl. *drag*) – zložka v smere nerušeného prúdu.

K nim pristupuje **klopivý moment** M vzťahovaný k zvolenému bodu profilu, spravidla k bodu v štvrtine tetivy od nábežnej hrany. Pre dvojrozmerný profil (sily na jednotku dĺžky, označené čiarkou) definujeme bezrozmerné súčinitele

$$c_L = \frac{L'}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c}, \quad c_D = \frac{D'}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c}, \quad c_M = \frac{M'}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c^2}, \quad (3.29)$$

kde c je tetiva profilu. Uhol medzi tetivou profilu a smerom nerušeného prúdu je **uhol nábehu** α . Z rozmerovej analýzy (čl. 3.6) vyplýva, že pre daný tvar profilu sú súčinitele funkciami

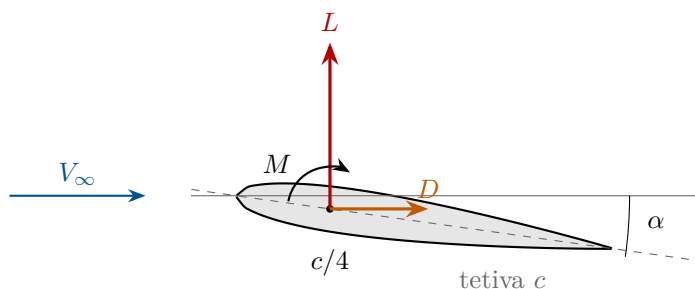


Obr. 3.21. Magnusov jav v potenciálovom modeli: valec rotujúci v smere hodinových ručičiek ($\Gamma = 2\pi a V_\infty$, prúdnice podľa (3.26), vlastný výpočet). Povrch valca sa hore pohybuje v smere prúdu, prúd sa tam zrýchľuje a tlak klesá; dole je to naopak. Body zastavenia (červené) sú posunuté nadol, sila pôsobí kolmo na prúd smerom nahor.

uhla nábehu, Reynoldsovho a Machovho čísla:

$$c_L = c_L(\alpha, Re, M), \quad c_D = c_D(\alpha, Re, M), \quad c_M = c_M(\alpha, Re, M). \quad (3.30)$$

Pri veterných turbínach je vplyv Machovho čísla malý (čl. 3.5), takže rozhodujúce sú uhol nábehu a Reynoldsovo číslo. Priebeh týchto závislostí pre konkrétne profily je obsahom kap. 4.



Obr. 3.22. Vztlak, odpor a klopivý moment pôsobiace na profil (schematicky). Vztlak je kolmý a odpor rovnobežný so smerom nerušeného prúdu; α je uhol nábehu.

Pomer vztlaku k odporu c_L/c_D sa nazýva **aerodynamická jemnosť** (angl. *lift-to-drag ratio*). Ako ukážeme v kap. 9, veľká jemnosť profilu je predpokladom veľkého súčiniteľa výkonu rotora.

3.12 Krídlo konečného rozpätia

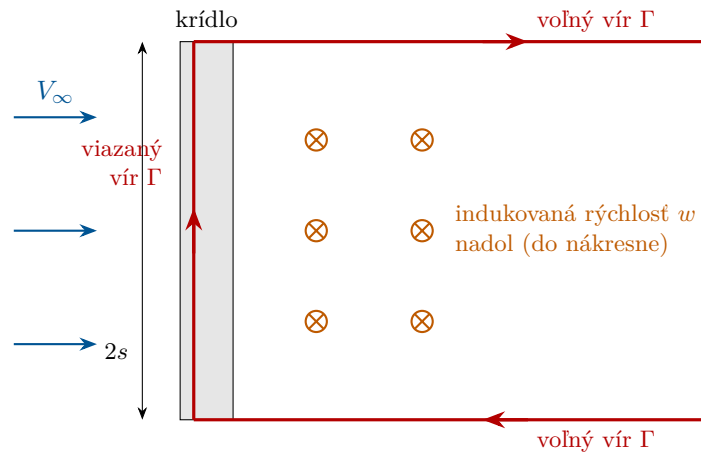
Charakteristiky profilu platia pre dvojrozmerné prúdenie, t.j. pre nekonečne dlhé krídlo. Krídlo konečného rozpätia – a rovnako lopatka rotora – sa správa inak, pretože na jeho koncoch sa vyrovnávajú tlaky sacej a tlakovej strany.

3.12.1 Vírová sústava krídla

Vírovú sústavu krídla tvoria tri časti [19, čl. 5.1]:

- **rozbehový vír**, ktorý vznikne pri rozbehu krídla na odtokovej hrane a zostane za krídlom; má rovnakú silu a opačný zmysel ako cirkulácia okolo krídla,
- **voľné (odtokové) víry**: nad krídlom prúdi vzduch od koncov ku stredu, pod krídlom opačne alebo menej; na odtokovej hrane sa rozdiel priečných rýchlostí zvinie do malých pozdĺžnych vírov, ktoré sa zvinú do dvoch veľkých vírov tesne vo vnútri od koncov krídla,
- **viazaný vír**, ktorý v teórii nahrádza samotné krídlo.

Najjednoduchším modelom je **podkovovitý vír**: viazaný vír s konštantnou cirkuláciou pozdĺž rozpätia, ktorý na koncoch krídla pokračuje dvoma voľnými vírmi do úplavy (obr. 3.23). Podľa Helmholtzových viet sa sila víru pozdĺž neho nemení, preto každá zmena viazanej cirkulácie pozdĺž rozpätia musí odísť do úplavy ako voľný vír [19, čl. 5.2.1]. V **Prandtlovej teórii nosnej čiary** sa krídlo nahradí jedným viazaným vírom s premennou cirkuláciou $\Gamma(z)$, z ktorého odchádza spojitá vrstva voľných vírov [19, čl. 5.5.1].



Obr. 3.23. Podkovovitý vír v pôdoryse: viazaný vír nahrádza krídlo, voľné víry odchádzajú z koncov krídla do úplavy a indukujú za krídlom a na krídle rýchlosť smerom nadol (schematicky, podľa [19, čl. 5.1]).

3.12.2 Indukovaná rýchlosť a indukovaný odpor

Voľné víry indukujú na krídle rýchlosť w smerom nadol (angl. *downwash*). Prúd, ktorý prierezu krídla „vidí“, je preto odklonený o uhol $\varepsilon = w/V_\infty$ a efektívny uhol nábehu prierezu je $\alpha - \varepsilon$ [19, čl. 5.5.2]. Sila podľa Kuttovej–Žukovského vety je kolmá na odklonený prúd, a preto má zložku proti smeru pohybu – **indukovaný odpor**. Na jednotku rozpätia je vztlak $\rho V_\infty \Gamma$ a indukovaný odpor $\rho w \Gamma$ [19, rov. (5.34)–(5.36)]. Energeticky zodpovedá indukovaný odpor kinetickej energii voľných vírov, ktorá zostáva v úplave [19, čl. 5.5.2].

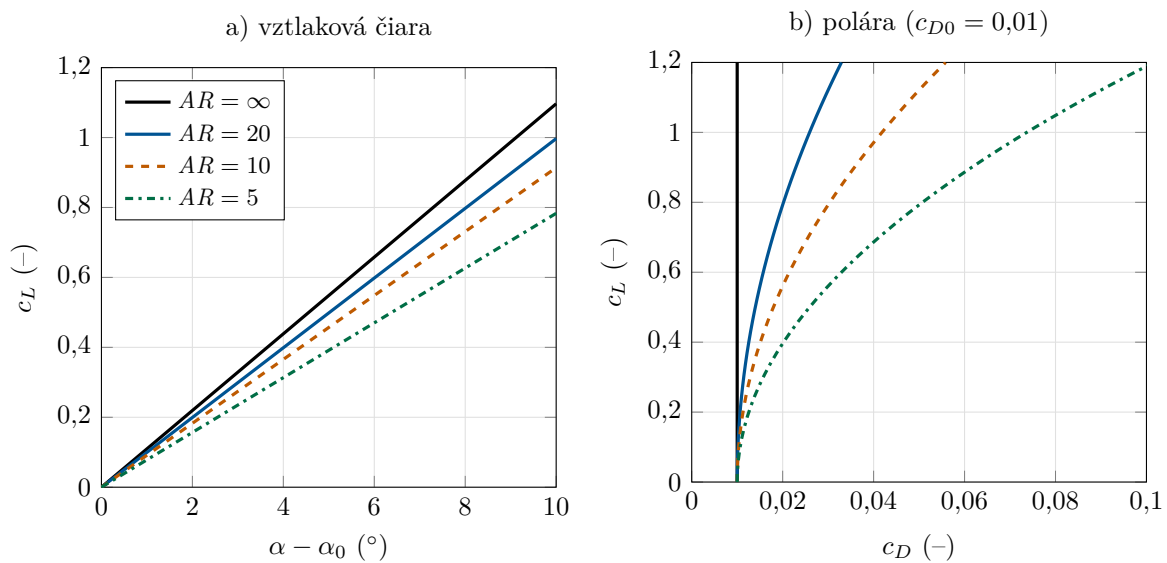
Pri **eliptickom rozložení cirkulácie** po rozpätí je indukovaná rýchlosť pozdĺž rozpätia konštantná a súčiniteľ indukovaného odporu je [19, rov. (5.43), (5.50)]

$$c_{Di} = \frac{c_L^2}{\pi AR} (1 + \delta), \quad AR = \frac{(2s)^2}{S}, \quad (3.31)$$

kde AR je **štíhlost** krídla (rozpätie $2s$, plocha S) a $\delta \geq 0$ vyjadruje odchýlku od eliptického rozloženia; pre eliptické rozloženie je $\delta = 0$ a indukovaný odpor je najmenší [19, čl. 5.5.5]. Uhol ε znižuje aj sklon vztlakovej čiary; pre eliptické krídlo [19, rov. (5.64)]

$$a = \frac{dc_L}{d\alpha} = \frac{a_\infty}{1 + a_\infty/(\pi AR)}, \quad (3.32)$$

kde a_∞ je sklon vztlakovej čiary profilu (podľa teórie tenkého profilu 2π na radián, kap. 4). Krídlo s väčšou šťouhlostou sa blíži dvojrozmernému prípadu (obr. 3.24).



Obr. 3.24. Vplyv šťouhlosti eliptického krídla na vztlakovú čiaru podľa (3.32) a na poláru s indukovaným odporom podľa (3.31) (vlastný výpočet pre $a_\infty = 2\pi$ a zvolený konštantný profilový odpor $c_{D0} = 0,01$).

Príklad 3.17: Eliptické krídlo

Eliptické krídlo so šťouhlostou 8 pracuje pri $c_L = 1,0$. Profil má $a_\infty = 2\pi$. Určte sklon vztlakovej čiary krídla, uhol ε a súčiniteľ indukovaného odporu.

Riešenie. Podľa (3.32) $a = 2\pi/(1 + 2\pi/(8\pi)) = 2\pi/1,25 = 5,03 \text{ rad}^{-1}$ (0,0877 na stupeň). Pre eliptické krídlo $\varepsilon = c_L/(\pi AR) = 1/(8\pi) = 0,0398 \text{ rad} = 2,28^\circ$ – o toľko väčší uhol nábehu potrebuje krídlo oproti profilu na dosiahnutie rovnakého c_L . Podľa (3.31) $c_{Di} = 1/(8\pi) = 0,0398$, teda asi štvornásobok profilového odporu $c_{D0} = 0,01$ zvoleného na obr. 3.24.

Lopatka veternej turbíny je krídlo s veľkou šťouhlostou, ktoré sa však pohybuje po kružnici. Volné víry, ktoré z nej odchádzajú – najmä silný vír z konca lopatky –, vytvárajú za rotorom skrutkovicovú vírovú sústavu. Indukované rýchlosti tejto sústavy opisuje hybnostná teória pomocou indukčných faktorov (kap. 5 and 6), vplyv konečného počtu lopatiek a vírov z koncov lopatiek zohľadňuje korekcia strát na konci lopatky (kap. 8).

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Vzduch pri veterných turbínach považujeme za nestlačiteľný ($M < 0,3$); v štandardnej atmosfére na hladine mora je $\nu_0 = 1,4607 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.
- Rovnica kontinuity $\rho v A = \text{konšt.}$ vysvetľuje rozširovanie prúdovej trubice za rotorom; veta o zmene hybnosti umožňuje určiť silu na teleso z veličín na hranici kontrolného objemu.
- Bernoulliho rovnica $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konšt.}$ platí pozdĺž prúdnice pri prúdení bez trenia a bez prívodu či odvodu energie – nie cez rotor.
- Reynoldsovo číslo prierezov lopatiek veľkých turbín je rádovo 10^6 až 10^7 ; charakteristiky profilov od neho závisia.
- Medzná vrstva môže byť laminárna alebo turbulentná; pri nepriaznivom tlakovom gradiente sa môže odtrhnúť, čo na profile vedie k stallu.
- Vztlak je úmerný cirkulácii, $L' = \rho V_\infty \Gamma$; zmeny cirkulácie pozdĺž lopatky vytvárajú voľné víry, ktorých indukované rýchlosti určuje Biotov–Savartov zákon.
- Vírivosť $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ je dvojnásobok uhlovej rýchlosti častice; potenciálový vír je nevírivý, šmykové prúdenie vírivé. Cirkulácia je tok vírivosti.
- Magnusov jav: rotujúce teleso v prúde vytvára cirkuláciu a silu $\rho V_\infty \Gamma$ kolmú na prúd smerom k strane, kde sa povrch pohybuje v smere prúdu.
- Skutočný vír má jadro rotujúce ako tuhé teleso; na osi Rankinovho víru je tlak nižší o ρv_{max}^2 .
- Skladaním potenciálových prúdení dostaneme obtekanie valca; s cirkuláciou vzniká vztlak $\rho V_\infty \Gamma$ a body zastavenia sa posúvajú.
- Odpor sa delí na trecí a tlakový (tvarový, indukovaný, vlnový); doska kolmá na prúd má len tlakový, doska rovnobežná len trecí odpor, valec asi 95 % tvarového, profil 40 až 80 % trecieho odporu.
- Pri obtekaní valca sa pri $Re > 41$ odtrhávajú víry (Kármánova vírová cesta, $S \approx 0,2$); pri kritickom $Re \approx 3 \cdot 10^5$ náhle klesá odpor.
- Aerodynamické sily profilu opisujú súčinitele c_L , c_D , c_M ako funkcie uhla nábehu a Reynoldsovho čísla.
- Krídlo konečného rozpätia má voľné víry, indukovaný odpor $c_{Di} = c_L^2(1 + \delta)/(\pi AR)$ a menší sklon vztlakovej čiary ako profil.

Kontrolné otázky

1. Ako závisí dynamická viskozita vzduchu od teploty a tlaku?
2. Čo je prúdová trubica a prečo je dôležitá pre hybnostnú teóriu rotora?

3. Napíšte vetu o zmene hybnosti pre kontrolný objem. Aké sily v nej vystupujú?
4. Za akých predpokladov platí Bernoulliho rovnica? Prečo ju nemožno použiť pozdĺž prúdnic prechádzajúcej rotorom?
5. Aký je fyzikálny význam Reynoldsovho čísla? Aká je charakteristická dĺžka a rýchlosť pre prierez lopatky?
6. Prečo možno prúdenie okolo lopatiek veterných turbín považovať za nestlačiteľné?
7. Aký je rozdiel medzi laminárnou a turbulentnou medznou vrstvou? Ktorá z nich je odolnejšia proti odtrhnutiu a prečo?
8. Za akých podmienok nastáva odtrhnutie medznej vrstvy? Ako sa prejaví na profile lopatky?
9. Definujte vírivosť a cirkuláciu. Aký je medzi nimi vzťah?
10. Formulujte Kuttovu–Žukovského vetu. Čo určuje veľkosť cirkulácie okolo profilu?
11. Prečo z lopatky rotora odchádzajú do úplavy voľné víry?
12. Prečo potenciálový vír nie je vírivé prúdenie, hoci sú jeho prúdnicie kružnice? Prečo je šmykové prúdenie vírivé?
13. Aké zložky odporu poznáte? Ktoré z nich závisia od viskozity?
14. Uveďte teleso s prevládajúcim tlakovým, trecím a kombinovaným odporom. Prečo má aerodynamicky tvarované teleso malý odpor?
15. Vysvetlite Magnusov jav. Akým smerom pôsobí sila na rotujúci valec?
16. Prečo je tlak v jadre víru nižší ako v okolí?
17. Ako sa mení poloha bodov zastavenia na valci s rastúcou cirkuláciou? Od čoho závisí vztlak rotujúceho valca?
18. Opíšte režimy obtekania valca v závislosti od Reynoldsovho čísla. Čo je kritické Reynoldsovo číslo?
19. Prečo môže odtrhávajúce vírov rozkmitať valcovú konštrukciu?
20. Definujte súčinitele vztlaku, odporu a momentu. Od čoho závisia?
21. Z čoho sa skladá vírová sústava krídla? Prečo vzniká indukovaný odpor a ako závisí od štíhlosti?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ a $\nu = 1,461 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Úloha 3.1. Vypočítajte dynamickú a kinematickú viskozitu vzduchu v štandardnej atmosfére vo výške 1000 m ($T = 281,65 \text{ K}$, $\rho = 1,112 \text{ kg/m}^3$, pozri tab. 1.2).

(Výsledok: $\mu \approx 1,758 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$, $\nu \approx 1,581 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)

Úloha 3.2. Vo veternom tuneli sa prúd zužuje z prierezu $2,25 \text{ m}^2$ v usmerňovacej komore na $0,25 \text{ m}^2$ v meracom priestore. Rýchlosť v komore je 5 m/s . Určte rýchlosť v meracom priestore a rozdiel statických tlakov medzi komorou a meracím priestorom.

(Výsledok: 45 m/s ; 1225 Pa)

Úloha 3.3. Pitotova trubica meria rozdiel celkového a statického tlaku 150 Pa . Aká je rýchlosť prúdu?

(Výsledok: $15,6 \text{ m/s}$)

Úloha 3.4. Na povrchu profilu obtekaného rýchlosťou 40 m/s je miestna rýchlosť na okraji medznej vrstvy 56 m/s . Určte súčiniteľ tlaku v tomto mieste a rozdiel tlaku oproti tlaku nerušeného prúdu.

(Výsledok: $c_{pr} = -0,96$; $p - p_{\infty} \approx -941 \text{ Pa}$)

Úloha 3.5. Aké je Reynoldsovo číslo prierezu lopatky s tetivou $3,5 \text{ m}$ obtekaného rýchlosťou 25 m/s ? Určte aj Machovo číslo ($a = 340,3 \text{ m/s}$).

(Výsledok: $Re \approx 6,0 \cdot 10^6$; $M \approx 0,073$)

Úloha 3.6. Rovinná doska dĺžky $0,5 \text{ m}$ a šírky 1 m je obtekaná rýchlosťou 10 m/s . Overte, že medzná vrstva je laminárna po celej dĺžke (kritické $Re_x = 5 \cdot 10^5$), a vypočítajte hrúbku medznej vrstvy na konci dosky a trecí odpor oboch strán dosky.

(Výsledok: $Re_L \approx 3,4 \cdot 10^5$; $\delta \approx 4,3 \text{ mm}$; $D \approx 0,14 \text{ N}$)

Úloha 3.7. V úplave za telesom (dvojrozmerné prúdenie, $U = 20 \text{ m/s}$) je rýchlostný profil rovnaký ako v čl. 3.4 s polovičnou šírkou $b = 0,1 \text{ m}$. Určte odpor na jednotku dĺžky a súčiniteľ odporu vzťahovaný na charakteristickú dĺžku $0,05 \text{ m}$.

(Výsledok: $D' \approx 16,3 \text{ N/m}$; $c_D \approx 1,33$)

Úloha 3.8. Profil s tetivou $1,5 \text{ m}$ je obtekaný rýchlosťou 60 m/s so súčiniteľom vztlaku $c_L = 1,0$. Určte vztlak na jednotku dĺžky a cirkuláciu okolo profilu.

(Výsledok: $L' \approx 3308 \text{ N/m}$; $\Gamma = 45 \text{ m}^2/\text{s}$)

Úloha 3.9. Odvoďte vzťah (3.23) pre polonekonečné vírové vlákno z (3.22). Aká je rýchlosť indukovaná v bode ležiacom vo vzdialenosti h na kolmici vedenej koncom polonekonečného vlákna, ak vlákno pokračuje do nekonečna *oboma* smermi od tohto bodu? Porovnajte s nekonečným vláknom.

(Výsledok: súčet dvoch polonekonečných vlákien dáva $\Gamma/(2\pi h)$)

Úloha 3.10. Na valci s polomerom $0,3 \text{ m}$ obtekanom rýchlosťou 8 m/s ležia body zastavenia pri $\theta = -45^\circ$ a -135° . Aká je cirkulácia a vztlak na meter dĺžky ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$)?

(Výsledok: $\Gamma = 21,3 \text{ m}^2/\text{s}$; $L' \approx 209 \text{ N/m}$)

Úloha 3.11. Vypočítajte súčiniteľ tlaku na hornom a dolnom okraji valca ($\theta = \pm 90^\circ$) pri $B = \Gamma/(2\pi a V_{\infty}) = 1$.

(Výsledok: hore -8 ; dole 0)

Úloha 3.12. Rankinov vír má cirkuláciu $50 \text{ m}^2/\text{s}$ a jadro s polomerom $0,2 \text{ m}$. Určte najväčšiu rýchlosť a pokles tlaku na osi.

(Výsledok: $v_{\max} = 39,8 \text{ m/s}$; $\Delta p \approx 1940 \text{ Pa}$)

Úloha 3.13. Kotviace lano s priemerom 30 mm je obtekané vetrom rýchlosťou 12 m/s . Odhadnite Reynoldsovo číslo a frekvenciu odtrhávania vírov ($S \approx 0,2$, $\nu = 1,4607 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

(Výsledok: $Re \approx 2,5 \cdot 10^4$; $n \approx 80 \text{ Hz}$)

Úloha 3.14. Eliptické krídlo so štíhlosťou 6 pracuje pri $c_L = 0,8$. Určte súčiniteľ indukovaného odporu a sklon vztlakovej čiary pre $a_\infty = 2\pi$.

(Výsledok: $c_{Di} \approx 0,034$; $a \approx 4,71 \text{ rad}^{-1}$)

Úloha 3.15. Rýchlostné pole je $u = -2y$, $v = 2x$ (m/s , súradnice v m). Určte vírivosť a uhlovú rýchlosť tekutinových častíc. O aké prúdenie ide?

(Výsledok: $\zeta = 4 \text{ s}^{-1}$; $\omega = 2 \text{ rad/s}$; otáčanie ako tuhé teleso)

Úloha 3.16. Dlhá doska so šírkou $0,5 \text{ m}$ je obtekaná rýchlosťou 20 m/s . Odhadnite odpor na meter dĺžky pri obtekaní kolmo na dosku ($c_D = 2,0$) a pozdĺž dosky s laminárnou medznou vrstvou na oboch stranách ($\nu = 1,461 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

(Výsledok: 245 N/m ; asi $0,39 \text{ N/m}$)

Úloha 3.17. Valec rotuje v smere hodinových ručičiek v prúde, ktorý tečie zľava doprava. Akým smerom pôsobí Magnusova sila? Aký je rozdiel súčiniteľov tlaku medzi dolným a horným bodom valca pri $B = 0,5$?

(Výsledok: nahor; $8B = 4$)

Kapitola 4

Aerodynamické profily

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- opísať geometriu profilu a dešifrovať označenie profilov NACA,
- vysvetliť, ako rozloženie tlaku po povrchu profilu vytvára vztlak, a prepočítať normálovú a tangenciálnu silu na vztlak a odpor,
- použiť výsledky teórie tenkého profilu na odhad súčiniteľa vztlaku, uhla nulového vztlaku a momentu,
- určiť zataženie po tetive, polohu pôsobiska vztlaku a vplyv klapky podľa teórie tenkého profilu,
- opísať charakteristiky skutočného profilu v celom rozsahu uhlov nábehu vrátane stallu,
- vysvetliť vplyv Reynoldsovho čísla, drsnosti a hrúbky profilu,
- uviesť požiadavky na profily veterných turbín a príklady rodín profilov, ktoré sa na nich používajú.

Lopatka veternej turbíny je v každom priereze tvorená **aerodynamickým profilom**. Metóda prvkov lopatky (kap. 7) počíta sily na lopatku práve zo súčiniteľov vztlaku a odporu profilov, preto kvalita výpočtu výkonu a zataženia turbíny závisí od toho, ako dobre tieto súčinitele poznáme. V tejto kapitole opíšeme geometriu profilov, vznik aerodynamických síl, výsledky jednoduchých teórií a charakteristiky skutočných profilov. Základným zdrojom údajov o profiloch NACA zostáva monografia Abbotta a von Doenhoffa [20]; profily pre veterné turbíny opisujú [1, 2] a pôvodné práce citované v čl. 4.8.

4.1 Geometria profilu

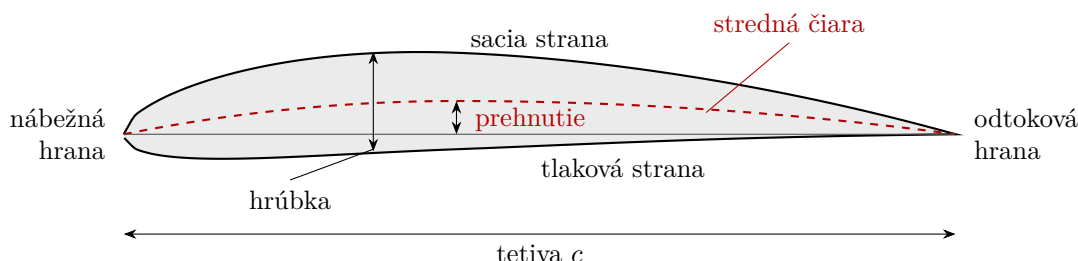
Základné geometrické pojmy sú znázornené na obr. 4.1 [17, 20]:

- **Nábežná hrana** a **odtoková hrana** sú najprednejší a najzadnejší bod profilu. Úsečka, ktorá ich spája, je **tetiva** s dĺžkou c .
- **Stredná čiara** (angl. *mean camber line*) je množina bodov ležiacich v polovici medzi

hornou a dolnou stranou profilu (merané kolmo na strednú čiaru). Najväčšia vzdialenosť strednej čiaru od tetivy je **prehnutie** (zakrivenie) profilu.

- **Hrúbka** profilu sa meria kolmo na strednú čiaru; jej maximum vzťahované na tetivu je **pomerná hrúbka** t/c .
- **Polomer nábežnej hrany** určuje, ako ostro je nábežná hrana zaoblená.

Horná strana profilu, na ktorej pri kladnom vztlaku vzniká podtlak, sa nazýva **sacia strana**, dolná **tlaková strana**. Na lopatke veternej turbíny je tlaková strana privrátená k prichádzajúcemu vetru a sacia strana je odvrátená po vetre, pri náveternom rotore smerom k veži (rýchlostný trojuholník prierezu lopatky opíšeme v kap. 7).



Obr. 4.1. Geometria profilu na príklade profilu NACA 4412 (súradnice vypočítané podľa (4.1) a (4.2)).

4.2 Profily NACA

Systematické rady profilov vyvinula v 30. a 40. rokoch 20. storočia americká NACA (National Advisory Committee for Aeronautics). Ich geometria je definovaná analyticky a výsledky meraní vo veterných tuneloch sú zhrnuté v [20]. Profily NACA sa používali aj na prvých moderných veterných turbínach a niektoré z nich sa používajú dodnes (čl. 4.8).

4.2.1 Štvorciferné profily

Štvorciferné profily NACA vznikli v prvej systematickej sérii skúšok [21]. V označení NACA *MPTT* znamená [20]:

- M – najväčšie prehnutie v percentách tetivy,
- P – polohu najväčšieho prehnutia v desatinách tetivy,
- TT – pomernú hrúbku v percentách tetivy.

Napríklad NACA 4412 má prehnutie 4 % tetivy v 40 % tetivy a pomernú hrúbku 12 %; NACA 0012 je súmerný profil s hrúbkou 12 %.

Rozloženie hrúbky je pre všetky štvorciferné profily rovnaké. S poradnicou x vzťahovanou na tetivu ($0 \leq x \leq 1$) je polovica hrúbky [20]

$$y_t = 5t(0,2969\sqrt{x} - 0,1260x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4), \quad (4.1)$$

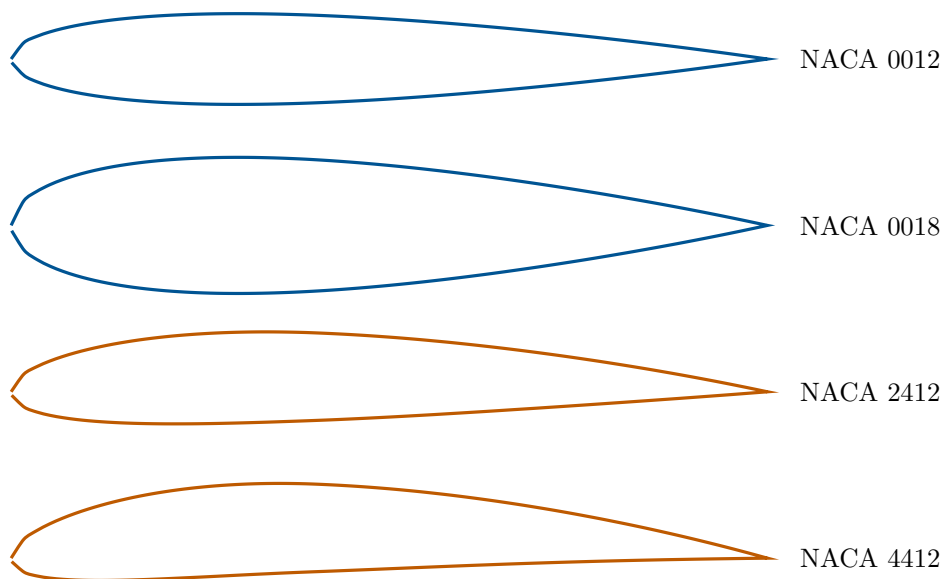
kde t je pomerná hrúbka ($t = TT/100$). Pri koeficiente $-0,1015$ má odtoková hrana malú konečnú hrúbku; na výpočtové účely sa často používa upravený koeficient $-0,1036$, pri ktorom

je odtoková hrana ostrá. Stredná čiara s prehnutím $m = M/100$ v polohe $p = P/10$ je tvorená dvoma parabolami:

$$y_c = \begin{cases} \frac{m}{p^2} (2px - x^2), & 0 \leq x \leq p, \\ \frac{m}{(1-p)^2} [(1-2p) + 2px - x^2], & p < x \leq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Súradnice hornej a dolnej strany dostaneme nanesením hrúbky $\pm y_t$ kolmo na strednú čiaru.

Tvar niekoľkých štvorciferných profilov je porovnaný na obr. 4.2.



Obr. 4.2. Porovnanie štvorciferných profilov NACA: vplyv pomernej hrúbky (0012 a 0018) a prehnutia (0012, 2412, 4412). Súradnice podľa (4.1) a (4.2).

4.2.2 Profily série 6

Profily série 6 boli navrhnuté tak, aby na väčšej časti povrchu zostala medzná vrstva laminárna, čo pri malých súčiniteľoch vztlatku vedie k malému odporu [20]. Pri označení napr. NACA 64-618 znamená prvá číslica sériu (6), druhá polohu minima tlaku na súmernom profile pri nulovom vztlatku v desatinách tetivy (0,4), číslica za pomlčkou návrhový súčiniteľ vztlatku v desatinách (0,6) a posledné dve číslice pomernú hrúbku v percentách (18) [20]. Profil NACA 64-618 je použitý vo vonkajšej časti lopatky referenčnej turbíny NREL 5 MW [6].

Príklad 4.1: Geometria profilu NACA 4412

Určte polohu strednej čiary a polovicu hrúbky profilu NACA 4412 s tetivou 1,5 m v mieste $x = 0,3$ (30 % tetivy). Sklon strednej čiary pri výpočte súradníc povrchu zanedbajte.

Riešenie. $m = 0,04$, $p = 0,4$, $t = 0,12$. Pretože $x < p$, podľa (4.2):

$$y_c = \frac{0,04}{0,16} (2 \cdot 0,4 \cdot 0,3 - 0,3^2) = 0,25 \cdot 0,15 = 0,0375.$$

Podľa (4.1):

$$y_t = 0,6 (0,2969 \cdot 0,5477 - 0,1260 \cdot 0,3 - 0,3516 \cdot 0,09 + 0,2843 \cdot 0,027 - 0,1015 \cdot 0,0081) = 0,0600.$$

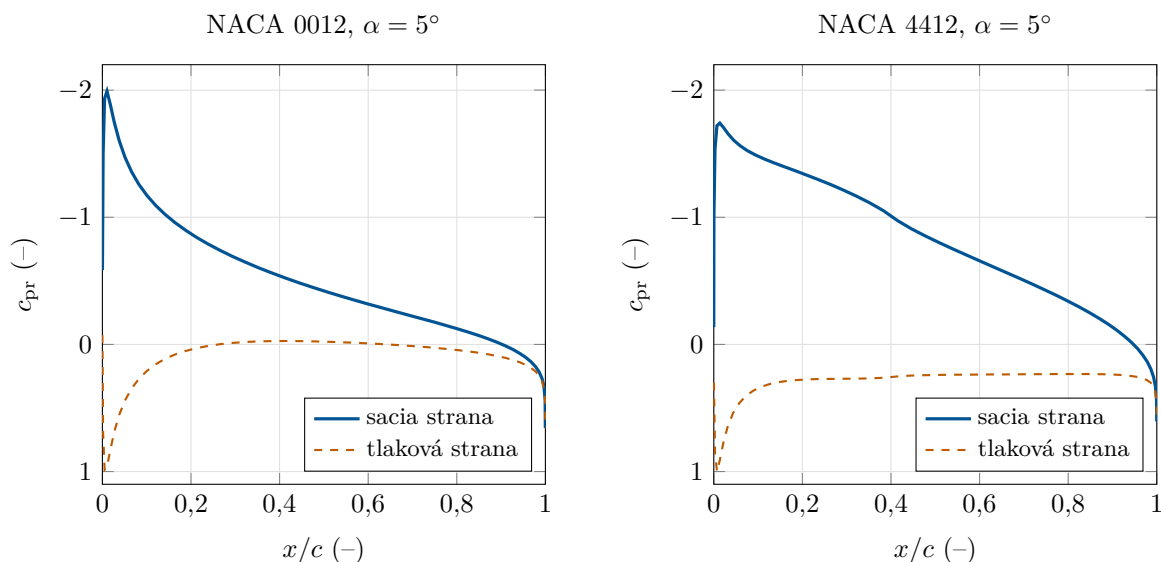
Pri tetive 1,5 m je stredná čiara $0,0375 \cdot 1,5 = 0,056$ m nad tetivou. Horná strana je v $y_c + y_t = 0,0975$, t.j. 146 mm nad tetivou, dolná v $y_c - y_t = -0,0225$, t.j. 34 mm pod tetivou. Hodnota $y_t = 0,0600$ zodpovedá polovici najväčšej hrúbky 12 %: najväčšia hrúbka štvorciferných profilov je približne v 30 % tetivy.

4.3 Rozloženie tlaku a aerodynamické sily

4.3.1 Vznik vztlaku

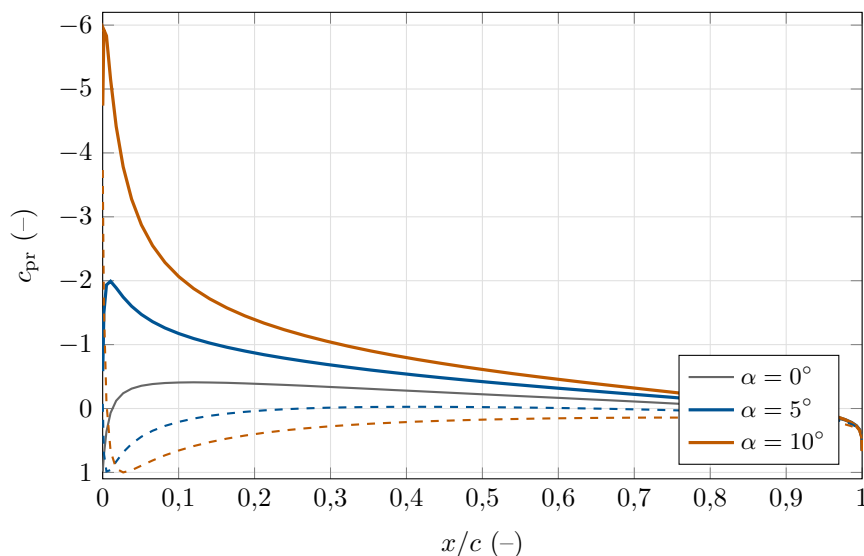
Na profil pôsobí tekutina tlakom kolmo na povrch a trecím napätím v smere dotýčnice. Pri prúde s veľkým Reynoldsovým číslom a bez odtrhnutia tvoria rozhodujúcu časť vztlaku tlakové sily; trenie prispieva najmä k odporu. Pri kladnom uhle nábehu sa prúd na sacej strane zrýchľuje – tlak tam klesá pod tlak nerušeného prúdu ($c_{pr} < 0$). Na tlakovej strane je prúd spomalený a tlak je spravidla vyšší. Rozdiel tlakov na oboch stranách vytvára vztlak [17].

Typické rozloženie súčiniteľa tlaku (3.9) je na obr. 4.3. Súčiniteľ tlaku sa v aerodynamike zvyčajne vynáša so zápornými hodnotami nahor, aby krivka sacej strany ležala hore. Plocha medzi krivkami sacej a tlakovej strany je úmerná normálovej sile. Z obrázka vidno charakteristické črty: bod zastavenia s $c_{pr} = 1$ pri nábežnej hrane, výrazné minimum tlaku (sacia špička) tesne za nábežnou hranou na sacej strane a postupný nárast tlaku smerom k odtokovej hrane. Tento nárast tlaku je nepriaznivý tlakový gradient, proti ktorému musí medzná vrstva na sacej strane prúdiť (čl. 3.7.3).



Obr. 4.3. Rozloženie súčiniteľa tlaku na profiloch NACA 0012 a NACA 4412 pri uhle nábehu 5° pri prúde bez trenia. Vypočítané panelovou metódou s lineárne premenlivou hustotou vírov [22] (čl. 4.5); súčinitele vztlaku sú $c_L = 0,60$ a $c_L = 1,12$. Os c_{pr} je obrátená.

Ako sa rozloženie tlaku mení s uhlom nábehu, ukazuje obr. 4.4: s rastúcim uhlom nábehu rastie sacia špička pri nábežnej hrane a za ňou aj nepriaznivý tlakový gradient na sacej strane. Práve tento gradient vedie pri veľkých uhloch nábehu k odtrhnutiu medznej vrstvy (čl. 4.6).



Obr. 4.4. Rozloženie súčiniteľa tlaku na profile NACA 0012 pri troch uhloch nábehu pri prúde bez trenia (plne sacia strana, čiarkovane tlaková strana; vlastný výpočet panelovou metódou podľa [22]).

4.3.2 Normálová a tangenciálna sila

Integráciou tlaku (a trecieho napätia) po povrchu profilu dostaneme výslednú silu, ktorú je pri meraní na profile výhodné rozložiť na **normálovú silu** N' kolmú na tetivu a **tangenciálnu silu** T' rovnobežnú s tetivou (kladnú smerom k odtokovej hrane). Z meraní tlaku na povrchu (bez trenia) je napríklad súčiniteľ normálovej sily

$$c_N = \int_0^1 (c_{pr,d} - c_{pr,h}) d\left(\frac{x}{c}\right), \quad (4.3)$$

kde indexy h a d označujú hornú a dolnú stranu. Vztlak a odpor sú zložky tej istej sily v súradnicovej sústave natočenej o uhol nábehu, takže [17]

$$c_L = c_N \cos \alpha - c_T \sin \alpha, \quad c_D = c_N \sin \alpha + c_T \cos \alpha. \quad (4.4)$$

Rovnaký prepočet medzi dvoma súradnicovými sústavami použijeme v kap. 7, keď budeme vztlak a odpor prierezu lopatky rozkladať do smeru osi rotora (ťah) a do smeru otáčania (krútiaci moment).

Oba rozklady výslednej sily sú znázornené na obr. 4.5.

Príklad 4.2: Prepočet normálovej a tangenciálnej sily

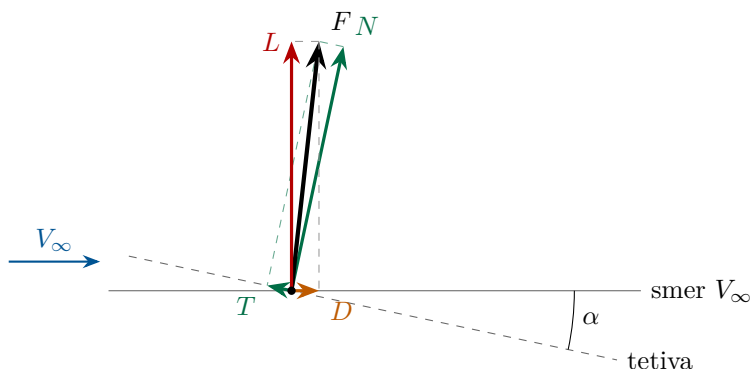
Z merania rozloženia tlaku na profile pri uhle nábehu 8° bol určený súčiniteľ normálovej sily $c_N = 1,10$ a tangenciálnej sily $c_T = -0,140$ (zadané hodnoty; záporná tangenciálna sila smeruje k nábežnej hrane v dôsledku sacej špičky). Určte c_L a c_D .

Riešenie. $\sin 8^\circ = 0,1392$, $\cos 8^\circ = 0,9903$. Podľa (4.4):

$$c_L = 1,10 \cdot 0,9903 - (-0,140) \cdot 0,1392 = 1,089 + 0,019 = 1,108,$$

$$c_D = 1,10 \cdot 0,1392 + (-0,140) \cdot 0,9903 = 0,1531 - 0,1386 = 0,0145.$$

Odpor je malý rozdiel dvoch pomerne veľkých čísel. Preto sa odpor profilu z rozloženia tlaku určuje nepresne a pri meraniach vo veternom tuneli sa zvyčajne určuje z deficitu



Obr. 4.5. Rozklad výslednej aerodynamickej sily F na normálovú a tangenciálnu silu (N , T ; vzhľadom na tetivu) a na vztlak a odpor (L , D ; vzhľadom na smer nerušeného prúdu). Súradnicové sústavy sú navzájom natočené o uhol nábehu α (schematicky, pomer síl je zvolený tak, aby boli všetky zložky zreteľné).

hybnosti v úplave (čl. 3.4).

4.4 Teória tenkého profilu

Teória tenkého profilu nahrádza profil jeho strednou čiarou, na ktorej sú rozložené víry, a z podmienky obtekania strednej čiary a Kuttovej podmienky (čl. 3.9) určí rozloženie cirkulácie. Pre malé uhly nábehu a malé prehnutie dáva jednoduché a pre prax veľmi užitočné výsledky [17, 20]:

1. Súčiniteľ vztlaku rastie lineárne s uhlom nábehu,

$$c_L = 2\pi(\alpha - \alpha_{L0}) \quad (4.5)$$

so sklonom $dc_L/d\alpha = 2\pi \text{ rad}^{-1} \approx 0,110$ na stupeň.

2. **Uhol nulového vztlaku** α_{L0} závisí iba od tvaru strednej čiary. So substitúciou $x = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ je

$$\alpha_{L0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_c}{dx} (\cos \theta - 1) d\theta. \quad (4.6)$$

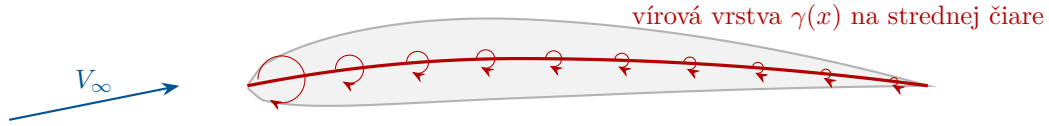
Pre súmerný profil je $\alpha_{L0} = 0$, pre profil s kladným prehnutím je $\alpha_{L0} < 0$.

3. Súčiniteľ momentu k bodu v štvrtine tetivy nezávisí od uhla nábehu. Tento bod je **aerodynamický stred** profilu. Pre súmerný profil je $c_{M,c/4} = 0$, pre prehnutý profil je záporný (moment má tendenciu otáčať nábežnú hranu nadol).

Model teórie tenkého profilu je znázornený na obr. 4.6.

Príklad 4.3: Uhol nulového vztlaku profilu NACA 2412

Určte podľa teórie tenkého profilu uhol nulového vztlaku profilu NACA 2412 a súčiniteľ vztlaku pri uhle nábehu 4° .



Obr. 4.6. Model teórie tenkého profilu: profil je nahradený vírovou vrstvou rozloženou po strednej čiare (schematicky, veľkosť krúžkov naznačuje intenzitu vírov, ktorá je najväčšia pri nábežnej hrane a na odtokovej hrane je podľa Kuttovej podmienky nulová).

Riešenie. Pre NACA 2412 je $m = 0,02$, $p = 0,4$. Deriváciou (4.2):

$$\frac{dy_c}{dx} = \frac{2m}{p^2}(p-x) \quad (x \leq p), \quad \frac{dy_c}{dx} = \frac{2m}{(1-p)^2}(p-x) \quad (x > p).$$

Bod $x = p = 0,4$ zodpovedá $\cos \theta_p = 1 - 2p = 0,2$, t.j. $\theta_p = 1,3694$ rad. Po dosadení $x = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ a integrácii (4.6) po častiach $\langle 0, \theta_p \rangle$ a $\langle \theta_p, \pi \rangle$ (integrály obsahujú iba funkcie $\cos \theta$ a $\cos^2 \theta$) dostaneme

$$\alpha_{L0} = -0,036\,26 \text{ rad} = -2,08^\circ.$$

Podľa (4.5) pri $\alpha = 4^\circ$:

$$c_L = 2\pi \frac{4 + 2,08}{180} \pi = 2\pi \cdot 0,1061 = 0,67.$$

Rovnaký výsledok $\alpha_{L0} = -2,077^\circ$ uvádza pre tento profil [17]. Teória dáva pre NACA 2412 aj $c_{M,c/4} \approx -0,053$.

4.4.1 Rozloženie zaťaženia po tetive

Teória tenkého profilu dáva aj rozloženie rozdielu tlakov medzi tlakovou a sacou stranou $\Delta c_{pr}(x)$, t.j. zaťaženie po tetive. Sklon strednej čiary vyjadríme Fourierovým kosínusovým radom v premennej θ , $x = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ [19, rov. (4.35), (4.41), (4.42)]:

$$\frac{dy_c}{dx} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_c}{dx} d\theta, \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_c}{dx} \cos n\theta d\theta. \quad (4.7)$$

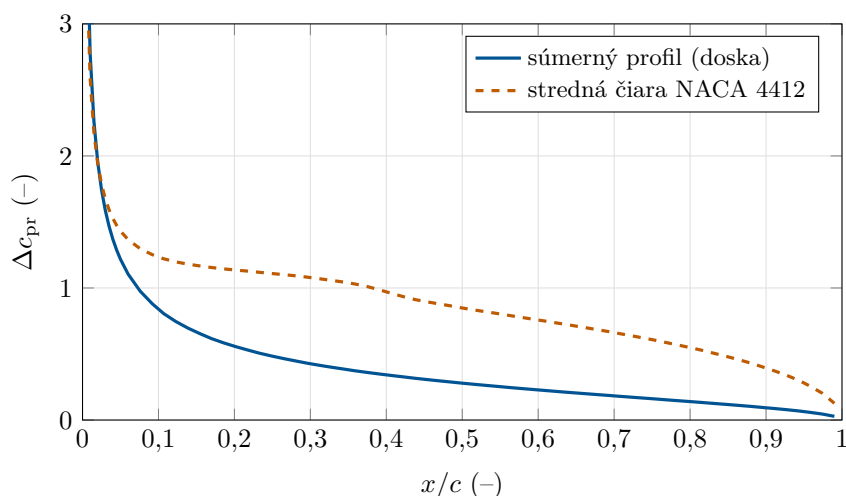
Riešenie pre hustotu vírov na strednej čiare [19, rov. (4.40)] vedie k zaťaženiu (s využitím $\Delta p = \rho V_\infty \gamma$, [19, rov. (4.30)])

$$\Delta c_{pr} = 4 \left[(\alpha - A_0) \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right]. \quad (4.8)$$

Pre rovinnú dosku ($A_n = 0$) je $\Delta c_{pr} = 4\alpha \sqrt{(1-x)/x}$: zaťaženie je teoreticky nekonečné na nábežnej hrane a nulové na odtokovej hrane (Kuttova podmienka). Moment k nábežnej hrane je $c_{M,LE} = -c_L/4$, takže pôsobisko vztlaku súmerného profilu je trvalo v štvrtine tetivy [19, rov. (4.31)–(4.34)]. Prehnutie pridáva zaťaženie rozložené po celej tetive (obr. 4.7). Integrály v súčiniteloch vztlaku a momentu obsahujú len prvé tri koeficienty [19, čl. 4.4.2]:

$$c_L = 2\pi\alpha + \pi(A_1 - 2A_0), \quad c_{M,c/4} = -\frac{\pi}{4}(A_1 - A_2), \quad \alpha_{L0} = A_0 - \frac{A_1}{2}, \quad (4.9)$$

ostatné koeficienty ovplyvňujú iba rozloženie tlaku. V blízkosti nábežnej hrany a bodov zastavenia sa teoretické rozloženie tlaku od nameraného líši, súčinitele síl sú však spoľahlivé [19, čl. 4.4.2].



Obr. 4.7. Zataženie po tetive podľa teórie tenkého profilu (4.8) pri $\alpha = 4^\circ$ (vlastný výpočet, 40 členov radu). Plochy pod krivkami sa rovnajú c_L : 0,44 pre súmerný profil a 0,89 pre strednú čiaru NACA 4412.

4.4.2 Vplyv tvaru strednej čiary

Z (4.9) vidno, že uhol nulového vztľaku aj moment k štvrtine tetivy závisia len od tvaru strednej čiary. Pre štvorciferné profily NACA sú obe veličiny úmerné najväčšiemu prehnutiu m a závisia od jeho polohy p (obr. 4.8). Posun najväčšieho prehnutia dozadu zväčšuje $|\alpha_{L0}|$ aj záporný moment.

Pretože $c_{M,c/4}$ je konštantný, **pôsobisko** vztľaku prehnutého profilu sa s uhlom nábehu presúva. Jeho poloha je [19, rov. (4.45)–(4.47)]

$$\frac{x_{cp}}{c} = \frac{1}{4} - \frac{c_{M,c/4}}{c_L}. \quad (4.10)$$

Pri malom vztľaku leží pôsobisko ďaleko za štvrtinou tetivy a so zväčšovaním vztľaku sa k nej blíži (obr. 4.9). Preto je pre výpočty výhodnejšie udávať moment k aerodynamickému strediu, ktorý je nemenný.

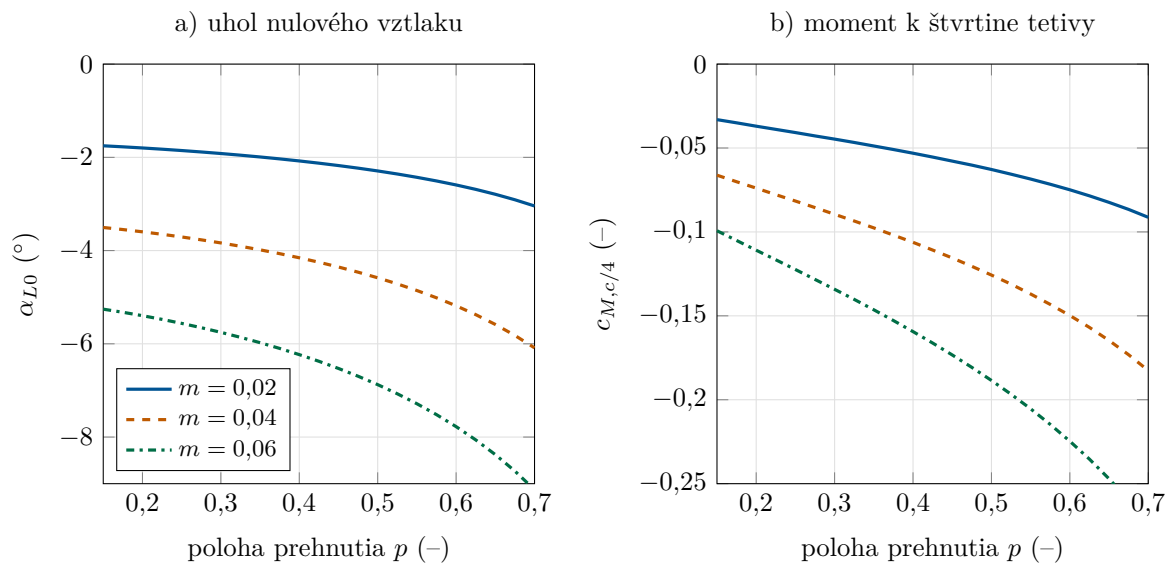
Príklad 4.4: Fourierove koeficienty profilu NACA 4412

Numerickou integráciou (4.7) pre strednú čiaru NACA 4412 ($m = 0,04$, $p = 0,4$) sme dostali $A_0 = 0,00899$, $A_1 = 0,16299$, $A_2 = 0,02772$. Určte α_{L0} , $c_{M,c/4}$, c_L pri $\alpha = 4^\circ$ a polohu pôsobiska.

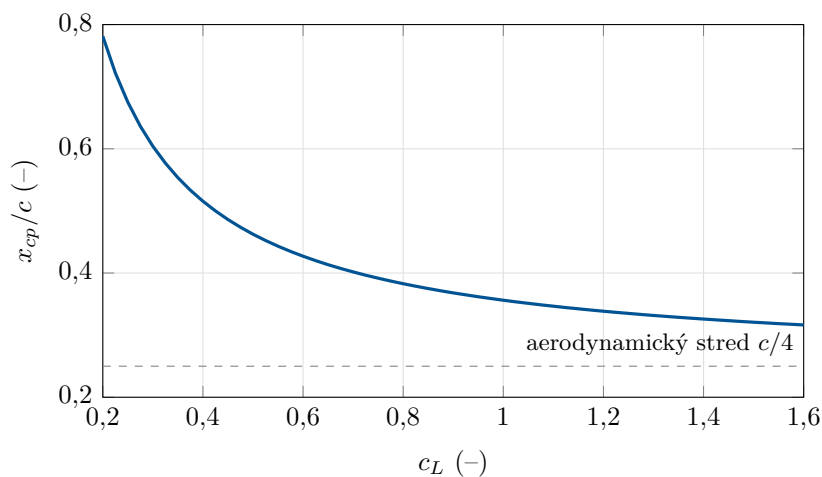
Riešenie. Podľa (4.9): $\alpha_{L0} = 0,00899 - 0,16299/2 = -0,0725 \text{ rad} = -4,15^\circ$, $c_{M,c/4} = -\frac{\pi}{4}(0,16299 - 0,02772) = -0,106$,

$$c_L = 2\pi \cdot 0,0698 + \pi(0,16299 - 2 \cdot 0,00899) = 0,439 + 0,456 = 0,894.$$

Podľa (4.10) $x_{cp}/c = 0,25 + 0,106/0,894 = 0,369$. Hodnota α_{L0} je dvojnásobkom hodnoty pre NACA 2412 (čl. 4.4), pretože A_n sú úmerné m .



Obr. 4.8. Uhol nulového vztlaku a súčiniteľ momentu štvorciferných profilov NACA v závislosti od polohy a veľkosti najväčšieho prehnutia podľa teórie tenkého profilu (vlastný výpočet podľa (4.7) a (4.9)).



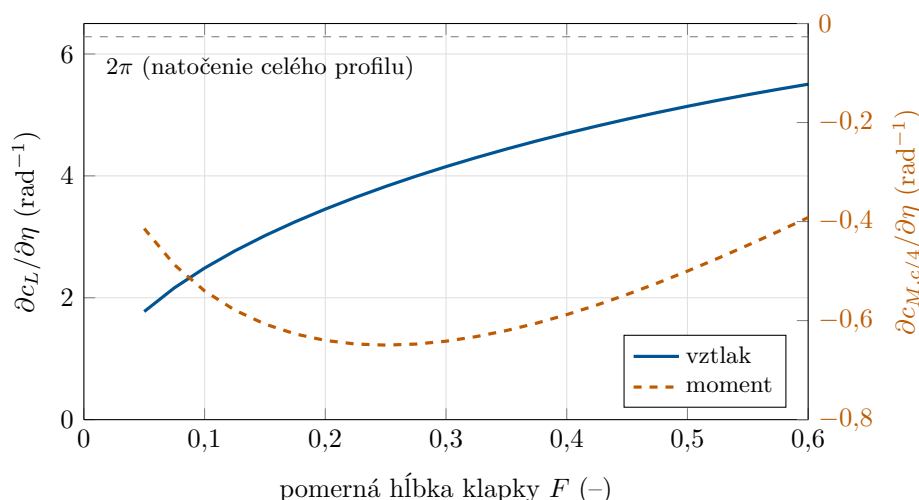
Obr. 4.9. Poloha pôsobiska vztlaku profilu so strednou čiarou NACA 4412 podľa (4.10) ($c_{M,c/4} = -0,106$, vlastný výpočet).

4.4.3 Profil s klapkou

Vychýlenie zadnej časti profilu (**klapky**) o uhol η nadol mení prehnutie profilu. Ak klapka zaberá pomernú časť tetivy F a jej os leží na strednej čiare, je jej vplyv zahrnutý v koeficientoch (4.7): sklon je $-\eta$ pre $\theta > \phi$, kde $\cos \phi = 2F - 1$. Dostaneme [19, rov. (4.49)–(4.52)]

$$c_L = 2\pi\alpha + 2(\pi - \phi + \sin \phi)\eta, \quad c_{M,c/4} = -\frac{\eta}{4}(2\sin \phi - \sin 2\phi), \quad (4.11)$$

kde druhý vzťah sme odvodili z (4.9) s $A_1 = 2\eta \sin \phi / \pi$ a $A_2 = \eta \sin 2\phi / \pi$. Vychýlenie klapky nadol teda zväčšuje vztlak a otáča profil nábežnou hranou nadol [19, čl. 4.5]. Účinnosť klapky $\partial c_L / \partial \eta$ rastie s pomernou hĺbkou klapky, ale menej ako úmerne (obr. 4.10): klapka s hĺbkou 20 % tetivy má asi 55 % účinku natočenia celého profilu.



Obr. 4.10. Účinnosť klapky podľa teórie tenkého profilu (4.11) v závislosti od jej pomernej hĺbky (vlastný výpočet).

Príklad 4.5: Klapka

Súmerný profil má klapku s hĺbkou 20 % tetivy vychýlenú o 5° nadol. Určte zmenu súčiniteľa vztlaku, uhla nulového vztlaku a momentu.

Riešenie. $\cos \phi = 2 \cdot 0,2 - 1 = -0,6$, $\phi = 2,214$ rad, $\sin \phi = 0,8$, $\sin 2\phi = -0,96$. Podľa (4.11)

$$\Delta c_L = 2(\pi - 2,214 + 0,8) \cdot \frac{5\pi}{180} = 3,455 \cdot 0,0873 = 0,302.$$

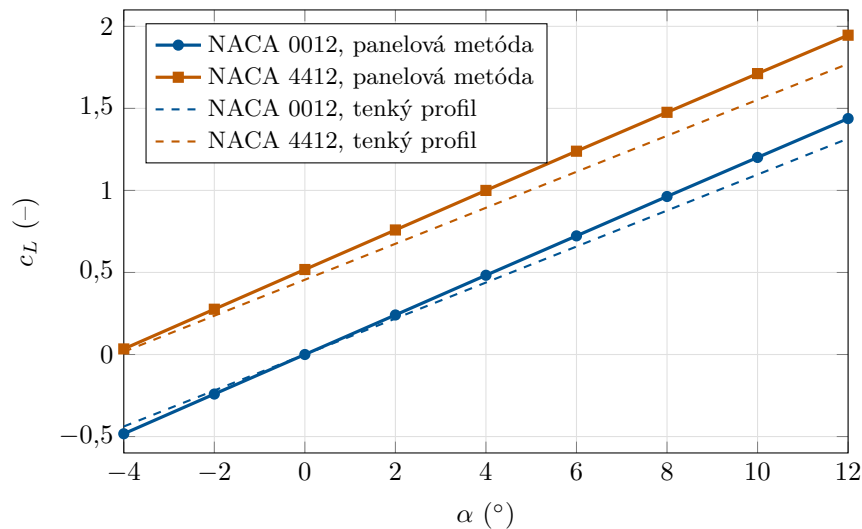
Rovnakú zmenu vztlaku by dalo zväčšenie uhla nábehu o $0,302/(2\pi)$ rad = $2,75^\circ$, uhol nulového vztlaku sa teda posunie na $-2,75^\circ$. Zmena momentu $\Delta c_{M,c/4} = -\frac{0,0873}{4}(1,6 + 0,96) = -0,056$.

4.5 Panelové metódy

Presnejšie riešenie prúdenia bez trenia okolo profilu so skutočnou hrúbkou dávajú **panelové metódy** [17, 22]. Povrch profilu sa nahradí mnohouholníkom z priamych úsekov (panelov), na ktorých sú rozložené singularity – zdroje alebo víry. Ich intenzity sa určia zo sústavy lineárnych rovníc, ktorá vyjadruje podmienku, že prúd v kontrolných bodoch panelov

nepreteká povrchom, a z Kuttovej podmienky. Výsledkom je rozloženie rýchlosti a tlaku po povrchu (obr. 4.3) a cirkulácia, z ktorej podľa Kuttovej–Žukovského vety (3.25) vyplýva vztlak.

Na obr. 4.11 je porovnanie súčiniteľa vztlaku profilov NACA 0012 a NACA 4412 vypočítaného panelovou metódou s teóriou tenkého profilu. Panelová metóda dáva pre profile s hrúbkou 12 % o niečo väčší sklon (asi 0,12 na stupeň) ako teória tenkého profilu – vplyv hrúbky. V skutočnom viskóznom prúdení je sklon krivky vztlaku naopak spravidla o niečo menší ako 2π , pretože medzná vrstva „zmäkčuje“ účinnú geometriu profilu, najmä pri odtokovej hrane [17, 20]. Prúdenie bez trenia navyše nedokáže opísať odpor ani stall. Porovnanie výsledkov panelovej metódy s meraním na profile NACA 4412 uvádza [19, čl. 4.10]: vypočítané a namerané rozloženie tlaku sa pri uhle nábehu 8° výrazne líši najmä na sacej strane pri nábežnej hrane, kde meranie nevykazuje takú výraznú sáciu špičku, a namerané súčinitele vztlaku sú najmä pri väčších uhloch nábehu menšie ako vypočítané. Autori to pripisujú viskóznym javom – miestnemu odtrhnutiu medznej vrstvy pri nábežnej hrane. Panelová metóda je preto užitočná najmä ako základ, ku ktorému sa pripája výpočet medznej vrstvy.



Obr. 4.11. Súčiniteľ vztlaku pri prúdení bez trenia: panelová metóda s lineárne premenlivou hustotou vírov (200 panelov, vlastný výpočet podľa [22]) a teória tenkého profilu (4.5) s $\alpha_{L0} = 0$ (NACA 0012) a $\alpha_{L0} = -4,15^\circ$ (NACA 4412).

Na výpočet charakteristík skutočných profilov vrátane odporu a začiatku odtrhnutia sa používajú programy, ktoré spájajú panelovú metódu s výpočtom medznej vrstvy; ich výsledky pri veľkých uhloch nábehu je však potrebné overovať meraním [1, 2].

4.6 Charakteristiky skutočného profilu

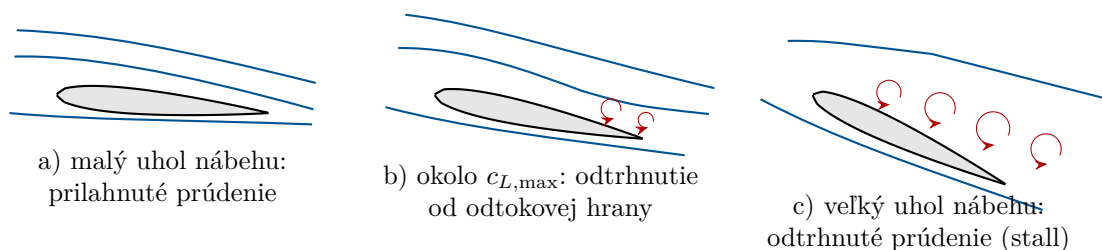
4.6.1 Priebeh súčiniteľov v závislosti od uhla nábehu

Charakteristiky profilu sa určujú meraním vo veternom tuneli na modeli, ktorý siaha od steny ku stene tunela, aby bolo prúdenie dvojrozmerné. Vztlak a moment sa určujú z rozloženia tlaku alebo aerodynamickými váhami, odpor z deficitu hybnosti v úplave [20]. Typický priebeh c_L a c_D v závislosti od uhla nábehu je schematicky znázornený na obr. 4.13. Rozlišujeme tieto oblasti [1, 2, 20]:

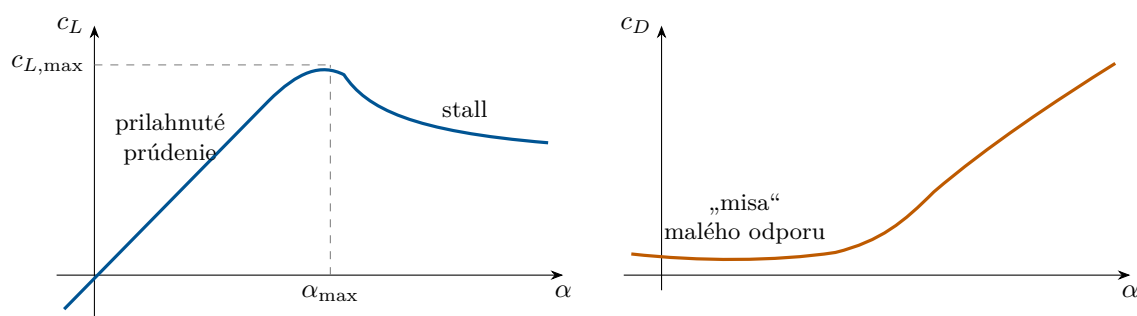
1. **Oblasť prilahnutého prúdenia:** pri malých uhloch nábehu rastie c_L približne lineárne podľa (4.5), odpor je malý a tvorí ho najmä trenie. Závislosť $c_D(\alpha)$ má tvar plytkej „misy“ s minimom pri malých uhloch nábehu.
2. **Oblasť nástupu odtrhnutia:** s rastúcim uhlom nábehu sa na sacej strane od odtokovej hrany dopredu šíri odtrhnutie prúdu (alebo pri tenkých profiloch vzniká odtrhnutie pri nábežnej hrane). Rast vztlaku sa spomaľuje až dosiahne maximum $c_{L,\max}$ pri uhle $\alpha_{\max}$.
3. **Oblasť stallu:** za maximum vztlak klesá a odpor prudko rastie. Pokles vztlaku môže byť pozvoľný alebo náhly – podľa tvaru profilu a Reynoldsovho čísla.
4. **Oblasť hlbokého stallu:** pri veľkých uhloch nábehu je prúdenie na sacej strane úplne odtrhnuté a profil sa správa podobne ako obtekaná doska; pri $\alpha = 90^\circ$ je vztlak blízky nule a odpor maximálny.

Na lopatke veternej turbíny sa vyskytujú uhly nábehu v celom rozsahu $\langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$: pri rozbehu, pri zastavenej turbíne, pri silnom vetre na turbínach regulovaných stallom a pri natáčaní gondoly. Výpočtové programy preto potrebujú charakteristiky profilov v celom tomto rozsahu, hoci merania sa spravidla robia len do uhlov okolo 20° ; zvyšok sa dopĺňa extrapoláciou, ku ktorej sa vrátíme v kap. 8.

Stav prúdenia v jednotlivých oblastiach schematicky znázorňuje obr. 4.12.



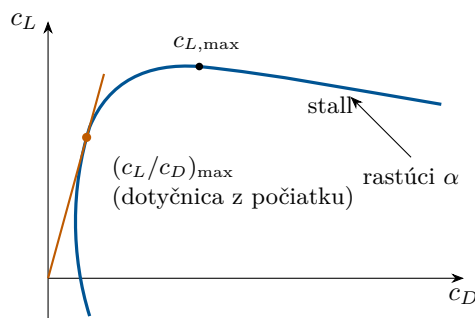
Obr. 4.12. Prúdenie okolo profilu pri rastúcom uhle nábehu (schematicky).



Obr. 4.13. Schematický priebeh súčiniteľa vztlaku a odporu profilu v závislosti od uhla nábehu (kvalitatívne, bez mierky).

4.6.2 Polára a aerodynamická jemnosť

Závislosť c_L od c_D s uhlom nábehu ako parametrom sa nazýva **polára profilu** (obr. 4.14). Dotyčnica k poláre vedená z počiatku určuje bod s najväčšou aerodynamickou jemnosťou $(c_L/c_D)_{\max}$ [1]. Pri návrhu lopatky sa uhol nábehu prierezov volí spravidla v blízkosti tohto bodu (kap. 9), pretože tam profil prenáša daný vztlak s najmenším odporom.



Obr. 4.14. Polára profilu (schematicky). Bod dotyku priamky vedenej z počiatku určuje najväčšiu aerodynamickú jemnosť. Mierka osí c_D a c_L je rôzna.

Príklad 4.6: Sily na prierez lopatky

Prierez lopatky s tetivou 2 m je obtekaný relatívnou rýchlosťou 60 m/s. Pri danom uhle nábehu má profil súčinitele $c_L = 1,0$ a $c_D = 0,010$ (zadané hodnoty). Určte vztlak a odpor na jednotku dĺžky lopatky a aerodynamickú jemnosť ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

Riešenie. Dynamický tlak: $q = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 60^2 = 2205 \text{ Pa}$. Podľa (3.29):

$$L' = c_L q c = 1,0 \cdot 2205 \cdot 2 = 4410 \text{ N/m}, \quad D' = c_D q c = 0,010 \cdot 2205 \cdot 2 = 44,1 \text{ N/m}.$$

Jemnosť $c_L/c_D = 100$.

4.7 Vplyv Reynoldsovho čísla, drsnosti a hrúbky

4.7.1 Reynoldsovo číslo

S rastúcim Reynoldsovým číslom sa spravidla zväčšuje maximálny súčiniteľ vztlaku a znižuje súčiniteľ odporu, takže rastie aj maximálna jemnosť [1, 20]. Pri malých Reynoldsových číslach (rádovo 10^5 , malé turbíny) sa na profiloch môžu vytvárať laminárne odtrhnutia s opätovným prilnutím prúdu, ktoré zväčšujú odpor. Údaje profilov je preto potrebné používať pre Reynoldsove čísla zodpovedajúce skutočnej turbíne (čl. 3.6.2).

4.7.2 Laminárne bubliny a druhy stallu

Na profiloch s veľkým zakrivením sacej strany v prednej časti môže už pri miernom uhle nábehu nastať laminárne odtrhnutie. Odtrhnutá vrstva sa rýchlo stane turbulentnou, zhrubne a môže znovu prilnúť k povrchu; medzi miestom odtrhnutia a opätovného prilnutia vznikne **laminárna odtrhová bublina** (obr. 4.15) [19, čl. 7.4.1]. Rozlišujú sa dva typy:

- *krátka bublina* s dĺžkou rádovo 1 % tetivy, ktorá rozloženie tlaku ovplyvňuje len málo,
- *dlhá bublina* s dĺžkou od niekoľkých percent až po takmer celú tetivu, ktorá výrazne znižuje sáciu špičku pri nábežnej hrane.

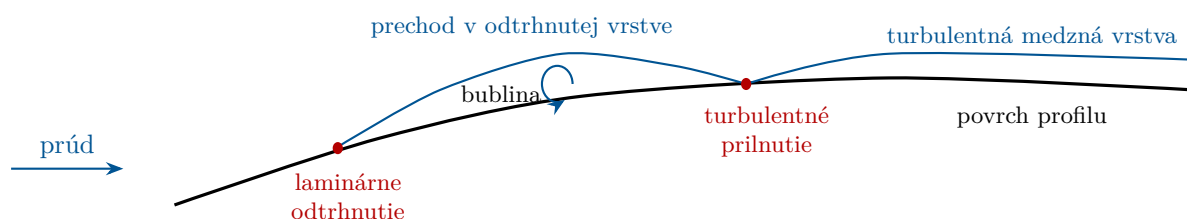
Podľa kritéria Owena a Klanfera vznikne dlhá bublina takmer iste, ak je Reynoldsovo číslo vytvorené z hrúbky posunutia v mieste odtrhnutia menšie ako 400, a krátka, ak je väčšie ako

550 [19, čl. 7.4.1]. Dlhé bubliny sa teda objavujú najmä pri malých Reynoldsových číslach – na lopatkách malých turbín.

Stall profilu môže podľa [19, čl. 7.4.1] vzniknúť tromi mechanizmami:

- **stall od odtokovej hrany:** turbulentné odtrhnutie sa s rastúcim uhlom nábehu posúva od odtokovej hrany dopredu,
- **stall od nábežnej hrany:** krátka bublina pri nábežnej hrane pri veľkom uhle nábehu „praskne“ – odtrhnutá vrstva už neprilne a vztlak náhle klesne,
- **stall tenkého profilu:** dlhá bublina sa s uhlom nábehu predlžuje až k odtokovej hrane a vztlak klesá postupne.

Pozvoľný stall od odtokovej hrany je vhodnejší ako náhly pokles vztlaku [19, čl. 8.2]; pre veterné turbíny to platí dvojnásobne, pretože vonkajšie prierezy lopatiek regulovaných stallom v ňom pri silnom vetre trvalo pracujú (čl. 4.8).



Obr. 4.15. Laminárna odtrhová bublina na sacej strane profilu (schematicky, podľa opisu v [19, čl. 7.4.1]).

4.7.3 Drsnosť nábežnej hrany

Lopatky veterných turbín pracujú v znečistenom prostredí. Na nábežnej hrane sa usádza hmyz a nečistoty a povrch sa časom opotrebovávajú eróziou. Drsnosť pri nábežnej hrane vyvolá predčasný prechod medznej vrstvy do turbulentnej, čo spravidla znižuje maximálny súčiniteľ vztlaku a zvyšuje odpor [1, 2, 23]. Pokles výkonu v dôsledku znečistenia lopatiek je preto jedným z dôvodov, prečo sa pre veterné turbíny navrhujú profily s charakteristikami málo citlivými na drsnosť. Napríklad rodiny profilov NREL boli navrhnuté tak, aby ich maximálny súčiniteľ vztlaku bol relatívne necitlivý na drsnosť; dosiahlo sa to tým, že prechod na sacej strane nastáva tesne pred dosiahnutím $c_{L,max}$ veľmi blízko nábežnej hrany [23].

4.7.4 Hrúbka profilu

Hrubší profil má väčšiu ohybovú tuhosť a pevnosť lopatky, ale spravidla väčší odpor a menšiu maximálnu jemnosť [1, 2]. Pri koreni lopatky, kde sú ohybové momenty najväčšie a obvodová rýchlosť malá, sa preto používajú hrubé profily (s pomernou hrúbkou aj nad 30 %), ktoré pri samom náboji prechádzajú do kruhového prierezu. Vo vonkajšej časti lopatky, ktorá prispieva k výkonu najviac, sa používajú tenšie profily s veľkou jemnosťou.

4.8 Profily pre veterné turbíny

Prvé moderné veterné turbíny používali letecké profily, najmä profily NACA štvorciferné a série 6 [1, 2]. Požiadavky na profil lopatky veternej turbíny sa však od požiadaviek v letectve v niekoľkých bodoch líšia [2, 23, 24]:

- veľká aerodynamická jemnosť v pracovnom rozsahu uhlov nábehu,
- charakteristiky málo citlivé na drsnosť nábežnej hrany,
- vhodné správanie pri stalle a v jeho blízkosti – pri turbínach regulovaných stallom obmedzený maximálny vztlak vo vonkajšej časti lopatky [23],
- veľká hrúbka pri koreni lopatky pri zachovaní prijateľných aerodynamických vlastností,
- geometrická kompatibilita susedných profilov pozdĺž lopatky,
- nízka hlučnosť, najmä vo vonkajšej časti lopatky, kde je obvodová rýchlosť najväčšia.

Preto vznikli rodiny profilov navrhnuté priamo pre veterné turbíny. Patria k nim napríklad:

- **profily NREL** (označované písmenom S), navrhnuté v niekoľkých rodinách pre rotory rôznej veľkosti a spôsobu regulácie [23],
- **profily DU** navrhnuté na Technickej univerzite v Delfte [24],
- **profily FFA-W** vyvinuté vo švédskom Leteckom výskumnom ústave (FFA).

Referenčná turbína NREL 5 MW má pozdĺž lopatky profily DU (označené DU40, DU35, DU30, DU25 a DU21) a vo vonkajšej časti profil NACA 64-618 [6]. Referenčná turbína IEA 15 MW používa profily rodiny FFA-W3 s pomernou hrúbkou od 21,1 %; autori ich zvolili preto, že sú verejne dostupné a dobre zdokumentované [7].

Poznámka

Charakteristiky profilov uvádzané v podkladoch referenčných turbín (napr. [6]) nie sú priamo namerané dvojrozmerné údaje: bývajú upravené o vplyv rotácie a doplnené extrapoláciou do veľkých uhlov nábehu. Pri ich použití treba vždy overiť, aké úpravy obsahujú (kap. 8).

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Profil je určený tetivou, strednou čiarou a rozložením hrúbky; štvorciferné profily NACA sú definované analyticky (4.1), (4.2).
- Vztlak vzniká z rozdielu tlakov na sacej a tlakovej strane; c_L a c_D sú zložky tej istej sily ako c_N a c_T .
- Teória tenkého profilu dáva $c_L = 2\pi(\alpha - \alpha_{L0})$, aerodynamický stred v štvrtine tetivy a α_{L0} z tvaru strednej čiary.

- Skutočný profil má oblasť prilahnutého prúdenia, maximum vztlaku a oblasť stallu; pri veľkých uhloch nábehu sa správa ako doska.
- Zataženie po tetive dáva Fourierov rad strednej čiary; c_L a $c_{M,c/4}$ závisia len od A_0 , A_1 , A_2 ; pôsobisko vztlaku prehnutého profilu sa s c_L presúva, aerodynamický stred nie.
- Klapka mení prehnutie; klapka s hĺbkou 20 % tetivy má asi 55 % účinku natočenia celého profilu.
- Stall môže vzniknúť od odtokovej hrany, od nábežnej hrany (prasknutie krátkej bubliny) alebo ako stall tenkého profilu (predlžovanie dlhej bubliny).
- Charakteristiky závisia od Reynoldsovho čísla a drsnosti; znečistenie nábežnej hrany znižuje $c_{L,max}$ a zväčšuje odpor.
- Veterné turbíny používajú rodiny profilov navrhnuté na tento účel (NREL, DU, FFA-W), pri koreni hrubé profily.

Kontrolné otázky

1. Definujte tetivu, strednú čiaru, prehnutie a pomernú hrúbku profilu.
2. Čo znamenajú číslce v označení NACA 4415 a NACA 64-618?
3. Opíšte rozloženie súčiniteľa tlaku na profile pri kladnom uhle nábehu. Kde je bod zastavenia a kde sacia špička?
4. Aký je vzťah medzi normálovou a tangenciálnou silou a vztlakom a odporom? Prečo sa odpor neurčuje z rozloženia tlaku?
5. Aké sú hlavné výsledky teórie tenkého profilu? Za akých predpokladov platia?
6. Čo je aerodynamický stred profilu?
7. Prečo panelová metóda (prúdenie bez trenia) neurčí odpor ani stall?
8. Opíšte priebeh $c_L(\alpha)$ a $c_D(\alpha)$ skutočného profilu. Čo je stall?
9. Prečo potrebujú výpočtové programy veterných turbín charakteristiky profilov až do uhlov nábehu $\pm 180^\circ$?
10. Ako ovplyvňuje drsnosť nábežnej hrany charakteristiky profilu? Prečo je to pre veterné turbíny dôležité?
11. Ako je rozložené zataženie po tetive rovinatej dosky podľa teórie tenkého profilu?
12. Prečo sa pôsobisko vztlaku prehnutého profilu s uhlom nábehu presúva, kým aerodynamický stred nie?
13. Čo je laminárna odtrhová bublina? Aké druhy stallu poznáte?
14. Prečo sa pri koreni lopatky používajú hrubé profily?
15. Aké požiadavky kladieme na profily veterných turbín?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Úloha 4.1. Vypočítajte polovicu hrúbky profilu NACA 0018 v miestach $x = 0,1$; $0,3$ a $0,6$ podľa (4.1). Aká je najväčšia hrúbka profilu s tetivou 3 m ?

(Výsledok: $y_t = 0,0702$; $0,0900$; $0,0685$; asi $0,54 \text{ m}$)

Úloha 4.2. Určte polohu strednej čiary profilu NACA 2415 v miestach $x = 0,2$ a $x = 0,7$.

(Výsledok: $y_c = 0,0150$; $0,0150$)

Úloha 4.3. Profil pri uhle nábehu 12° má $c_N = 1,25$ a $c_T = -0,22$. Určte c_L a c_D .

(Výsledok: $c_L \approx 1,268$; $c_D \approx 0,045$)

Úloha 4.4. Podľa teórie tenkého profilu určte súčiniteľ vztlaku súmerného profilu pri uhle nábehu 6° . Aký uhol nábehu je potrebný na dosiahnutie $c_L = 0,8$ profilom s $\alpha_{L0} = -4,15^\circ$ (NACA 4412)?

(Výsledok: $c_L \approx 0,66$; $\alpha \approx 3,1^\circ$)

Úloha 4.5. Prierez lopatky s tetivou $1,8 \text{ m}$ je obtekaný rýchlosťou 70 m/s pri $c_L = 1,1$ a jemnosti $c_L/c_D = 110$. Určte vztlak a odpor na jednotku dĺžky.

(Výsledok: $L' \approx 5942 \text{ N/m}$; $D' \approx 54,0 \text{ N/m}$)

Úloha 4.6. Aký súčiniteľ vztlaku potrebuje prierez lopatky s tetivou $1,2 \text{ m}$ obtekaný rýchlosťou 75 m/s , aby vztlak na jednotku dĺžky bol 4000 N/m ? Aká je cirkulácia okolo prierezu?

(Výsledok: $c_L \approx 0,97$; $\Gamma \approx 43,5 \text{ m}^2/\text{s}$)

Úloha 4.7. Vysvetlite, prečo sú hrubé profily pri koreni lopatky kompromisom medzi aerodynamickými a pevnostnými požiadavkami. Ktorá časť lopatky prispieva k výkonu najviac a prečo?

Úloha 4.8. Podľa teórie tenkého profilu vypočítajte Δc_{pr} rovinnej dosky pri $\alpha = 5^\circ$ v miestach $x/c = 0,1$; $0,5$ a $0,9$.

(Výsledok: $1,047$; $0,349$; $0,116$)

Úloha 4.9. Stredná čiara profilu má koeficienty $A_0 = 0,005$, $A_1 = 0,10$, $A_2 = 0,02$. Určte α_{L0} , $c_{M,c/4}$ a polohu pôsobiska pri $c_L = 0,8$.

(Výsledok: $\alpha_{L0} = -2,58^\circ$; $c_{M,c/4} = -0,0628$; $x_{cp}/c = 0,329$)

Úloha 4.10. Klapka s hĺbkou 30% tetivy súmerného profilu je vychýlená o 10° nadol. Aký je súčiniteľ vztlaku pri $\alpha = 2^\circ$?

(Výsledok: $c_L \approx 0,944$ ($0,219 + 0,725$))

Úloha 4.11. Ako sa podľa obr. 4.8 zmení α_{L0} profilu s $m = 0,04$, ak posunieme najväčšie prehnutie z $p = 0,4$ na $p = 0,2$?

(Výsledok: $z -4,15^\circ$ na $-3,60^\circ$)

Kapitola 5

Hybnostná teória akčného disku

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- vysvetliť model akčného disku a jeho predpoklady,
- odvodiť vzťahy pre rýchlosť v rovine rotora, ťah a výkon pomocou rovnice kontinuity, vety o hybnosti a Bernoulliho rovnice,
- definovať axiálny indukčný faktor a vyjadriť pomocou neho súčinitele výkonu a ťahu,
- odvodiť Betzov limit a vysvetliť jeho fyzikálny význam,
- opísať priebeh rýchlosti, tlaku a prierezu prúdovej trubice pozdĺž rotora,
- posúdiť hranice platnosti hybnostnej teórie.

Hybnostná teória je najjednoduchší model rotora veternej turbíny. Neobsahuje nič o počte, tvare ani profiloch lopatiek; rotor nahrádza diskom, ktorý spomaľuje prúd vzduchu a odoberá mu energiu. Napriek tomu dáva základné poznatky: hornú hranicu súčiniteľa výkonu, súvislosť medzi výkonom a ťahom a vysvetlenie, prečo sa prúdová trubica za rotorom rozširuje. V spojení s teóriou prvkov lopatky (kap. 7) tvorí základ metódy BEM, ktorá sa pri návrhu rotorov používa dodnes. Odvodenie sleduje [1–3].

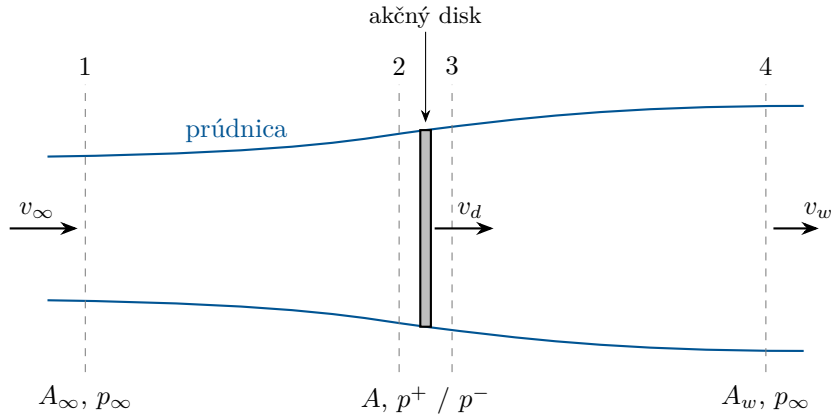
5.1 Model akčného disku

Model akčného disku (angl. *actuator disc*) pochádza z teórie lodných vrtúl z 19. storočia. Rotor sa nahradí nekonečne tenkým priepustným diskom s plochou A rovnou ploche rotora. Na disku sa skokovo mení tlak, rýchlosť sa však mení spojitě – tým disk vyjadruje, že rotor koná s prúdiacim vzduchom prácu. Predpokladáme [1, 2]:

1. ustálené, nestlačiteľné prúdenie bez trenia,
2. nekonečný počet lopatiek, t. j. rovnomerné rozloženie ťahu po ploche disku,
3. vzduch za diskom nerotuje (rotáciu úplavy doplníme v kap. 6),
4. tlak ďaleko pred diskom a ďaleko za ním sa rovná tlaku okolitej atmosféry p_∞ ,

5. rýchlosť je v každom priereze prúdovej trubice rovnomerná (jednorozmerný model).

Uvažujme prúdovú trubicu, ktorá prechádza okrajom disku (obr. 5.1). Ďaleko pred diskom (prierez 1) má plochu A_∞ a rýchlosť v_∞ , v rovine disku (prierezy 2 a 3 tesne pred diskom a za ním) plochu A a rýchlosť v_d , ďaleko za diskom (prierez 4) plochu A_w a rýchlosť v_w . Index w označuje úplav (angl. *wake*).



Obr. 5.1. Prúdová trubica prechádzajúca akčným diskom. Prierezy: 1 – ďaleko pred diskom, 2 a 3 – tesne pred diskom a za ním, 4 – ďaleko za diskom v úplave.

5.2 Odvodenie základných vzťahov

5.2.1 Rovnica kontinuity

Pretože plášťom prúdovej trubice vzduch nepreteká, je hmotnostný prietok vo všetkých prierezoch rovnaký (3.5):

$$\dot{m} = \rho A_\infty v_\infty = \rho A v_d = \rho A_w v_w. \quad (5.1)$$

Rýchlosť tesne pred diskom a tesne za ním je rovnaká, pretože plocha je rovnaká. Ak rotor vzduch spomaľuje ($v_w < v_d < v_\infty$), musí sa prúdová trubica rozširovať: $A_\infty < A < A_w$.

5.2.2 Veta o zmene hybnosti

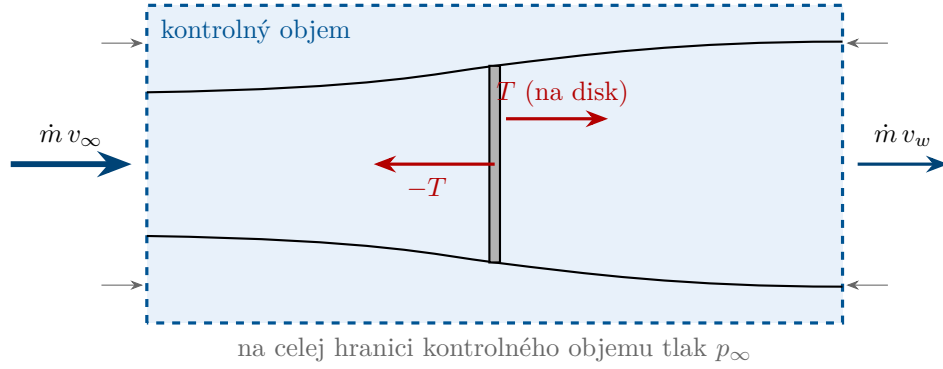
Ťah T je sila, ktorou vzduch pôsobí na disk v smere prúdu. Rovnakou silou, ale opačného zmyslu, pôsobí disk na vzduch. Aplikujme vetu o zmene hybnosti (3.7) na kontrolný objem, ktorý obklopuje celú prúdovú trubicu medzi prierezmi 1 a 4. Pretože tlak na koncoch trubice je p_∞ a výslednica tlaku p_∞ na uzavretú plochu je nulová, dostaneme¹

$$T = \dot{m} (v_\infty - v_w). \quad (5.2)$$

Ťah sa teda rovná strate hybnosti vzduchu, ktorý pretečie diskom.

Obr. 5.2 znázorňuje bilanciú hybnosti. Vzduch vstupuje do kontrolného objemu s tokom hybnosti $\dot{m} v_\infty$ a vystupuje s menším tokom $\dot{m} v_w$. Rozdiel je spôsobený silou $-T$, ktorou disk brzdí vzduch.

¹Presné odvodenie so zohľadnením tlaku na plášť prúdovej trubice nájde čitateľ v [1]. Výsledok je rovnaký.



Obr. 5.2. Bilancia hybnosti pre kontrolný objem obklopujúci akčný disk. Rozdiel tokov hybnosti na vstupe a výstupe sa rovná sile, ktorou disk pôsobí na vzduch.

5.2.3 Bernoulliho rovnica

Bernoulliho rovnicu nemožno použiť cez disk, pretože disk odoberá vzduchu energiu. Možno ju však použiť zvlášť pred diskom (prierezy 1 a 2) a zvlášť za ním (prierezy 3 a 4):

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 = p^+ + \frac{1}{2} \rho v_d^2, \quad p^- + \frac{1}{2} \rho v_d^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_w^2. \quad (5.3)$$

Odčítaním rovníc dostaneme skok tlaku na disku

$$\Delta p = p^+ - p^- = \frac{1}{2} \rho (v_\infty^2 - v_w^2), \quad (5.4)$$

a teda ľah

$$T = A \Delta p = \frac{1}{2} \rho A (v_\infty^2 - v_w^2). \quad (5.5)$$

5.2.4 Rýchlosť v rovine disku

Porovnaním (5.2) a (5.5) s $\dot{m} = \rho A v_d$:

$$\rho A v_d (v_\infty - v_w) = \frac{1}{2} \rho A (v_\infty - v_w)(v_\infty + v_w)$$

vyplýva dôležitý výsledok

$$\boxed{v_d = \frac{v_\infty + v_w}{2}} \quad (5.6)$$

Rýchlosť v rovine disku je aritmetickým priemerom rýchlosti pred diskom a v úplave. Polovica celkového spomalenia vzduchu teda nastáva pred diskom a polovica za ním.

5.2.5 Axiálny indukčný faktor

Spomalenie vzduchu v rovine disku vyjadrujeme bezrozmerným **axiálnym indukčným faktorom** a :

$$v_d = v_\infty (1 - a). \quad (5.7)$$

Rýchlosť av_∞ je **indukovaná rýchlosť** v rovine rotora – rýchlosť, ktorú do prúdu vnáša samotný rotor. Z (5.6) vyplýva rýchlosť v úplave

$$v_w = v_\infty (1 - 2a). \quad (5.8)$$

5.3 Výkon, ťah a Betzov limit

5.3.1 Výkon a súčiniteľ výkonu

Výkon, ktorý disk odoberá vzduchu, je súčin ťahu a rýchlosti v rovine disku, $P = T v_d$ (práca sily T na vzduchu, ktorý disk prechádza rýchlosťou v_d). Rovnaký výsledok dostaneme ako rozdiel toku kinetickej energie pred diskom a v úplave, $P = \frac{1}{2} \dot{m}(v_\infty^2 - v_w^2)$. Dosadením (5.5), (5.7) a (5.8):

$$P = \frac{1}{2} \rho A [v_\infty^2 - v_\infty^2 (1 - 2a)^2] v_\infty (1 - a) = 2 \rho A v_\infty^3 a (1 - a)^2. \quad (5.9)$$

Súčiniteľ výkonu (1.11) je

$$c_P = 4 a (1 - a)^2 \quad (5.10)$$

a analogicky súčiniteľ ťahu (1.12)

$$c_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho A v_\infty^2} = 4 a (1 - a) \quad (5.11)$$

5.3.2 Betzov limit

Maximum súčiniteľa výkonu nájdeme z podmienky

$$\frac{dc_P}{da} = 4(1 - a)^2 - 8a(1 - a) = 4(1 - a)(1 - 3a) = 0.$$

Riešenie $a = 1$ nemá fyzikálny zmysel (pozri čl. 5.6), maximum nastáva pri

$$a = \frac{1}{3} : \quad c_{P,\max} = \frac{16}{27} \approx 0,593, \quad c_T = \frac{8}{9}. \quad (5.12)$$

Pri optimálnom zaťažení je teda rýchlosť v rovine disku $\frac{2}{3}v_\infty$ a rýchlosť v úplave $\frac{1}{3}v_\infty$.

Hodnota $16/27$ je horná hranica súčiniteľa výkonu ideálneho rotora v neohraničenom prúde. Nazýva sa **Betzov limit** podľa A. Betza, ktorý ju publikoval v roku 1920 [25]. Nezávisle ju v tom istom roku odvodil N. J. Žukovskij a k výsledku sa priblížil už F. W. Lanchester v roku 1915, preto sa v literatúre používa aj označenie Lanchesterov–Betzov–Žukovského limit [26].

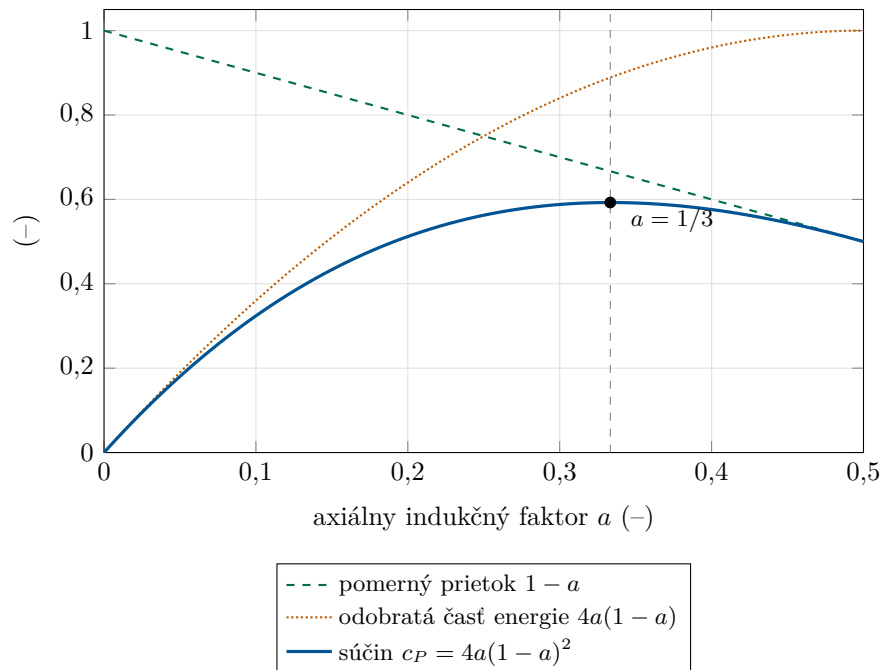
5.3.3 Fyzikálny význam Betzovho limitu

Prečo nemožno odobrať celú kinetickú energiu vetra? Ak rotor zaťažíme viac, vzduch viac spomalí – odoberie viac energie z každého kilogramu vzduchu, ale zároveň sa zväčší odpor, ktorý rotor kladie prúdu, a väčšia časť vzduchu rotor obteká. Pri $a \rightarrow 0$ preteká diskom veľa vzduchu, ale takmer nespomalí; pri $a \rightarrow \frac{1}{2}$ by sa vzduch v úplave zastavil. Optimum $a = \frac{1}{3}$ je kompromis medzi hmotnostným prietokom a energiou odobratou z jednotky hmotnosti vzduchu [1, 3].

Tento kompromis možno vyjadriť kvantitatívne. Súčiniteľ výkonu (5.10) je súčinom dvoch činiteľov:

$$c_P = \underbrace{(1 - a)}_{\dot{m}/(\rho A v_\infty)} \cdot \underbrace{4a(1 - a)}_{(v_\infty^2 - v_w^2)/v_\infty^2}. \quad (5.13)$$

Prvý činiteľ je hmotnostný prietok diskom vzťahovaný na prietok, ktorý by diskom pretekal bez rotora; druhý je pomerná časť kinetickej energie odobratá každému kilogramu vzduchu. S rastúcim a prvý klesá a druhý rastie (obr. 5.3). Rozdielne zataženie disku ilustruje aj obr. 5.4: pri malom a je prúdová trubica takmer valcová, pri veľkom a sa výrazne rozširuje a časť vzduchu, ktorá by inak prešla plochou rotora, ho obteká.



Obr. 5.3. Súčiniteľ výkonu ako súčin pomerného hmotnostného prietoku a pomernej odobratej energie (5.13).

Betzov limit platí pre ideálny disk bez strát. Skutočné rotory nedosahujú ani túto hodnotu v dôsledku rotácie úplavy (kap. 6), konečného počtu lopatiek (kap. 8) a odporu profilov (kap. 9). Napríklad referenčná turbína IEA 15 MW má podľa návrhu najväčší súčiniteľ výkonu 0,489 [7], t. j. asi 82 % Betzovho limitu.

Príklad 5.1: Betzov limit pre referenčnú turbínu NREL 5 MW

Pre rotor s priemerom 126 m pri rýchlosti vetra 11,4 m/s ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$) určte výkon a ťah ideálneho akčného disku s optimálnym zatažením, rýchlosť v rovine rotora a v úplave a hmotnostný prietok cez rotor.

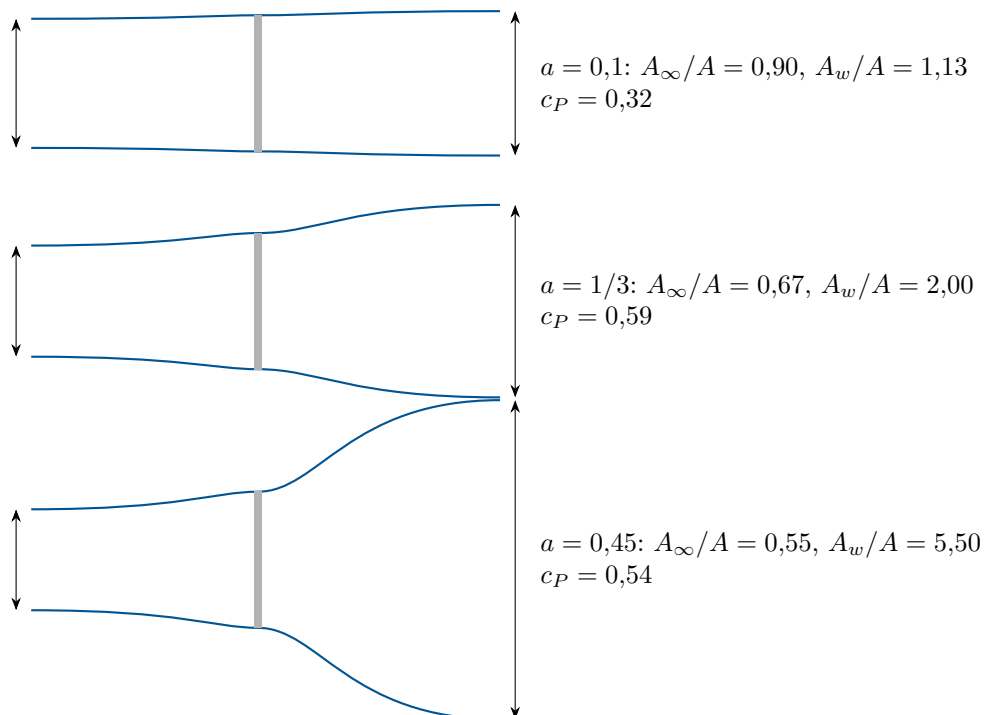
Riešenie. Výkon vetra sme vypočítali v čl. 1.5.2: $P_w = 11,31 \text{ MW}$. Pri $a = \frac{1}{3}$:

$$P = \frac{16}{27} \cdot 11,31 = 6,70 \text{ MW}, \quad T = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 12\,469 \cdot 11,4^2 = 882 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

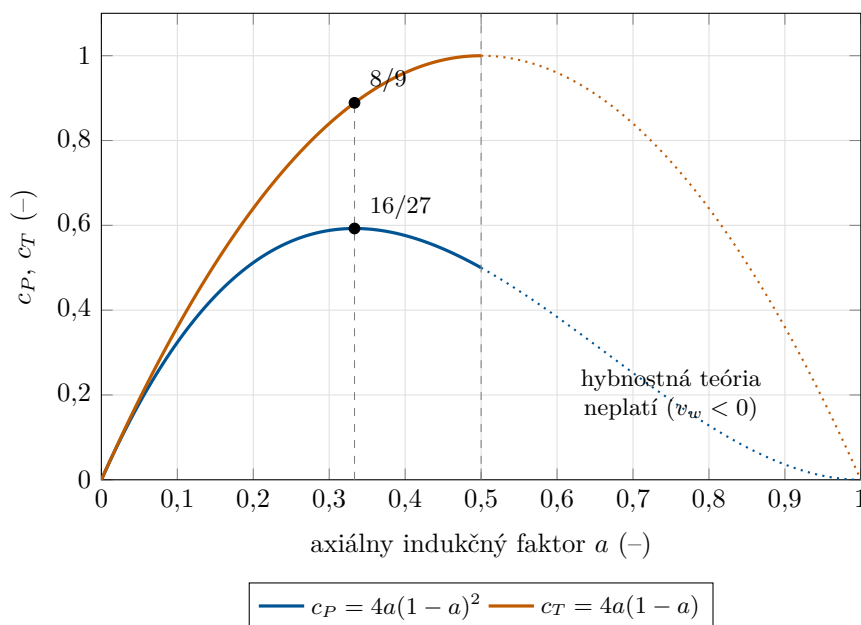
Rýchlosti: $v_d = \frac{2}{3} \cdot 11,4 = 7,6 \text{ m/s}$, $v_w = \frac{1}{3} \cdot 11,4 = 3,8 \text{ m/s}$. Hmotnostný prietok: $\dot{m} = 1,225 \cdot 12\,469 \cdot 7,6 = 1,16 \cdot 10^5 \text{ kg/s}$. Rotorom teda pretečie každú sekundu viac ako 100 ton vzduchu. Menovitý výkon turbíny 5 MW je 75 % výkonu ideálneho disku.

5.4 Priebeg rýchlosti a tlaku pozdĺž prúdovej trubice

Z predchádzajúcich vzťahov vyplýva priebeh veličín pozdĺž prúdovej trubice [1, 2]:



Obr. 5.4. Tvar prúdovej trubice pri troch hodnotách axiálneho indukčného faktora. Priemery prierezov ďaleko pred diskom a v úplave zodpovedajú (5.14); tvar prechodu je schematický.



Obr. 5.5. Súčiniteľ výkonu a ťahu ideálneho akčného disku podľa (5.10) a (5.11). Bodkovane oblasť $a > 0,5$, v ktorej jednorozmerná hybnostná teória neplatí.

- *Rýchlosť* spojite klesá od v_∞ pred diskom cez $v_\infty(1-a)$ v rovine disku po $v_\infty(1-2a)$ v úplave.
- *Tlak* pred diskom rastie nad p_∞ (vzduch sa spomaľuje), na disku skokovo klesá o Δp pod p_∞ a za diskom sa postupne vracia na p_∞ .
- *Prierez prúdovej trubice* sa v súlade s rovnicou kontinuity rozširuje:

$$\frac{A_\infty}{A} = 1 - a, \quad \frac{A_w}{A} = \frac{1 - a}{1 - 2a}. \quad (5.14)$$

Pri Betzovom optime je $A_\infty/A = \frac{2}{3}$ a $A_w/A = 2$: prierez úplavy je dvojnásobkom plochy rotora.

Kvantitatívnu predstavu o tom, ako rýchlo sa tieto zmeny odohrávajú, dáva **model vírového valca** [13, čl. 3.4]. Rotor s veľkým počtom lopatiek zanecháva z koncov lopatiek skrutkovitcové víry, ktoré sa pri nekonečnom počte lopatiek spoja do súvislej vírovej plochy tvaru valca. Model zanedbáva rozširovanie úplavy a valec s polomerom R považuje za nerozširujúci sa. Obvodová zložka vírivosti na jeho povrchu γ_θ indukuje v rovine disku axiálnu rýchlosť $\gamma_\theta/2 = av_\infty$ a ďaleko v úplave $\gamma_\theta = 2av_\infty$, teda presne hodnoty hybnostnej teórie [13, čl. 3.4]. Integráciou Biotovho–Savartovho zákona (3.21) pre polonekonečný valec s rovnomernou vírivosťou γ_θ dostaneme axiálnu rýchlosť na osi disku

$$\frac{u(x)}{v_\infty} = 1 - a \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right), \quad (5.15)$$

kde x je vzdialenosť od roviny disku (kladná po prúde). Vzťah dáva správne limitné hodnoty v_∞ , $v_\infty(1-a)$ a $v_\infty(1-2a)$. Súčiniteľ tlaku na osi vyplýva z Bernoulliho rovnice zvlášť pred diskom a za ním, polomer prúdovej trubice približne z rovnice kontinuity. Výsledky pre Betzovo optimum sú na obr. 5.6: zmeny sú sústredené do vzdialenosti niekoľkých polomerov rotora pred ním a za ním. Vo vzdialenosti $2R$ za diskom je spomalenie vzduchu už asi 95 % konečnej hodnoty. Pribeh axiálnej rýchlosti v celom okolí disku podľa tohto modelu je zobrazený v [13, obr. 3.9].

Príklad 5.2: Tlak pred diskom a za ním

Ideálny disk pracuje pri $a = \frac{1}{3}$ a rýchlosti vetra 10 m/s ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$). Určte pretlak tesne pred diskom, podtlak tesne za ním a skok tlaku.

Riešenie. $v_d = 6,667 \text{ m/s}$, $v_w = 3,333 \text{ m/s}$. Z (5.3):

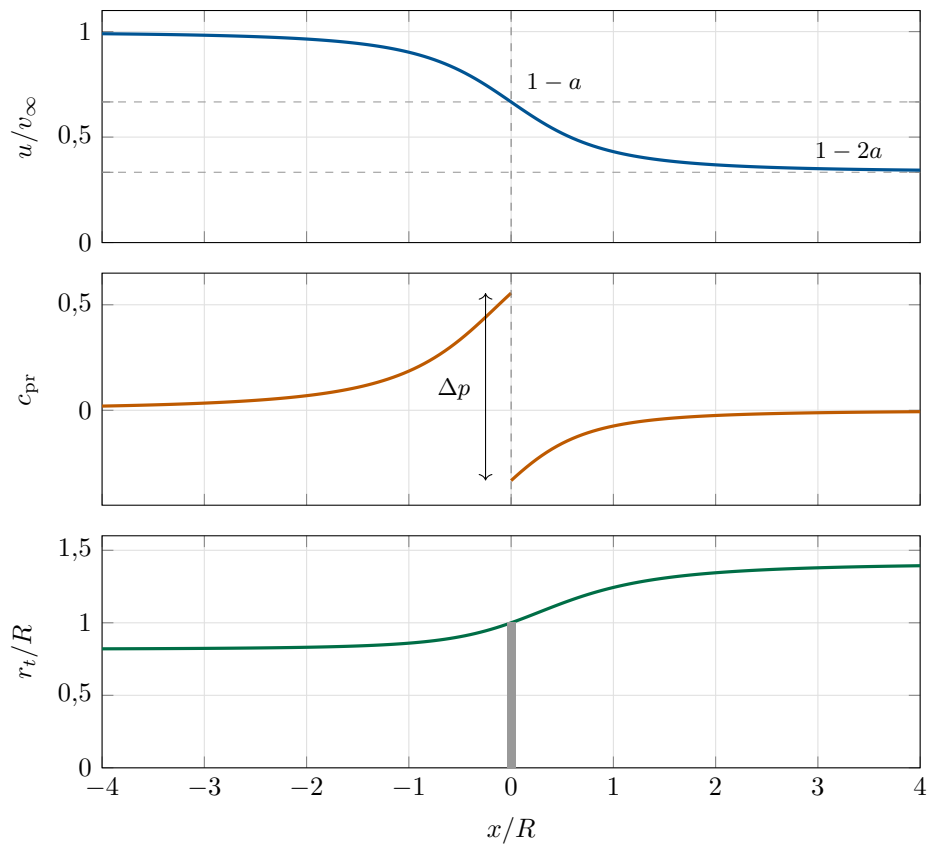
$$p^+ - p_\infty = \frac{1}{2}\rho(v_\infty^2 - v_d^2) = \frac{1}{2} \cdot 1,225 (100 - 44,44) = 34,0 \text{ Pa},$$

$$p^- - p_\infty = \frac{1}{2}\rho(v_w^2 - v_d^2) = \frac{1}{2} \cdot 1,225 (11,11 - 44,44) = -20,4 \text{ Pa}.$$

Skok tlaku $\Delta p = 54,4 \text{ Pa}$, čo súhlasí s $c_T \cdot \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 = \frac{8}{9} \cdot 61,25 = 54,4 \text{ Pa}$. Tlakové rozdiely, ktoré rotor vytvára, sú teda v porovnaní s atmosférickým tlakom veľmi malé.

5.4.1 Rýchlostné pole podľa modelu vírového valca

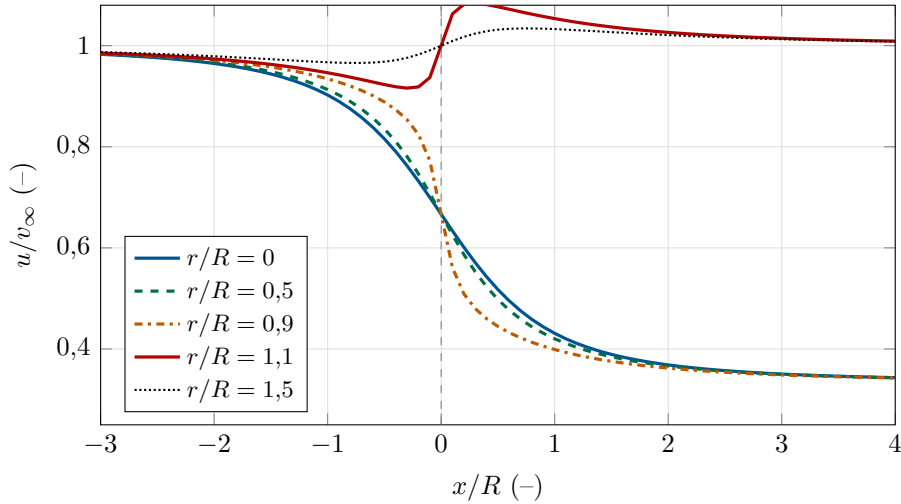
Model vírového valca umožňuje pomocou Biotovho–Savartovho zákona vypočítať indukovanú rýchlosť nielen na osi, ale v celom okolí disku [13, čl. 3.4.6–3.4.8]. Polonekonečný



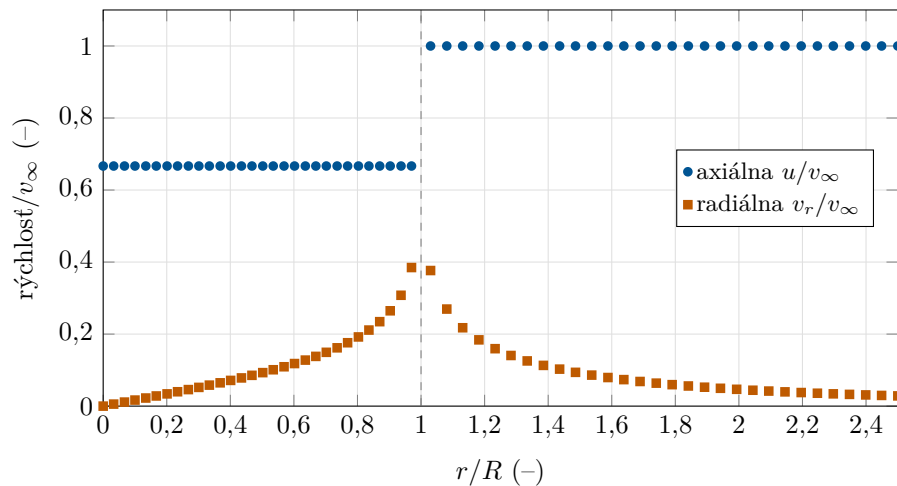
Obr. 5.6. Pomerná rýchlosť u/v_∞ a súčiniteľ tlaku $c_{pr} = (p - p_\infty)/(\frac{1}{2}\rho v_\infty^2)$ na osi disku a pomerný polomer okrajovej prúdovej trubice r_t/R pri Betzovom optime ($a = 1/3$). Vypočítané podľa (5.15), Bernoulliho rovnice a rovnice kontinuity (polomer trubice je jednorozmerný odhad). Disk je v $x = 0$.

valec nahradíme radom vírových prstencov s polomerom R ; rýchlosť indukovanú prstencom v ľubovoľnom bode vyjadrujú úplné eliptické integrály. Výsledky vlastného výpočtu pre $a = 1/3$ sú na obr. 5.7 and 5.8.

Axiálna rýchlosť v úplave je výrazne menšia ako mimo nej a v rovine disku aj ďaleko v úplave je po polomere rovnomerná – presne ako predpokladá hybnostná teória. Tesne mimo úplavy sa prúd mierne urýchľuje [13, čl. 3.4.6]. Hoci model predpokladá nerozširujúci sa valec, predpovedá aj rozširovanie prúdu: radiálna rýchlosť je najväčšia pri prechode prúdu diskom a na okraji disku je nekonečná, podobne ako pri potenciálovom obtekaní kruhovej dosky kolmej na prúd [13, čl. 3.4.8].



Obr. 5.7. Axiálna rýchlosť pozdĺž priamok rovnobežných s osou disku na rôznych polomeroch podľa modelu vírového valca pri $a = 1/3$ (vlastný výpočet; porovnaj [13, obr. 3.9]). Disk je v $x = 0$.



Obr. 5.8. Axiálna a radiálna rýchlosť v rovine disku podľa modelu vírového valca pri $a = 1/3$ (vlastný výpočet). Axiálna rýchlosť je na disku rovnomerná, $v_\infty(1 - a)$; radiálna rýchlosť rastie k okraju disku ($r = R$), kde je v modeli nekonečná.

5.5 Akčný disk ako vrtuľa

Ten istý model opisuje aj vrtuľu, ktorá prúdu energiu dodáva. Tento prípad zodpovedá zápornému indukčnému faktoru (čl. 5.6). Vo Froudovej hybnostnej teórii pohonu sa zavádza **faktor prítoku** a so znamienkom zvoleným tak, že rýchlosť v disku je $V(1+a)$ a v úplave za vrtuľou $V(1+2a)$, kde V je rýchlosť letu [19, čl. 9.1]. Rýchlosť v disku je aj tu aritmetickým priemerom rýchlostí pred diskom a ďaleko za ním. Ťah je [19, rov. (9.14)]

$$T = 2\rho SV^2 a(1+a), \quad (5.16)$$

kde S je plocha disku, a ideálna (Froudova) účinnosť pohonu, t. j. pomer užitočného výkonu TV k výkonu dodanému disku, je [19, rov. (9.12c)]

$$\eta_F = \frac{1}{1+a}. \quad (5.17)$$

Pri danom ťahu je účinnosť tým väčšia, čím väčšia je plocha disku – disk urýchľuje veľké množstvo vzduchu o malú rýchlosť. Preto má vrtuľa veľkú účinnosť pohonu a jednoduchý prúdový motor malú [19, čl. 9.1]. Pre veternú turbínu platí obrátená úvaha: veľký rotor odoberá energiu veľkému množstvu vzduchu, ktorý stačí spomaliť málo.

Príklad 5.3: Najmenší výkon vrtule podľa Froudovej teórie

Vrtuľa s priemerom 2,5 m má pri rýchlosti letu 120 m/s pri hladine mora vytvárať ťah 4000 N. Odhadnite najmenší potrebný výkon podľa Froudovej teórie [19, príklad 9.1].

Riešenie. $S = \pi \cdot 1,25^2 = 4,90 \text{ m}^2$. Z (5.16)

$$a + a^2 = \frac{T}{2\rho SV^2} = \frac{4000}{2 \cdot 1,226 \cdot 4,90 \cdot 14\,400} = 0,0232 \Rightarrow a = 0,0227.$$

Užitočný výkon $TV = 480 \text{ kW}$, ideálna účinnosť $1/1,0227 = 0,978$ a najmenší dodaný výkon $P = 480 \cdot 1,0227 = 491 \text{ kW}$. Skutočná vrtuľa by potrebovala asi o 15 % viac [19, príklad 9.1].

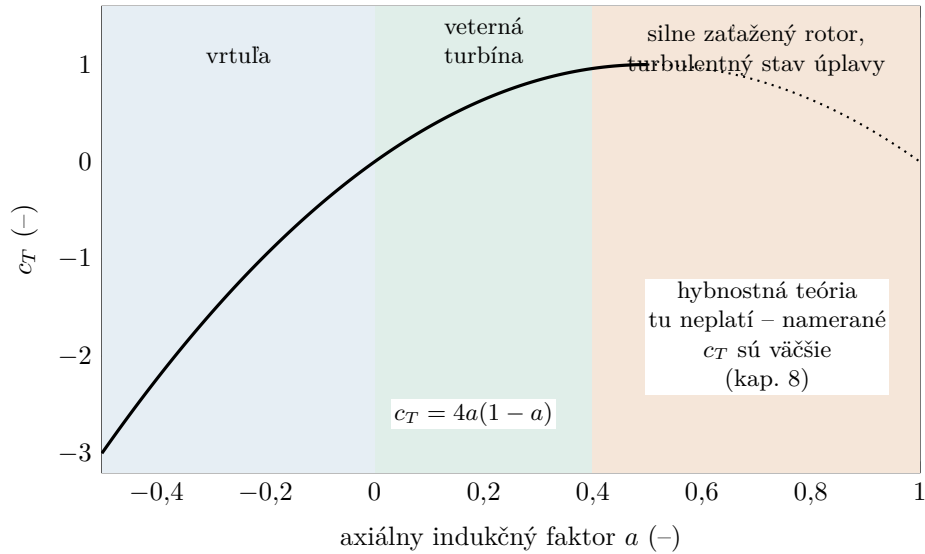
5.6 Platnosť hybnostnej teórie

5.6.1 Prevádzkové stavy rotora

Vzťahy (5.10) a (5.11) sú formálne definované pre ľubovoľné a , fyzikálny zmysel však majú len v obmedzenom rozsahu [1, 2]:

- $a < 0$: disk prúd urýchľuje a energiu mu dodáva – pracuje ako *vrtuľa* ($c_P < 0$, $c_T < 0$).
- $0 \leq a \leq 0,5$: disk prúd spomaľuje a odoberá mu energiu – stav *veternej turbíny*.
- $a > 0,5$: podľa (5.8) by bola rýchlosť v úplave záporná, t. j. vzduch by v úplave prúdil proti vetru. Jednorozmerný model s jasne ohraňovanou prúdovou trubicou tu stráca zmysel.

Prevádzkové stavy sú prehľadne znázornené na obr. 5.9 spolu s priebehom súčiniteľa ťahu podľa hybnostnej teórie.



Obr. 5.9. Prevádzkové stavy akčného disku a súčiniteľ ťahu podľa hybnostnej teórie. Hranica $a \approx 0,4$, od ktorej sa teória výrazne odchyľuje od meraní, je orientačná [1, 2].

5.6.2 Silne zatažený rotor

Už pri a približne nad 0,4 sa skutočné správanie rotora od hybnostnej teórie výrazne odchyľuje. Rýchlostný rozdiel medzi úplavou a okolitým prúdom je taký veľký, že na hranici úplavy vzniká intenzívne turbulentné premiešavanie. Úplava strháva vzduch z okolia, ktorý jej dodáva hybnosť, a namerané súčinitele ťahu sú väčšie, ako predpovedá (5.11); ťah ďalej rastie aj pri $a > 0,5$. Tento stav sa nazýva **turbulentný stav úplavy** (angl. *turbulent wake state*) [1, 2]. Mechanizmus opisuje [13, čl. 3.6]: pri veľmi silnom zatažení sa rotor pre prúd stáva takmer nepriepustným, prúd sa na okraji disku odtrháva ako pri kruhovej doske kolmej na prúd, za diskom vzniká oblasť nízkeho tlaku a ťah je výrazne väčší, než predpovedá hybnostná teória; úplava získava energiu potrebnú na návrat tlaku na p_∞ turbulentným premiešavaním s okolitým prúdom. Na jeho opis sa hybnostná teória dopĺňa empirickými vzťahmi medzi c_T a a (Glauertova korekcia), ktoré uvedieme v kap. 8.

Pri bežnej prevádzke turbíny s optimálnym výkonom je a blízke $\frac{1}{3}$, teda v oblasti, kde hybnostná teória platí dobre. Silné zataženie nastáva pri malých rýchlostiach vetra a veľkej rýchlobežnosti, napr. pri rozbehu alebo pri niektorých stratégiách riadenia.

5.6.3 Ďalšie obmedzenia

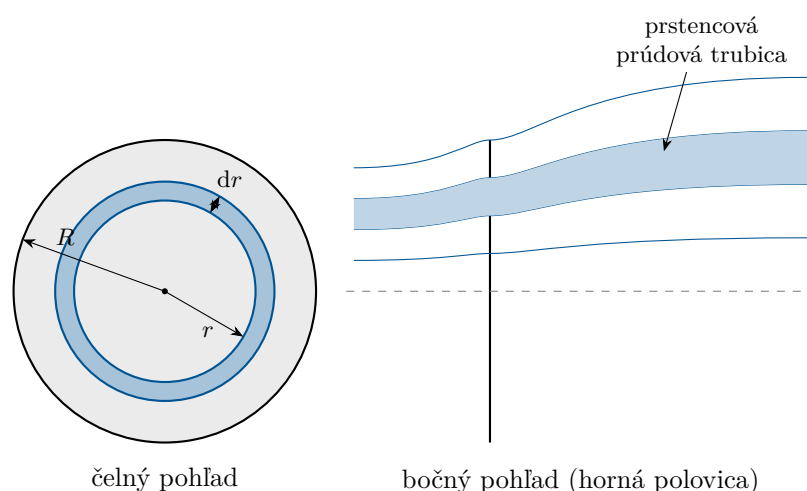
Model akčného disku predpokladá rovnomerné zataženie disku, nekonečný počet lopatiek a prúdenie bez rotácie. Rotujúce lopatky však vzduchu udeľujú moment hybnosti, takže vzduch v úplave rotuje opačne ako rotor (kap. 6), a konečný počet lopatiek spôsobuje straty na konci lopatky (kap. 8). Model tiež predpokladá neohraničený prúd; v uzavretom veternom tuneli alebo v kanáli sú pomery odlišné.

5.7 Prstencové prúdové trubice

Skutočný rotor nezafatňuje disk rovnomerne: ťah na jednotku plochy závisí od polomeru. Hybnostnú teóriu preto aplikujeme na sústavu **prstencových prúdových trubíc** (obr. 5.10) [1, 2]. Prstenec s polomerom r a šírkou dr má plochu $dA = 2\pi r dr$ a pre každý prstenec zavedieme vlastný indukčný faktor $a(r)$. Za predpokladu, že prstence sa navzájom neovplyvňujú (**predpoklad nezávislosti prstencov**), platia vzťahy (5.5) a (5.9) pre každý prstenec zvlášť:

$$dT = 4\pi\rho v_\infty^2 a(1-a)r dr, \quad dP = 4\pi\rho v_\infty^3 a(1-a)^2 r dr. \quad (5.18)$$

Tieto vzťahy spolu s vplyvom rotácie úplavy (kap. 6) tvoria hybnostnú časť metódy BEM. Predpoklad nezávislosti prstencov nie je presne splnený, v praxi však dáva dobré výsledky [1].



Obr. 5.10. Rozdelenie disku na prstence so šírkou dr a zodpovedajúce prstencové prúdové trubice, na ktoré sa aplikuje hybnostná teória (schematicky, rozšírenie zodpovedá $a = 1/3$).

Príklad 5.4: Indukčný faktor zodpovedajúci danému súčiniteľu výkonu

Referenčná turbína IEA 15 MW má podľa návrhu najväčší súčiniteľ výkonu $c_P = 0,489$ [7]. Aký axiálny indukčný faktor by mal ideálny akčný disk s rovnakým súčiniteľom výkonu? Aký by bol jeho súčiniteľ ťahu?

Riešenie. Riešime rovnicu $4a(1-a)^2 = 0,489$ na intervale $0 < a < \frac{1}{3}$ (napr. metódou pokusov alebo bisekcie):

$$a = 0,20 : c_P = 0,512; \quad a = 0,18 : c_P = 0,482; \quad a = 0,183 : c_P = 0,489.$$

Teda $a \approx 0,183$ a $c_T = 4 \cdot 0,183 \cdot 0,817 \approx 0,60$. Pozor: skutočný rotor má straty, ktoré ideálny disk nemá, preto dosahuje rovnaký výkon pri väčšom zafatnení (väčšom a) než ideálny disk. Výsledok je len ilustráciou vzťahu medzi c_P a a .

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Akčný disk nahrádza rotor skokom tlaku na ploche A ; rýchlosť sa mení spojit.
- Z rovnice kontinuity, vety o hybnosti a Bernoulliho rovnice vyplýva $v_d = (v_\infty + v_w)/2$; s indukčným faktorom a je $v_d = v_\infty(1 - a)$ a $v_w = v_\infty(1 - 2a)$.
- $c_P = 4a(1 - a)^2$, $c_T = 4a(1 - a)$; maximum $c_P = 16/27$ pri $a = 1/3$ (Betzov limit), vtedy $c_T = 8/9$.
- Prúdová trubica sa rozširuje; pri Betzovom optime je prierez úplavy dvojnásobkom plochy rotora.
- Teória platí pre a približne do 0,4; pri silnom zaťažení nastáva turbulentný stav úplavy.
- Aplikácia na prstencové trubice je základom hybnostnej časti metódy BEM.

Kontrolné otázky

1. Aké predpoklady používa model akčného disku?
2. Prečo sa prúdová trubica za rotorom rozširuje?
3. Prečo nemožno použiť Bernoulliho rovnicu pozdĺž celej prúdnice prechádzajúcej diskom? Ako sa tento problém rieši?
4. Odvodte, že rýchlosť v rovine disku je priemerom rýchlostí pred diskom a v úplave.
5. Definujte axiálny indukčný faktor. Aká je rýchlosť v úplave?
6. Odvodte $c_P = 4a(1 - a)^2$ a Betzov limit.
7. Vysvetlite fyzikálne, prečo existuje optimálne zaťaženie rotora.
8. Ako sa mení tlak pozdĺž prúdovej trubice?
9. V akom rozsahu a platí hybnostná teória? Čo je turbulentný stav úplavy?
10. Prečo skutočné rotory nedosahujú Betzov limit?
11. Čo je predpoklad nezávislosti prstencov?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Úloha 5.1. Vypočítajte c_P , c_T , rýchlosť v rovine disku a v úplave pre $a = 0,1$; $0,2$; $0,3$ a $0,4$ pri rýchlosti vetra 10 m/s .

(Výsledok: $c_P = 0,324$; $0,512$; $0,588$; $0,576$; $c_T = 0,36$; $0,64$; $0,84$; $0,96$)

Úloha 5.2. Ideálny disk pracuje pri $a = 0,25$. Určte c_P , c_T a pomer plochy úplavy k ploche disku.

(Výsledok: $c_P = 0,5625$; $c_T = 0,75$; $A_w/A = 1,5$)

Úloha 5.3. Referenčná turbína IEA 15 MW má priemer rotora 240 m a menovitú rýchlosť vetra 10,59 m/s [7]. Určte výkon vetra prechádzajúceho plochou rotora pri tejto rýchlosti a výkon ideálneho disku pri Betzovom optime. Porovnajte s menovitým výkonom.

(Výsledok: $P_w \approx 32,9$ MW; $P_{\text{Betz}} \approx 19,5$ MW; menovitý výkon je 77 % hodnoty P_{Betz})

Úloha 5.4. Ukážte, že výkon $P = T v_d$ sa rovná rozdielu tokov kinetickej energie $\frac{1}{2}\dot{m}(v_\infty^2 - v_w^2)$.

Úloha 5.5. Odvodte vzťahy (5.14) pre pomer prierezov prúdovej trubice.

Úloha 5.6. Rotor s priemerom 80 m pracuje pri rýchlosti vetra 8 m/s so súčiniteľom ťahu 0,75. Určte podľa hybnostnej teórie indukčný faktor, ťah a výkon.

(Výsledok: $a = 0,25$; $T \approx 148$ kN; $P \approx 887$ kW)

Úloha 5.7. Pri akom indukčnom faktore dosahuje ideálny disk najväčší ťah? Aký je tento ťah? Prečo turbína nepracuje v tomto bode?

(Výsledok: $a = 0,5$; $c_T = 1$; $c_P = 0,5 < 16/27$ a teória je na hranici platnosti)

Úloha 5.8. Podľa (5.15) vypočítajte pomernú rýchlosť na osi disku vo vzdialenosti R pred diskom a R za ním pri $a = 1/3$.

(Výsledok: 0,902 a 0,431)

Úloha 5.9. Vrtuľa s plochou 3 m² vytvára pri rýchlosti 60 m/s ťah 2000 N ($\rho = 1,225$ kg/m³). Určte faktor prítoku, Froudovu účinnosť a najmenší potrebný výkon.

(Výsledok: $a \approx 0,0706$; $\eta_F \approx 0,934$; $P \approx 128$ kW)

Kapitola 6

Rotujúci akčný disk a rotácia úplavy

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

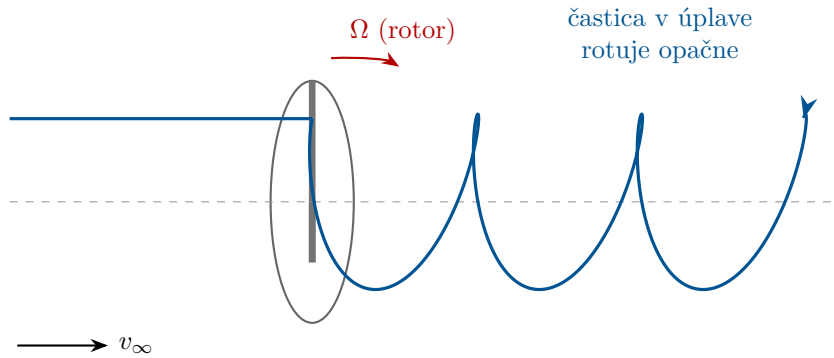
- vysvetliť, prečo vzduch za rotorom rotuje a akým smerom,
- definovať tangenciálny indukčný faktor a miestnu rýchlobežnosť,
- odvodiť krútiaci moment a výkon prstenca z vety o zmene momentu hybnosti,
- určiť optimálne rozloženie indukčných faktorov po polomere rotora,
- vysvetliť vznik podtlaku v rotujúcej úplave,
- porovnať dva prístupy k energii rotácie úplavy a ich dôsledky pre najväčší súčiniteľ výkonu pri malých rýchlobežnostiach,
- zostaviť rýchlostný trojuholník prvku lopatky s oboma indukčnými faktormi.

V kap. 5 sme rotor nahradili diskom, ktorý vzduch iba spomaľuje. Skutočný rotor však odovzdáva energiu hriadeľu ako *krútiaci moment*. Podľa zákona akcie a reakcie pôsobí rotor na vzduch opačným momentom a vzduch za rotorom preto rotuje. V tejto kapitole rozšírime hybnostnú teóriu o rotáciu úplavy. Výklad sleduje [13, čl. 3.3 a 3.4]; klasické odvodenie optimálneho rotora s rotujúcou úplavou uvádzajú aj [1, 3].

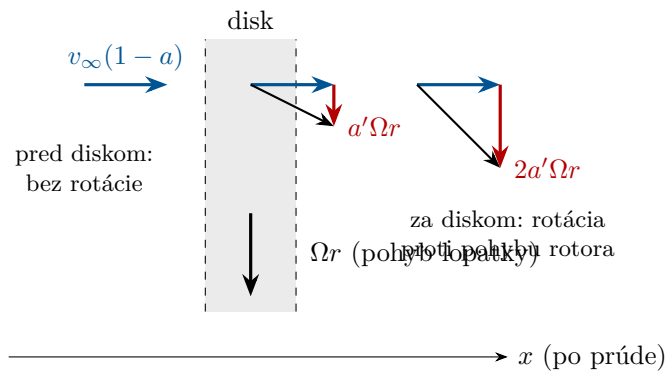
6.1 Rotácia úplavy

Vzduch prichádzajúci k rotoru nerotuje. Pri prechode rotorom na neho lopatky pôsobia momentom opačným k momentu, ktorým vzduch poháňa rotor. Vzduch preto získa obvodovú (tangenciálnu) zložku rýchlosti, ktorá má *opačný zmysel ako otáčanie rotora*. Častica vzduchu sa za rotorom pohybuje po skrutkovici (obr. 6.1) a úplava ako celok rotuje [13, čl. 3.3.1].

Zmenu obvodovej rýchlosti vyjadrujeme **tangenciálnym indukčným faktorom** a' . Pred diskom je obvodová rýchlosť vzduchu nulová, tesne za diskom $2a'\Omega r$, kde r je polomer a Ω uhlová rýchlosť rotora. V strede hrúbky disku, t. j. v mieste lopatky, je indukovaná obvodová rýchlosť polovičná, $a'\Omega r$ [13, čl. 3.3.1] (obr. 6.2). Situácia je analogická ako pri axiálnom indukčnom faktore, kde je spomalenie v rovine disku polovicou spomalenia v úplave.



Obr. 6.1. Dráha častice vzduchu, ktorá prechádza rotorom (schematicky, podľa [13, obr. 3.4]): pred rotorom sa pohybuje priamočiari, za rotorom po skrutkovici s opačným zmyslom otáčania, ako má rotor.



Obr. 6.2. Nárast obvodovej zložky rýchlosti vzduchu pri prechode diskom (schematicky, podľa [13, obr. 3.5]): pred diskom je nulová, v rovine lopatiek $a'\Omega r$, za diskom $2a'\Omega r$, a to v zmysle opačnom k pohybu lopatiek.

6.2 Veta o zmene momentu hybnosti pre prstenec

Obvodová rýchlosť ani axiálny indukčný faktor nemusia byť po polomere konštantné. Rotor preto rozdelíme na prstence s polomerom r a šírkou dr (obr. 5.10) a predpokladáme, že každý prstenec odovzdáva hybnosť a moment hybnosti iba vzduchu, ktorý ním preteká [13, čl. 3.3.2].

Krútiaci moment, ktorým vzduch pôsobí na prstenec, sa rovná zmene momentu hybnosti vzduchu, ktorý prstencom pretečie za jednotku času:

$$\text{moment} = \text{hmotnostný prietok} \times \text{zmena obvodovej rýchlosti} \times \text{polomer}.$$

Hmotnostný prietok prstencom je $d\dot{m} = \rho v_\infty (1-a) 2\pi r dr$ a zmena obvodovej rýchlosti medzi priestorom pred diskom a úplavou je $2a'\Omega r$, takže

$$dQ = \rho v_\infty (1-a) 2\pi r dr \cdot 2a'\Omega r \cdot r = 4\pi \rho v_\infty \Omega a' (1-a) r^3 dr. \quad (6.1)$$

Výkon prstenca je

$$dP = \Omega dQ = 4\pi \rho v_\infty \Omega^2 a' (1-a) r^3 dr. \quad (6.2)$$

Je výhodné zaviesť **miestnu rýchlobežnosť** – pomer obvodovej rýchlosti prierezu lopatky k rýchlosti vetra – a pomerný polomer $\mu = r/R$:

$$\lambda_r = \frac{\Omega r}{v_\infty} = \lambda \mu, \quad \mu = \frac{r}{R}. \quad (6.3)$$

Na konci lopatky je $\lambda_r = \lambda$. So súčiniteľom výkonu (1.11) a s plochou rotora πR^2 prejde (6.2) na

$$\frac{dC_P}{d\mu} = 8(1-a) a' \lambda^2 \mu^3 \quad (6.4)$$

[13, rov. (3.20)]. Ak poznáme priebeh $a(\mu)$ a $a'(\mu)$, integráciou od $\mu = 0$ po $\mu = 1$ dostaneme súčiniteľ výkonu celého rotora.

Príklad 6.1: Krútiaci moment rotora

Referenčná turbína NREL 5 MW dosahuje menovitý výkon pri otáčkach $12,1 \text{ min}^{-1}$ [6]. Odhadnite krútiaci moment na hriadeli rotora. Aký moment pôsobí na vzduch?

Riešenie. $\Omega = 2\pi \cdot 12,1/60 = 1,267 \text{ rad/s}$ (čl. 1.6.2). Ak zanedbáme straty v hnacom ústrojenstve a generátore, je $Q = P/\Omega = 5 \cdot 10^6 / 1,267 \approx 3,9 \cdot 10^6 \text{ N m}$, teda približne 3,9 MN m. Keďže menovitý výkon je elektrický, skutočný moment na hriadeli rotora je o straty väčší. Rovnako veľkým momentom opačného zmyslu pôsobí rotor na vzduch; tento moment uvádza úplavu do rotácie.

6.3 Energetická bilancia a optimálny rotor

6.3.1 Spojenie axiálnej a obvodovej hybnosti

Výkon prstenca môžeme vyjadriť aj z axiálnej hybnostnej teórie (5.18): $dP = 4\pi \rho v_\infty^3 a(1-a)^2 r dr$. Ak predpokladáme, že výkon odobratý spomalením vzduchu sa celý odovzdá hriadeľu, dostaneme porovnaním s (6.2)

$$4\pi \rho v_\infty^3 a(1-a)^2 r dr = 4\pi \rho v_\infty \Omega^2 a' (1-a) r^3 dr,$$

teda [13, rov. (3.18)]

$$a(1-a) = \lambda_r^2 a'. \quad (6.5)$$

Pri danej miestnej rýchlobežnosti je teda tangenciálny indukčný faktor určený axiálnym. Pretože λ_r klesá smerom k náboju, rastie tam a' – úplava rotuje najrýchlejšie blízko osi.

6.3.2 Maximum výkonu

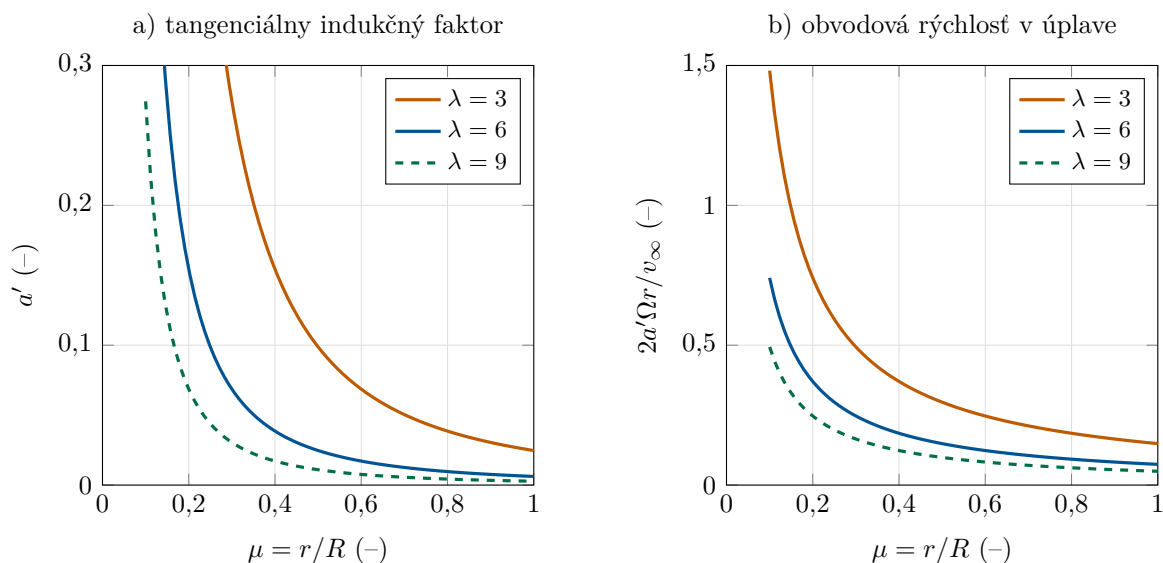
Výraz $4a'(1-a)\lambda_r^2$ v (6.4) predstavuje účinnosť, s akou prstenec odoberá výkon prúdu, ktorý ním preteká [13, rov. (3.19)]. Jeho maximum pri väzbe (6.5) nastáva pri [13, rov. (3.23)]

$$a = \frac{1}{3}, \quad a' = \frac{a(1-a)}{\lambda^2 \mu^2} = \frac{2}{9\lambda_r^2}. \quad (6.6)$$

Optimálny axiálny indukčný faktor je rovnaký ako bez rotácie a po celom disku konštantný; tangenciálny indukčný faktor klesá s druhou mocninou polomeru (obr. 6.3). Dosadením do (6.4) a integráciou

$$c_P = \int_0^1 8(1-a) \frac{a(1-a)}{\lambda^2 \mu^2} \lambda^2 \mu^3 d\mu = 4a(1-a)^2 = \frac{16}{27}$$

dostaneme opäť Betzov limit [13, rov. (3.24)].



Obr. 6.3. Optimálny rotor podľa (6.6) ($a = 1/3$): a) tangenciálny indukčný faktor $a' = 2/(9\lambda^2\mu^2)$, b) pomerná obvodová rýchlosť vzduchu v úplave $2a'\Omega r/v_\infty = 4/(9\lambda\mu)$. Rotácia úplavy je najväčšia pri náboji a pri malej rýchlobežnosti.

Príklad 6.2: Rotácia úplavy optimálneho rotora

Rotor s priemerom 126 m pracuje pri rýchlosti vetra 11,4 m/s s rýchlobežnosťou $\lambda = 7$ (čl. 1.6.2) a s optimálnym zaťažením podľa (6.6). Určte tangenciálny indukčný faktor a obvodovú rýchlosť vzduchu v úplave na polomeroch $\mu = 0,2$; 0,5 a 1,0.

Riešenie. Miestna rýchlobežnosť $\lambda_r = 7\mu$, $a' = 2/(9\lambda_r^2)$ a obvodová rýchlosť v úplave $2a'\Omega r = 2a'\lambda_r v_\infty = \frac{4}{9\lambda_r} v_\infty$:

μ	λ_r	a'	$2a'\Omega r$ (m/s)
0,2	1,4	0,113	3,62
0,5	3,5	0,0181	1,45
1,0	7,0	0,0045	0,72

Vo vonkajšej časti rotora, ktorá prispieva k výkonu najviac, je rotácia úplavy veľmi malá; pri náboji je obvodová rýchlosť v úplave porovnateľná s tretinou rýchlosti vetra.

6.4 Tlak v rotujúcej úplave

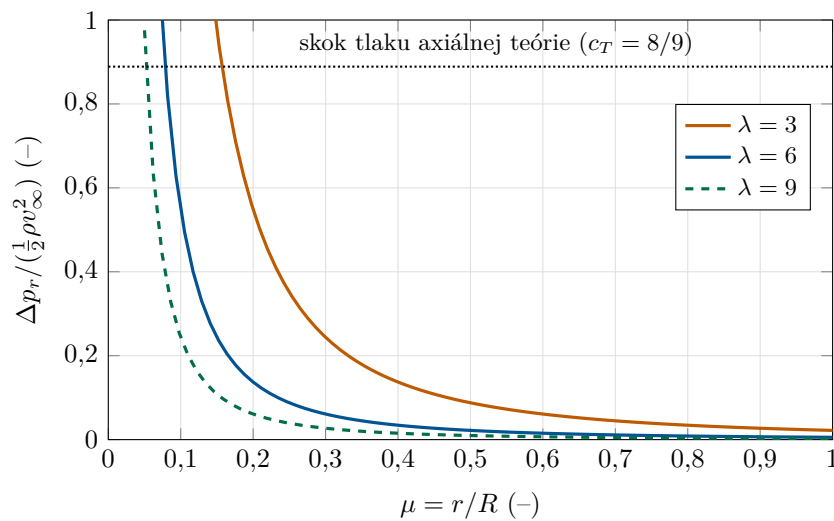
Obvodová rýchlosť zvyšuje kinetickú energiu vzduchu v úplave. Táto energia sa podľa [13, čl. 3.3.4] kompenzuje poklesom statického tlaku

$$\Delta p_r = \frac{1}{2} \rho (2a'\Omega r)^2. \quad (6.7)$$

Pre optimálny rotor je $2a'\Omega r = \frac{4}{9\lambda_r} v_\infty$, takže

$$\frac{\Delta p_r}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = \left(\frac{4}{9\lambda\mu} \right)^2. \quad (6.8)$$

Podtlak v úplave rastie smerom k osi, takže v úplave vzniká radiálny tlakový gradient, ktorý udržiava rotujúci vzduch na kruhovej dráhe – vyrovnáva odstredivú silu [13, čl. 3.3.4]. Tento pokles tlaku sa pridáva k rovnomernému skoku tlaku z axiálnej hybnostnej teórie (5.4) a pretrváva až do vzdialenej úplavy, kde vzduch stále rotuje (obr. 6.4). Preto nemení axiálnu hybnosť vzduchu, musia ho však niesť lopatky – v rovnici pre ťah prstenca sa objaví ako dodatočná sila (čl. 6.9).



Obr. 6.4. Pokles statického tlaku v rotujúcej úplave optimálneho rotora podľa (6.8) v porovnaní so skokom tlaku $\Delta p / (\frac{1}{2} \rho v_\infty^2) = 8/9$ z axiálnej hybnostnej teórie.

6.5 Energia rotácie úplavy: dva prístupy

Odvodenie v čl. 6.3 viedlo k záveru, že rotácia úplavy súčiniteľ výkonu nezmenšuje. V literatúre sa však častejšie uvádza iný výsledok, podľa ktorého je najväčší súčiniteľ výkonu pri malých rýchlobežnostiach výrazne menší ako Betzov limit. Rozdiel vyplýva z toho, ako sa započítala kinetická energia rotácie úplavy.

6.5.1 Klasický prístup: energia rotácie ako strata

Glauert vo svojej teórii veterných motorov predpokladal, že kinetická energia rotácie úplavy sa odoberá z kinetickej energie prúdu a je teda stratou [13, čl. 3.3.4]. Tento prístup preberajú mnohé učebnice, napr. [3, čl. 3.3]. Ťah prstenca sa v ňom vyjadruje zo skoku tlaku na rotujúcom disku, ktorý vyplýva z energetickej rovnice v sústave rotujúcej s lopatkami, $dT = 4a'(1 + a')\frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 2\pi r dr$ [3, rov. (3.23)]. Porovnaním s ťahom z axiálnej hybnostnej teórie dostaneme namiesto (6.5) väzbu [3, rov. (3.25)]

$$a'(1 + a')\lambda_r^2 = a(1 - a). \quad (6.9)$$

Rovnaký vzťah dáva aj model vírového valca s koreňovým vírom [13, rov. (3.36)]. Súčiniteľ výkonu je potom

$$c_P = \frac{8}{\lambda^2} \int_0^\lambda a'(1 - a)\lambda_r^3 d\lambda_r \quad (6.10)$$

[3, rov. (3.33)] a jeho maximalizácia pri väzbe (6.9) vedie pre každý prstenec k optimálnym hodnotám [3, rov. (3.35), (3.36)]

$$a' = \frac{1 - 3a}{4a - 1}, \quad \lambda_r^2 = \frac{(1 - a)(4a - 1)^2}{1 - 3a}. \quad (6.11)$$

Pri náboji ($\lambda_r \rightarrow 0$) je optimálne $a = \frac{1}{4}$, s rastúcim λ_r sa a blíži k $\frac{1}{3}$. Výsledný najväčší súčiniteľ výkonu ako funkcia rýchlobežnosti je na obr. 6.6 a v tab. 6.1. Optimálne indukčné faktory podľa oboch prístupov porovnáva obr. 6.5: pri $\lambda_r > 2$ sú takmer rovnaké, rozdiel je len vo vnútornej časti rotora, kde je miestna rýchlobežnosť malá.

Príklad 6.3: Optimálne indukčné faktory pri malej miestnej rýchlobežnosti

Určte optimálne indukčné faktory podľa klasického prístupu pre prstenec s $\lambda_r = 1$ a porovnajte s (6.6).

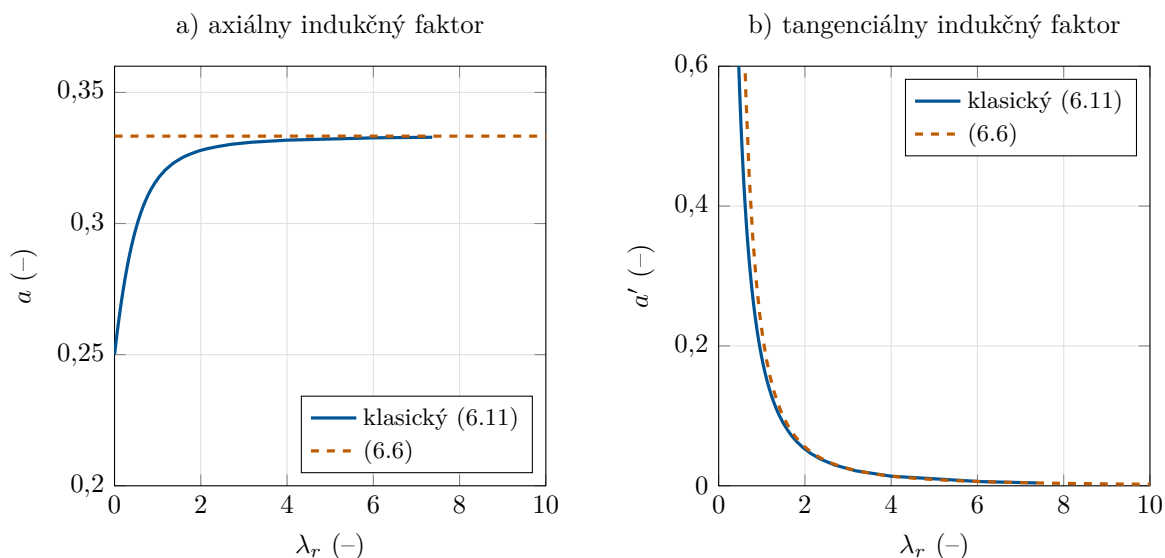
Riešenie. Hľadáme a z intervalu $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$, pre ktoré $(1 - a)(4a - 1)^2 / (1 - 3a) = 1$. Úpravou dostaneme kubickú rovnicu $16a^3 - 24a^2 + 12a - 2 = 3a - 1$, t.j. $16a^3 - 24a^2 + 9a - 1 = 0$, ktorá má v intervale koreň $a = (3 - \sqrt{3})/4 = 0,317$ (overenie: $0,683 \cdot 0,268^2 / 0,049 = 1,00$). Potom

$$a' = \frac{1 - 3 \cdot 0,317}{4 \cdot 0,317 - 1} = \frac{0,049}{0,268} = 0,183.$$

Podľa (6.6) by bolo $a = 0,333$ a $a' = 2/9 = 0,222$. Klasický prístup teda pri malej miestnej rýchlobežnosti volí menšie zaťaženie prstenca, aby sa zmenšila strata rotáciou úplavy.

6.5.2 Prístup so všeobecnou hybnostnou teóriou

Burton a kol. upozorňujú, že Glauertova *všeobecná* hybnostná teória, ktorá zahŕňa aj rozširovanie úplavy, ukazuje, že kinetická energia rotácie sa nečerpá z kinetickej energie prúdu, ale z en-



Obr. 6.5. Optimálne indukčné faktory ideálneho rotora v závislosti od miestnej rýchlobežnosti podľa klasického prístupu (6.11) a podľa (6.6) (vlastný výpočet).

ergie statického tlaku (čl. 6.4); podľa nich teda rotácia úplavy výkon nezmenšuje a rozdiel medzi oboma prístupmi je pre moderné turbíny, ktoré pracujú pri veľkých rýchlobežnostiach, veľmi malý [13, čl. 3.3.4]. Význam by mal pri veterných motoroch na čerpanie vody, ktoré pracujú pri veľmi malých rýchlobežnostiach [13, čl. 3.3.4].

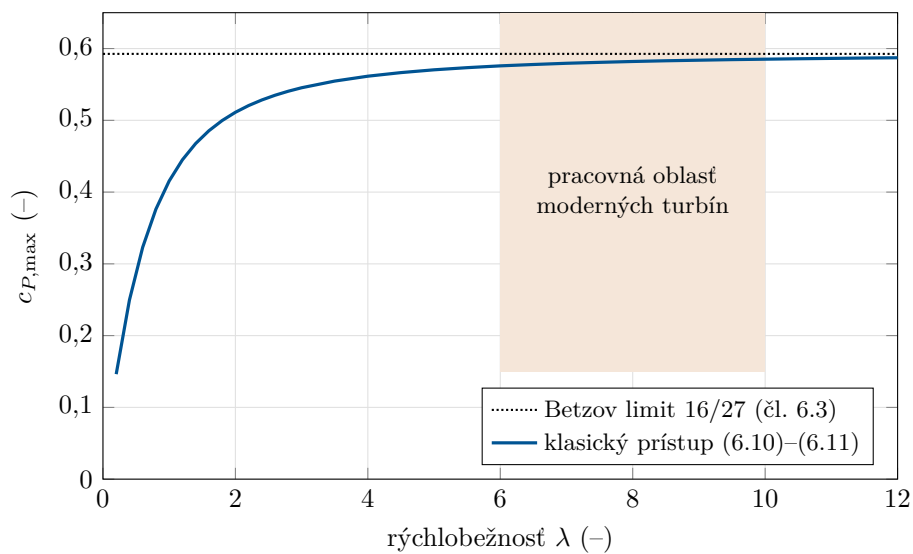
Poznámka

Pre prax z toho vyplýva: pri rýchlobežnostiach, pri ktorých pracujú moderné trojlopatkové turbíny ($\lambda \approx 6$ až 10, napr. návrhová rýchlobežnosť referenčnej turbíny IEA 15 MW je 9 [7]), sa výsledky oboch prístupov líšia menej ako o 3 % (tab. 6.1). Metóda BEM (kap. 7) používa vzťahy, ktoré zahŕňajú obvodovú indukciu prostredníctvom rýchlostného trojuholníka prvku lopatky.

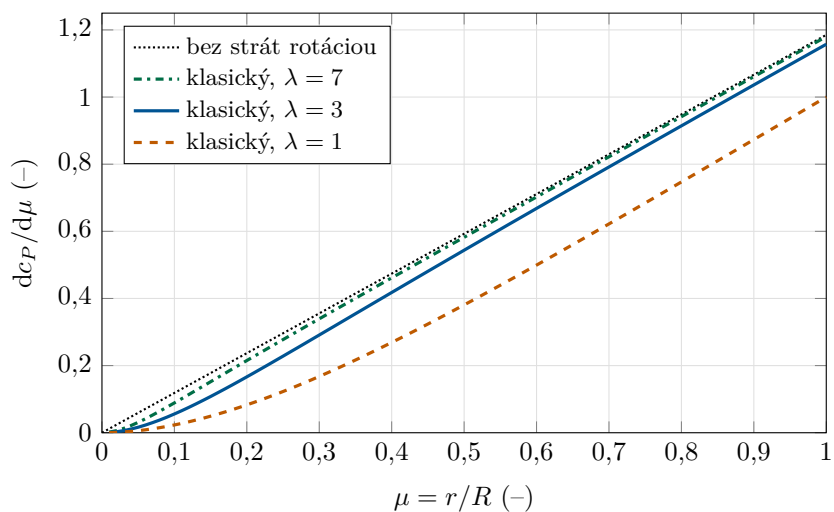
Tabuľka 6.1. Najväčší súčiniteľ výkonu ideálneho rotora s rotujúcou úplavou podľa klasického prístupu (vlastný výpočet; hodnoty sa zhodujú s [3, tab. 3.1]) a jeho pomer k Betzovmu limitu.

λ (-)	$c_{P,\max}$ (-)	$c_{P,\max}/(16/27)$ (-)
0,5	0,289	0,488
1,0	0,416	0,701
2,0	0,511	0,863
3,0	0,545	0,920
5,0	0,570	0,962
7,0	0,580	0,978
9,0	0,584	0,985
10,0	0,585	0,988

Kde vznikajú straty rotáciou úplavy, ukazuje rozloženie príspevku prstencov k súčiniteľu výkonu $dc_P/d\mu$ (6.4) (obr. 6.7). Bez strát rotáciou rastie príspevok lineárne s polomerom, $dc_P/d\mu = \frac{16}{27} \cdot 2\mu$, lebo plocha prstenca rastie s polomerom. Podľa klasického prístupu je príspevok vnútornej časti rotora pri malej rýchlobežnosti výrazne menší; pri $\lambda = 7$ sa od ideálneho rozloženia líši len blízko osi.



Obr. 6.6. Najväčší súčiniteľ výkonu ideálneho rotora s rotujúcou úplavou v závislosti od rýchlobežnosti podľa klasického prístupu (vlastný výpočet numerickou integráciou (6.10) s optimálnymi hodnotami (6.11)).



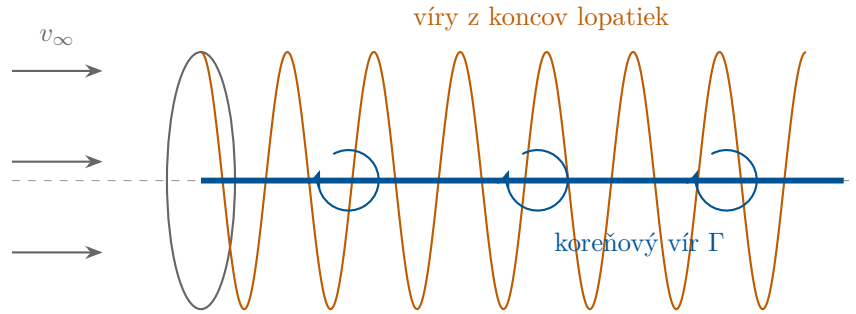
Obr. 6.7. Príspevok prstencov k súčiniteľu výkonu optimálneho rotora podľa klasického prístupu pre rôzne rýchlobežnosti; plocha pod krivkou je $c_{P,max}$ (vlastný výpočet).

6.6 Vírový model rotujúcej úplavy

Rotáciu úplavy možno vysvetliť aj pomocou vírového modelu akčného disku (kap. 5). Tak ako sa z konca každej lopatky odtŕha vír, odtŕha sa vír aj z koreňa lopatky. Ak predpokladáme, že lopatky siahajú až k osi otáčania, víry od koreňov všetkých lopatiek majú rovnaký zmysel otáčania a vytvárajú v osi **koreňový vír** s celkovou cirkuláciou Γ (súčet cirkulácií všetkých lopatiek). Koreňový vír je hlavnou príčinou obvodovej indukovanej rýchlosti v úplave aj na disku [13, čl. 3.4.4] (obr. 6.8). Podľa Biotovho–Savartovho zákona indukuje na disku obvodovú rýchlosť [13, rov. (3.33)]

$$\Omega r a' = \frac{\Gamma}{4\pi r}, \quad a' = \frac{\Gamma}{4\pi r^2 \Omega}. \quad (6.12)$$

Rovnaký výsledok dáva veta o zmene momentu hybnosti spolu s Kuttovou–Žukovského vetou [13, čl. 3.4.4]. Pri rovnomernej cirkulácii po lopatke teda a' klesá s druhou mocninou polomeru, $a' = a'_t R^2/r^2$, kde a'_t je hodnota na konci lopatky.



Obr. 6.8. Vírový systém rotora s rovnomernou cirkuláciou: skrutkové víry z koncov lopatiek tvoria vírový valec, víry z koreňov lopatiek sa spájajú do koreňového víru v osi (schematicky, podľa opisu v [13, čl. 3.4]).

Z rovnosti momentov vyplýva pre hodnotu na konci lopatky [13, rov. (3.36)]

$$a'_t (1 + a'_t) = \frac{a(1 - a)}{\lambda^2} \quad (6.13)$$

a súčiniteľ výkonu rotora [13, rov. (3.40)]

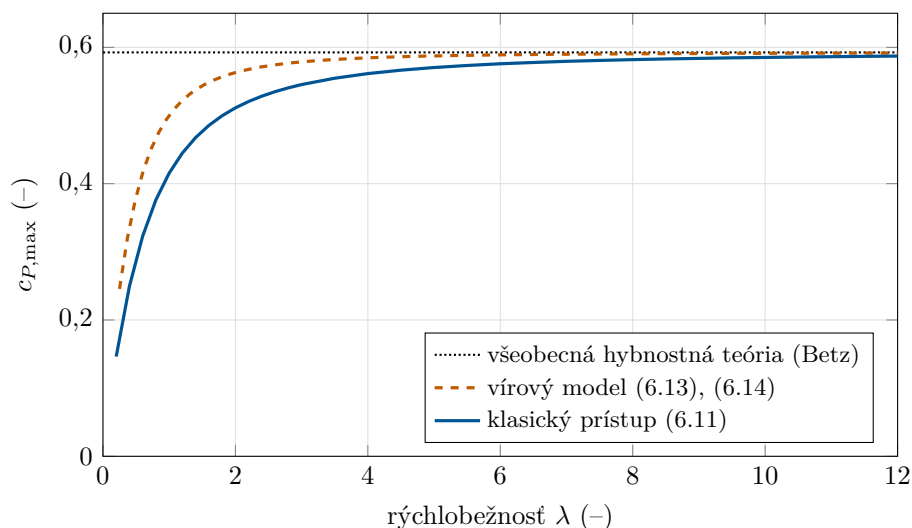
$$c_P = \frac{4a(1 - a)^2}{1 + a'_t}. \quad (6.14)$$

Oproti $4a(1 - a)^2$ je výkon zmenšený o energiu potrebnú na roztočenie úplavy. Burton a kol. však dodávajú, že všeobecná hybnostná teória, ktorá zahŕňa rozširovanie úplavy, ukazuje, že na rotáciu úplavy nie je potrebná žiadna časť kinetickej energie voľného prúdu – všetka kinetická energia rotácie pochádza z energie statického tlaku [13, čl. 3.4.5]. Porovnanie troch modelov je na obr. 6.9; pri rýchlobežnostiach moderných turbín sa výsledky líšia len o niekoľko percent.

Príklad 6.4: Vírový model pri malej rýchlobežnosti

Vypočítajte súčiniteľ výkonu podľa vírového modelu pre $a = 1/3$ a $\lambda = 1$ a porovnajte s klasickým prístupom (tab. 6.1).

Riešenie. Z (6.13): $a'_t(1 + a'_t) = \frac{(1/3)(2/3)}{1} = 0,2222$, teda $a'_t = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0,2222}) = 0,187$. Podľa (6.14) $c_P = 0,5926/1,187 = 0,499$. Klasický

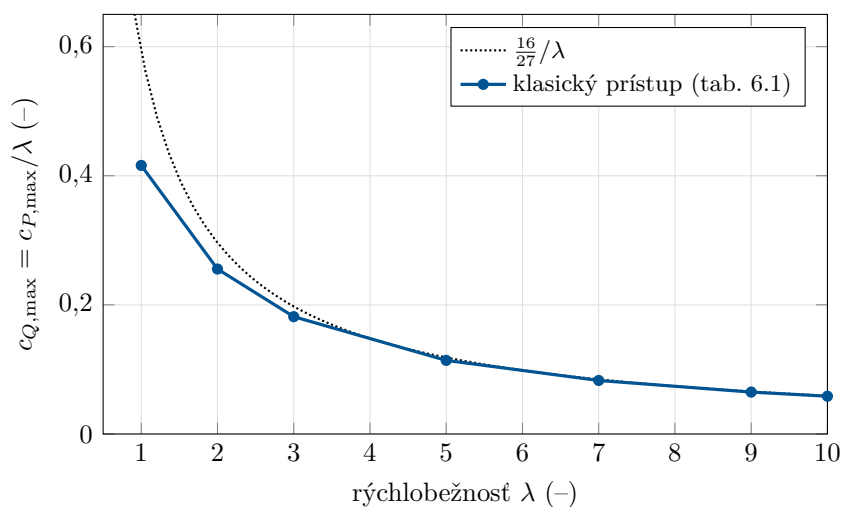


Obr. 6.9. Najväčší súčiniteľ výkonu ideálneho rotora podľa troch modelov rotácie úplavy (vlastný výpočet; pri vírovom modeli je a zvolené tak, aby c_P podľa (6.14) bol najväčší).

prístup dáva pri $\lambda = 1$ hodnotu 0,416 a všeobecná hybnostná teória 0,593. Pri malej rýchlobežnosti sa teda modely výrazne líšia; pri $\lambda = 7$ dávajú 0,590, 0,580 a 0,593.

6.7 Krútiaci moment ideálneho rotora

Súčiniteľ krútiaceho momentu je podľa (1.15) $c_Q = c_P/\lambda$. Pri rovnakom výkone je teda krútiaci moment nepriamo úmerný otáčkam: pomalobežný rotor má veľký krútiaci moment, rýchlobežný malý (obr. 6.10). Preto sa pre čerpanie vody piestovými čerpadlami, ktoré potrebujú veľký rozbehový moment, používali viaclopatkové pomalobežné rotory, kým pre výrobu elektriny je žiaduci čo najmenší moment, aby bola prevodovka lacnejšia [13, čl. 4.1.3].



Obr. 6.10. Najväčší súčiniteľ krútiaceho momentu ideálneho rotora v závislosti od rýchlobežnosti (vlastný výpočet z tab. 6.1).

Príklad 6.5: Krútiaci moment pomalobežného a rýchlobežného rotora

Porovnajte rozmery, otáčky a krútiaci moment dvoch ideálnych rotorov, ktoré pri rýchlosti vetra 8 m/s dávajú výkon 10 kW: prvý pracuje pri $\lambda = 1$ ($c_P = 0,416$), druhý pri $\lambda = 7$ ($c_P = 0,580$).

Riešenie. Plocha rotora $A = P/(c_P \frac{1}{2} \rho v_\infty^3)$: 76,6 m² ($R = 4,94$ m), resp. 55,0 m² ($R = 4,18$ m). Uhlová rýchlosť $\Omega = \lambda v_\infty / R$: 1,62 rad/s (15,5 min⁻¹), resp. 13,4 rad/s (128 min⁻¹). Krútiaci moment $Q = P/\Omega$: 6,17 kN m, resp. 0,75 kN m. Pomalobežný rotor je väčší a jeho krútiaci moment je osemkrát väčší.

6.8 Rýchlostný trojuholník prvku lopatky

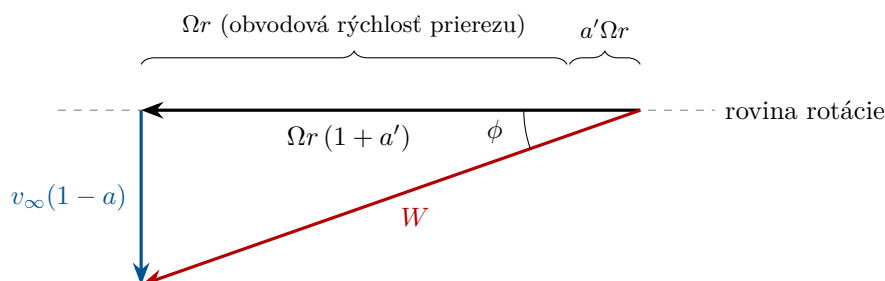
Oba indukčné faktory určujú rýchlosť, ktorou je obtekaný prierez lopatky na polomere r [13, čl. 3.5.2]. V rovine rotora má vzduch axiálnu rýchlosť $v_\infty(1 - a)$. V obvodovom smere sa prierez pohybuje rýchlosťou Ωr a vzduch v rovine lopatiek má obvodovú rýchlosť $a'\Omega r$ opačného zmyslu, takže relatívna obvodová rýchlosť je $\Omega r(1 + a')$ (obr. 6.11). Relatívna rýchlosť obtekania prierezu je

$$W = \sqrt{v_\infty^2(1 - a)^2 + \Omega^2 r^2(1 + a')^2} \quad (6.15)$$

a zviaza s rovinou rotácie **uhol prúdenia** ϕ , pre ktorý platí

$$\sin \phi = \frac{v_\infty(1 - a)}{W}, \quad \cos \phi = \frac{\Omega r(1 + a')}{W}, \quad \tan \phi = \frac{1 - a}{\lambda_r(1 + a')} \quad (6.16)$$

[13, rov. (3.41), (3.42)]. Tento trojuholník je základom teórie prvkov lopatky v kap. 7.



Obr. 6.11. Rýchlostný trojuholník prierezu lopatky na polomere r (podľa [13, obr. 3.14]; pomer zložiek je schematický): axiálna zložka $v_\infty(1 - a)$, obvodová zložka $\Omega r(1 + a')$, relatívna rýchlosť W a uhol prúdenia ϕ meraný od roviny rotácie.

Príklad 6.6: Uhol prúdenia a relatívna rýchlosť

Pre rotor z čl. 6.3.2 ($v_\infty = 11,4$ m/s, $\lambda = 7$, $a = 1/3$, $a' = 2/(9\lambda_r^2)$) určte uhol prúdenia a relatívnu rýchlosť na polomeroch $\mu = 0,2$ a $1,0$.

Riešenie. Pre $\mu = 0,2$: $\lambda_r = 1,4$, $a' = 0,113$.

$$\tan \phi = \frac{1 - 1/3}{1,4 \cdot 1,113} = 0,428, \quad \phi = 23,2^\circ,$$

$$W = 11,4 \sqrt{(2/3)^2 + (1,4 \cdot 1,113)^2} = 11,4 \cdot 1,695 = 19,3 \text{ m/s.}$$

Pre $\mu = 1,0$: $\lambda_r = 7$, $a' = 0,0045$: $\tan \phi = 0,667/(7 \cdot 1,0045) = 0,0948$, $\phi = 5,4^\circ$, $W = 11,4\sqrt{0,444 + 49,45} = 80,5 \text{ m/s}$.

Uhol prúdenia sa po lopatke výrazne mení – pri náboji je veľký, pri konci lopatky malý. Aby mal prierez po celej dĺžke približne optimálny uhol nábehu, musí byť lopatka *skrútená* (kap. 9). Relatívna rýchlosť na konci lopatky je približne rovná jej obvodovej rýchlosti.

6.9 Ťah prstenca s rotujúcou úplavou

Pri výpočte ťahu prstenca treba okrem zmeny axiálnej hybnosti zohľadniť aj pokles tlaku v rotujúcej úplave (6.7), ktorý pôsobí na lopatky ako dodatočná axiálna sila [13, čl. 3.5.1 a 3.5.3]:

$$dT = 4\pi\rho [v_\infty^2 a(1-a) + (a'\Omega r)^2] r dr. \quad (6.17)$$

Vo vonkajšej časti lopatky je druhý člen zanedbateľný (čl. 6.3.2); významný je pri náboji a pri malých rýchlobežnostiach. Vzťahy (6.1) a (6.17) vyjadrujú moment a ťah prstenca z *hybnostnej* strany. V nasledujúcej kapitole ich porovnáme s momentom a ťahom vypočítaným zo síl na prvky lopatiek, čím dostaneme metódu BEM.

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Reakciou na krútiaci moment rotora úplava rotuje opačne ako rotor; obvodová rýchlosť je v rovine lopatiek $a'\Omega r$, v úplave $2a'\Omega r$.
- Moment prstenca: $dQ = 4\pi\rho v_\infty \Omega a'(1-a)r^3 dr$; $dc_P/d\mu = 8(1-a)a'\lambda_r^2\mu^3$, $\lambda_r = \lambda\mu$.
- Z energetickej bilancie $a(1-a) = \lambda_r^2 a'$; optimum $a = 1/3$, $a' = 2/(9\lambda_r^2)$ a $c_P = 16/27$.
- Rotácia úplavy je spojená s poklesom statického tlaku $\frac{1}{2}\rho(2a'\Omega r)^2$, ktorý rastie k osi.
- Klasický prístup, ktorý považuje energiu rotácie za stratu, dáva $c_{P,\max}(\lambda) < 16/27$; rozdiel je významný len pri malých rýchlobežnostiach.
- Rýchlostný trojuholník prierezu: $W^2 = v_\infty^2(1-a)^2 + \Omega^2 r^2(1+a')^2$, $\tan \phi = (1-a)/[\lambda_r(1+a')]$.

Kontrolné otázky

1. Prečo vzduch za rotorom rotuje? Akým smerom vzhľadom na rotor?
2. Definujte tangenciálny indukčný faktor. Aká je obvodová rýchlosť vzduchu pred diskom, v rovine lopatiek a v úplave?

3. Odvodte krútiaci moment prstenca z vety o zmene momentu hybnosti.
4. Čo je miestna rýchlobežnosť? Ako sa mení po polomere?
5. Prečo je rotácia úplavy najväčšia pri náboji?
6. Aké sú optimálne hodnoty a a a' podľa (6.6)?
7. Prečo v rotujúcej úplave klesá statický tlak? Aký smer má radiálny tlakový gradient?
8. V čom sa líšia dva prístupy k energii rotácie úplavy? Pre aké turbíny je rozdiel významný?
9. Nakreslite rýchlostný trojuholník prierezu lopatky a vyznačte v ňom W a ϕ .
10. Prečo musí byť lopatka skrútená?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Úloha 6.1. Referenčná turbína IEA 15 MW má priemer rotora 240 m a najväčšie otáčky $7,56 \text{ min}^{-1}$ [7]. Odhadnite krútiaci moment rotora pri výkone 15 MW a týchto otáčkach (straty zanedbajte).

(Výsledok: $\Omega = 0,792 \text{ rad/s}$; $Q \approx 19 \text{ MN m}$)

Úloha 6.2. Pre optimálny rotor s $\lambda = 9$ vypočítajte a' a obvodovú rýchlosť vzduchu v úplave na polomeroch $\mu = 0,1$; $0,3$ a $1,0$ pri rýchlosti vetra 10 m/s .

(Výsledok: $a' = 0,274$; $0,0305$; $0,00274$; $2a'\Omega r = 4,94 \text{ m/s}$; $1,65 \text{ m/s}$; $0,49 \text{ m/s}$)

Úloha 6.3. Vypočítajte pokles tlaku v rotujúcej úplave optimálneho rotora s $\lambda = 6$ na polomere $\mu = 0,2$ pri rýchlosti vetra 10 m/s a porovnajte ho so skokom tlaku axiálnej teórie.

(Výsledok: $\Delta p_r \approx 8,4 \text{ Pa}$; skok tlaku $\approx 54,4 \text{ Pa}$)

Úloha 6.4. Integráciou (6.4) s hodnotami (6.6) overte, že $c_P = 16/27$.

Úloha 6.5. Pre $v_\infty = 8 \text{ m/s}$, $\lambda_r = 4$, $a = 0,3$ a $a' = 0,02$ vypočítajte uhol prúdenia a relatívnu rýchlosť.

(Výsledok: $\phi \approx 9,7^\circ$; $W \approx 33,1 \text{ m/s}$)

Úloha 6.6. Z tab. 6.1 určte, o koľko percent je podľa klasického prístupu najväčší súčiniteľ výkonu pri $\lambda = 1$ menší ako Betzov limit. Prečo majú veterné čerpadlá s malou rýchlobežnosťou veľký počet lopatiek? (Využite aj kap. 9.)

(Výsledok: približne o 30 %)

Úloha 6.7. Overte, že pre $a = 0,3$ dáva vzťah (6.11) $a' = 0,5$ a $\lambda_r \approx 0,53$. Aký je výsledok pre $a = 0,333$?

(Výsledok: pre $a \rightarrow 1/3$: $a' \rightarrow 0$, $\lambda_r \rightarrow \infty$)

Úloha 6.8. Pre prstenec s $\lambda_r = 2$ vypočítajte optimálne indukčné faktory podľa klasického prístupu (6.11).

(Výsledok: $a \approx 0,328$; $a' \approx 0,052$ (podľa (6.6) 0,333 a 0,056))

Úloha 6.9. Podľa vírového modelu (6.13), (6.14) vypočítajte c_P pre $a = 1/3$ a $\lambda = 2$.

(Výsledok: $a'_t = 0,0528$; $c_P \approx 0,563$)

Úloha 6.10. Aká je celková cirkulácia koreňového víru, ak je na konci lopatky rotora s $R = 63$ m a $\Omega = 1,27$ rad/s tangenciálny indukčný faktor $a'_t = 0,0045$?

(Výsledok: $\Gamma = 4\pi R^2 \Omega a'_t \approx 285 \text{ m}^2/\text{s}$)

Úloha 6.11. Ideálny rotor pracuje pri $\lambda = 3$. O koľko percent je jeho najväčší súčiniteľ krútiaceho momentu väčší ako pri $\lambda = 7$ (klasický prístup)?

(Výsledok: 0,182 oproti 0,083, t. j. asi 2,2-krát väčší)

Kapitola 7

Teória prvkov lopatky (BEM)

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- vysvetliť predpoklady teórie prvkov lopatky,
- určiť uhol nábehu prierezu z rýchlostného trojuholníka a uhla nastavenia prierezu,
- vypočítať sily na prvok lopatky a rozložiť ich do smeru osi rotora a do smeru otáčania,
- spojiť teóriu prvkov lopatky s hybnostnou teóriou a odvodiť rovnice metódy BEM,
- vyriešiť rovnice BEM pre jeden prierez iteračne,
- použiť relaxáciu pri problémoch s konvergenciou a riešiť rovnice BEM priamo ako priesečník dvoch kriviek $c_L(\alpha)$,
- vypočítať ťah, krútiaci moment a výkon rotora a zostrojiť krivku $c_P(\lambda)$,
- vypočítať c_P z rozloženia indukčných faktorov a posúdiť vplyv odporu profilu a jednotlivých častí lopatky na výkon,
- posúdiť predpoklady a obmedzenia metódy BEM.

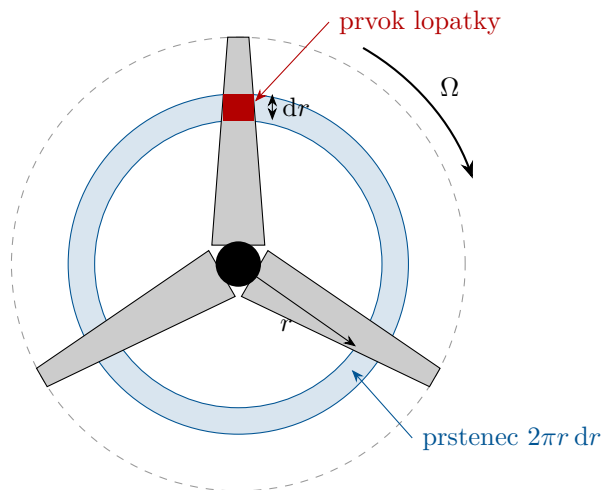
Hybnostná teória (kap. 5 and 6) opisuje, čo sa deje so vzduchom, nič však nehovorí o tvare lopatiek. Teória prvkov lopatky naopak počíta sily na lopatky z charakteristík profilov (kap. 4), potrebuje však poznať rýchlosť, ktorou je prierez obtekaný, a tá závisí od indukčných faktorov. Spojenie oboch teórií – **metóda prvkov lopatky a hybnosti** (angl. *blade element momentum*, *BEM*) – umožňuje pre danú geometriu rotora vypočítať indukčné faktory, sily, ťah, krútiaci moment a výkon. Metóda BEM je dnes základom návrhu lopatiek aj výpočtu zaťaženia veterných turbín [1, 2]. Výklad sleduje [13, čl. 3.5].

7.1 Teória prvkov lopatky

7.1.1 Predpoklady

Lopatku rozdelíme na prvky dĺžky dr . Prvok na polomere r pri otáčaní opisuje prstenec s plochou $2\pi r dr$ (obr. 7.1). Predpokladáme [13, čl. 3.5.2]:

- sily na prvok možno vypočítať z charakteristík *dvojrozmerného* profilu pri uhle nábehu určenom z relatívnej rýchlosti v rovine prierezu,
- rýchlosť v smere pozdĺž lopatky (radiálna zložka) sa zanedbáva,
- trojrozmerné javy (napr. vplyv rotácie na medznú vrstvu) sa zanedbávajú – opravy uvedieme v kap. 8.



Obr. 7.1. Prvok lopatky na polomere r so šírkou dr pri otáčaní opisuje prstenec, cez ktorý preteká vzduch (schematicky, podľa [13, obr. 3.13]).

7.1.2 Uhol nábehu prierezu

Prierez lopatky je vzhľadom na rovinu rotácie natočený o **uhol nastavenia** β (angl. *pitch*), meraný medzi tetivou – alebo čiarou nulového vztľaku – a rovinou rotácie [13, čl. 3.5.2]. Uhol nastavenia je súčtom skrutenia lopatky v danom priereze a uhla, o ktorý je natočená celá lopatka (kap. 9). Relatívna rýchlosť W zvierá s rovinou rotácie uhol prúdenia ϕ (čl. 6.8), takže uhol nábehu je [13, rov. (3.43)]

$$\alpha = \phi - \beta \quad (7.1)$$

Ak je uhol β meraný od tetivy, je α uhol nábehu vzhľadom na tetivu a charakteristiky profilu musia byť zadané v rovnakej sústave. Geometriu prierezu, rýchlosti a sily ukazuje obr. 7.2.

7.1.3 Sily na prvok lopatky

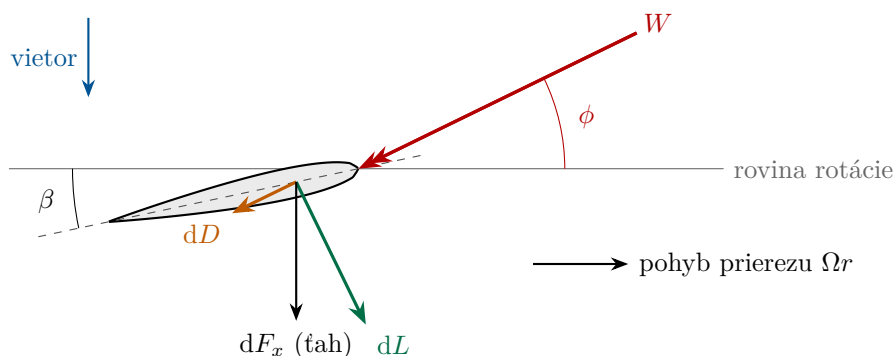
Na prvok dĺžky dr s tetivou c pôsobí vztľak kolmý na W a odpor v smere W [13, rov. (3.44), (3.45)]:

$$dL = \frac{1}{2}\rho W^2 c C_L dr, \quad dD = \frac{1}{2}\rho W^2 c C_D dr. \quad (7.2)$$

Pre výpočet ťahu a krútiaceho momentu ich rozložíme do smeru osi rotora (x) a do smeru otáčania (y) – ide o rovnaký prepočet medzi dvoma súradnicovými sústavami ako v (4.4), len uhlom je teraz ϕ (obr. 7.3):

$$dF_x = dL \cos \phi + dD \sin \phi = \frac{1}{2}\rho W^2 c C_x dr, \quad C_x = C_L \cos \phi + C_D \sin \phi, \quad (7.3)$$

$$dF_y = dL \sin \phi - dD \cos \phi = \frac{1}{2}\rho W^2 c C_y dr, \quad C_y = C_L \sin \phi - C_D \cos \phi. \quad (7.4)$$

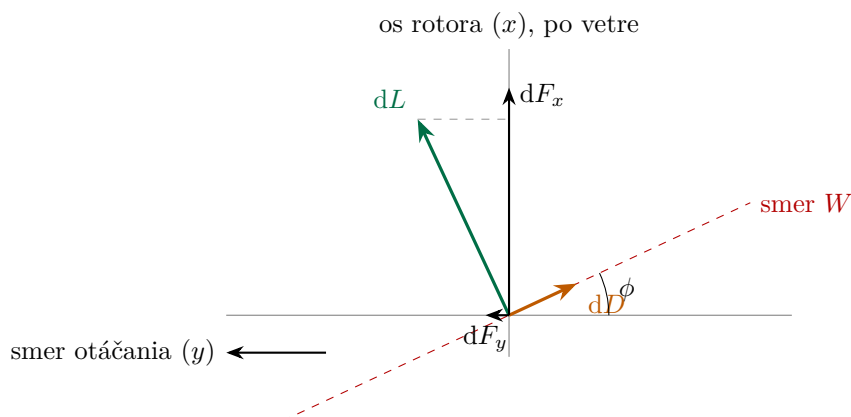


Obr. 7.2. Prierez lopatky: uhol nastavenia β tetivy k rovine rotácie, uhol prúdenia ϕ relatívnej rýchlosti W a uhol nábehu $\alpha = \phi - \beta$; vztlak dL je kolmý na W , odpor dD rovnobežný s W . Sacia strana profilu je obrátená po vetre (schematicky, uhly sú zväčšené; podľa [13, obr. 3.14]).

Pri N lopatkách je ťah a krútiaci moment prstenca [13, rov. (3.46), (3.49)]

$$dT = N \frac{1}{2} \rho W^2 c C_x dr, \quad dQ = N \frac{1}{2} \rho W^2 c C_y r dr. \quad (7.5)$$

Odpor znižuje krútiaci moment (znamienko mínus v C_y), preto veľká jemnosť profilu priamo zlepšuje výkon rotora.



Obr. 7.3. Rozklad vztlaku a odporu prvku lopatky na zložku v smere osi rotora dF_x (príspevok k ťahu) a zložku v rovine rotácie dF_y (príspevok ku krútiacemu momentu). Zložka dF_y smeruje proti relatívnemu obvodovému prúdu, t. j. v smere otáčania rotora (schematicky).

7.1.4 Plnosť rotora

Veľkosť síl vzhľadom na plochu prstenca vyjadruje **miestna plnosť** – pomer súčtu tetív všetkých lopatiek na polomere r k obvodu kružnice [13, rov. (3.53)]:

$$\sigma_r = \frac{N c}{2\pi r}. \quad (7.6)$$

Plnosť rotora σ je pomer celkovej plochy lopatiek k ploche rotora [13, čl. 3.5.3].

7.2 Rovnice metódy BEM

Základný predpoklad metódy BEM znie: sila na prvky lopatiek je jedinou príčinou zmeny hybnosti vzduchu, ktorý preteká prstencom opísaným týmito prvkami; prstence sa navzájom neovplyvňujú [13, čl. 3.5.3]. Porovnáme preto ťah a moment prstencu z teórie prvku lopatky (7.5) s hybnostnými vzťahmi (5.18) a (6.1):

$$N \frac{1}{2} \rho W^2 c C_x dr = 4\pi \rho v_\infty^2 a(1-a) r dr, \quad (7.7)$$

$$N \frac{1}{2} \rho W^2 c C_y r dr = 4\pi \rho v_\infty \Omega a'(1-a) r^3 dr. \quad (7.8)$$

Z rýchlostného trojuholníka (6.16) dosadíme $W = v_\infty(1-a)/\sin \phi$ do (7.7) a $W^2 = v_\infty(1-a)\Omega r(1+a')/(\sin \phi \cos \phi)$ do (7.8). Po úprave s plnosťou (7.6) dostaneme

$$\boxed{\frac{a}{1-a} = \frac{\sigma_r C_x}{4 \sin^2 \phi}, \quad \frac{a'}{1+a'} = \frac{\sigma_r C_y}{4 \sin \phi \cos \phi}} \quad (7.9)$$

Tvar pre a' je zhodný s [13, rov. (3.52)]. Tvar pre a je štandardný tvar bez vplyvu tlaku v rotujúcej úplave, ktorý sa bežne používa [1]; Burton a kol. uvádzajú aj rozšírený tvar, ktorý zahŕňa pokles tlaku v rotujúcej úplave (6.17) [13, rov. (3.51)]. Vo vonkajšej časti lopatky je rozdiel zanedbateľný (čl. 6.9).

Rovnice (7.9) vyjadrujú a a a' , pravé strany však cez ϕ , α , c_L a c_D od a a a' závisia. Charakteristiky profilov sú nelineárne funkcie uhla nábehu, preto sa sústava rieši iteračne [13, čl. 3.5.4].

Poznámka

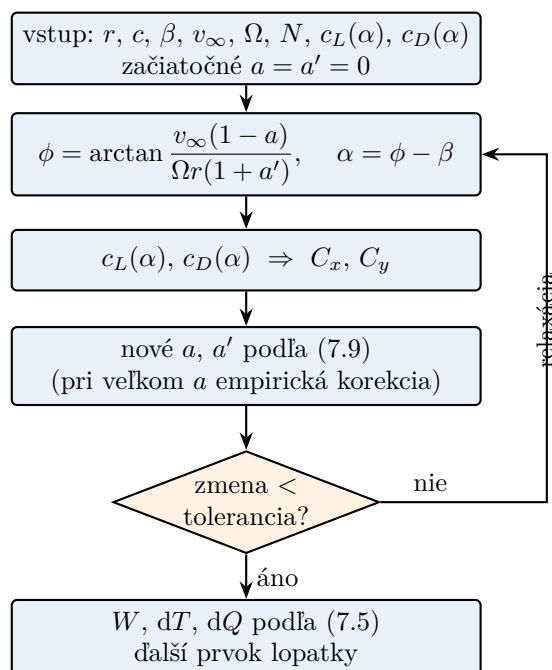
Či sa má odpor profilu zahrnúť do rovníc pre indukčné faktory, nie je jednoznačné. Wilson a Lissaman odporúčali odpor vynechať, pretože spomalenie vzduchu spôsobené trením sa obmedzuje na tenkú úplavu za odtokovou hranou; pri odtrhnutom prúdení však odpor pochádza najmä z tlaku [13, čl. 3.5.3]. Ak sa odpor pri výpočte indukčných faktorov vynechá, musí sa zahrnúť pri výpočte krútiaceho momentu [13, čl. 3.5.4]. V tejto kapitole odpor zahrňame v oboch krokoch.

7.3 Iteračný postup

Pre každý prvok lopatky so známym polomerom r , tetivou c a uhlom nastavenia β pri danej rýchlosti vetra v_∞ a uhlovej rýchlosti Ω postupujeme takto [13, čl. 3.5.4] (obr. 7.4):

1. Zvolíme začiatkové hodnoty, napr. $a = a' = 0$.
2. Z (6.16) vypočítame uhol prúdenia $\phi = \arctan \frac{v_\infty(1-a)}{\Omega r(1+a')}$.
3. Vypočítame uhol nábehu $\alpha = \phi - \beta$.
4. Z charakteristík profilu určíme $c_L(\alpha)$ a $c_D(\alpha)$ a vypočítame C_x a C_y .
5. Z (7.9) vypočítame nové a a a' .
6. Ak sa nové hodnoty líšia od predchádzajúcich viac ako o zvolenú toleranciu, vrátime sa na krok 2; inak výpočet prvku končí a z (7.5) vypočítame dT a dQ .

Ak iterácia nekonverguje (osciluje), pomáha **relaxácia**: novú hodnotu nahradíme váženým priemerom starej a novej, napr. $a_{k+1} = a_k + 0,5(a_{\text{nov}} - a_k)$. Pri veľkom zatažení (a približne nad 0,4) treba axiálnu rovnicu nahradiť empirickým vzťahom (čl. 5.6 and kap. 8).



Obr. 7.4. Iteračný postup výpočtu jedného prvku lopatky metódou BEM.

Príklad 7.1: Iteračný výpočet jedného prvku lopatky

Trojlopatkový rotor s polomerom 63 m pracuje pri rýchlosti vetra 11,4 m/s s rýchlobežnosťou $\lambda = 7$. Prvok lopatky na polomere $r = 47,25$ m ($\mu = 0,75$) má tetivu 3,2 m a uhol nastavenia $\beta = 2,3^\circ$. Charakteristiky profilu sú zadane modelovými vzťahmi (nezodpovedajú konkrétnemu profilu; α v stupňoch):

$$c_L = 0,11(\alpha + 4), \quad c_D = 0,008 + 0,0003\alpha^2.$$

Určte indukčné faktory, uhol nábehu a sily na prvok ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$).

Riešenie. $\Omega = \lambda v_\infty / R = 7 \cdot 11,4 / 63 = 1,267 \text{ rad/s}$, $\Omega r = 59,85 \text{ m/s}$, $\sigma_r = 3 \cdot 3,2 / (2\pi \cdot 47,25) = 0,0323$.

1. *iterácia* ($a = a' = 0$): $\phi = \arctan(11,4/59,85) = 10,78^\circ$, $\alpha = 10,78 - 2,3 = 8,48^\circ$, $c_L = 1,373$, $c_D = 0,0296$, $C_x = 1,373 \cos 10,78^\circ + 0,0296 \sin 10,78^\circ = 1,354$, $C_y = 1,373 \sin 10,78^\circ - 0,0296 \cos 10,78^\circ = 0,228$. Podľa (7.9):

$$\frac{a}{1-a} = \frac{0,0323 \cdot 1,354}{4 \sin^2 10,78^\circ} = 0,313 \Rightarrow a = 0,238,$$

$$\frac{a'}{1+a'} = \frac{0,0323 \cdot 0,228}{4 \sin 10,78^\circ \cos 10,78^\circ} = 0,0100 \Rightarrow a' = 0,0101.$$

Ďalšie iterácie sú v tab. 7.1 a na obr. 7.5. Po siedmich iteráciách sa a mení menej ako o 0,001. Výsledok:

$$a = 0,335, \quad a' = 0,0070, \quad \phi = 7,17^\circ, \quad \alpha = 4,87^\circ, \quad c_L = 0,976, \quad c_D = 0,0151.$$

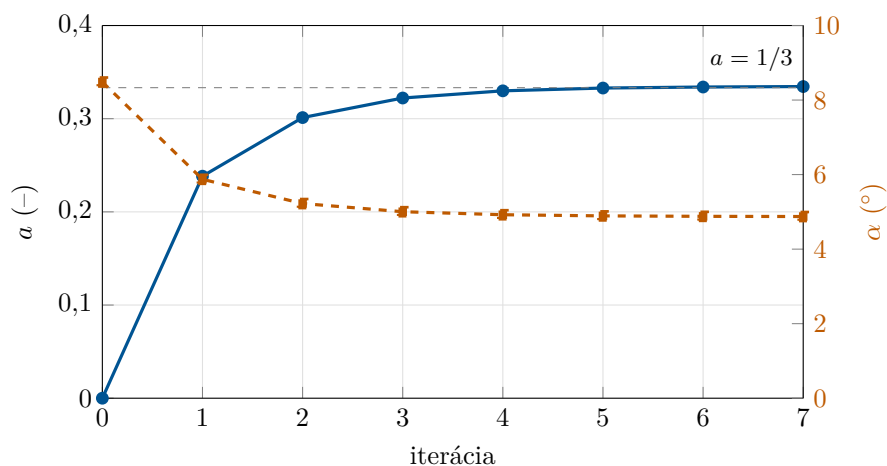
Relatívna rýchlosť $W = v_\infty(1 - a)/\sin \phi = 60,7 \text{ m/s}$. Ťah a krútiaci moment na jednotku dĺžky (všetky tri lopatky) podľa (7.5):

$$\frac{dT}{dr} = 21,1 \text{ kN/m}, \quad \frac{dQ}{dr} = 110 \text{ kN m/m}, \quad \frac{dP}{dr} = \Omega \frac{dQ}{dr} = 139 \text{ kW/m}.$$

Kontrola hybnostnou teóriou: $4\pi\rho v_\infty^2 a(1-a)r = 4\pi \cdot 1,225 \cdot 11,4^2 \cdot 0,335 \cdot 0,665 \cdot 47,25 = 21,1 \text{ kN/m}$, čo súhlasí. Prvok pracuje blízko optimálneho zaťaženia $a = 1/3$ – geometria modelovej lopatky bola zvolená práve tak (čl. 7.7).

Tabuľka 7.1. Priebeh iterácie k čl. 7.3 (bez relaxácie).

iterácia	a	a'	ϕ (°)	α (°)	c_L
0	0	0	10,784	8,484	1,3733
1	0,2383	0,01012	8,174	5,874	1,0862
2	0,3012	0,00789	7,523	5,223	1,0146
3	0,3222	0,00733	7,304	5,004	0,9904
4	0,3299	0,00714	7,223	4,923	0,9815
5	0,3329	0,00707	7,192	4,892	0,9781
6	0,3340	0,00704	7,180	4,880	0,9768
7	0,3345	0,00703	7,175	4,875	0,9762



Obr. 7.5. Konvergencia axiálneho indukčného faktora (plne, ľavá os) a uhla nábehu (čiarkovane, pravá os) v čl. 7.3.

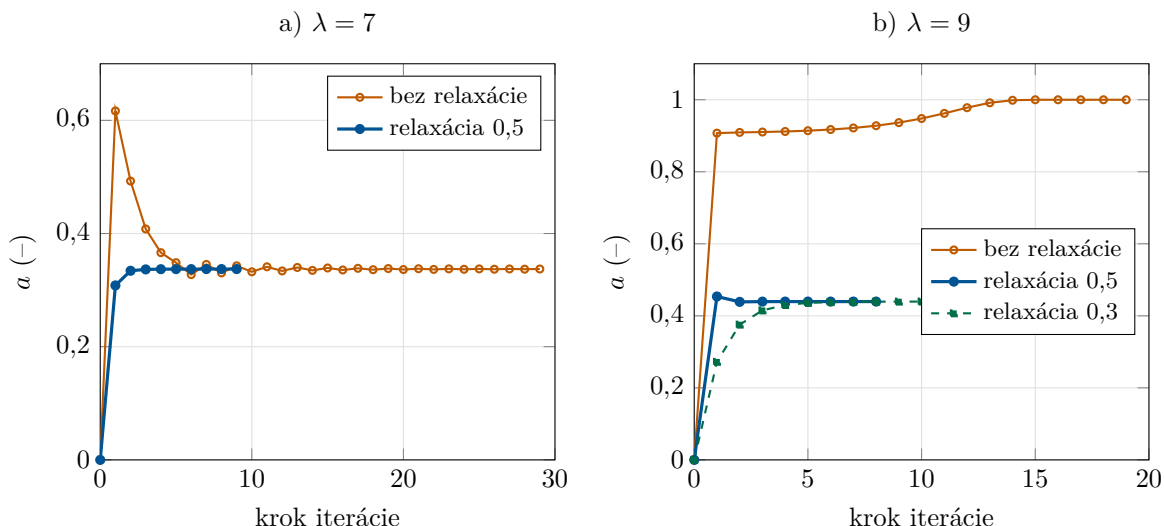
7.4 Konvergencia iterácie a relaxácia

Pri prvku z čl. 7.3 konverguje iterácia bez relaxácie monotónne. Nie vždy je to tak. Na obr. 7.6 je priebeh iterácie pre prvok modelovej lopatky na polomere $\mu = 0,7$ ($c = 3,42 \text{ m}$, $\beta = 2,75^\circ$, $\sigma_r = 0,0371$, tab. 7.3) pri $v_\infty = 10 \text{ m/s}$. Výpočet obsahuje empirickú korekciu ťahu pri veľkom zaťažení (čl. 7.7); iterácia končí, keď sa a aj a' zmenia menej ako o 10^{-5} (vlastný výpočet).

- Pri $\lambda = 7$ (obr. 7.6a) začiatočný odhad $a = a' = 0$ vedie k veľkému uhlu nábehu a veľkej sile, takže prvý krok hodnotu a prestrelí (0,617). Bez relaxácie potom a osciluje okolo výsledku $a = 0,337$ a oscilácie sa tlmia len pomaly – výpočet potrebuje 49 krokov. S relaxačným faktorom 0,5 stačí 10 krokov.

- Pri $\lambda = 9$ (obr. 7.6b) je prvok zafážený viac (výsledok $a = 0,440$ leží v oblasti empirickej korekcie). Bez relaxácie prvý krok vedie k $a = 0,907$ a iterácia sa ďalej vzdaluje k nefyzikálnej hodnote $a = 1$, pri ktorej výpočet zlyhá. S relaxáciou 0,5 konverguje za 9 krokov, s relaxáciou 0,3 za 16 krokov.

Menší relaxačný faktor teda zvyšuje stabilitu, pri dobre podmienených prvkoch však iteráciu spomaľuje. V ďalších výpočtoch tejto kapitoly používame faktor 0,5.



Obr. 7.6. Pribeh iterácie axiálneho indukčného faktora pre prvok modelovej lopatky na $\mu = 0,7$ pri $v_\infty = 10$ m/s bez relaxácie a s relaxáciou (vlastný výpočet). a) Pri $\lambda = 7$ bez relaxácie a pomaly tlmene osciluje. b) Pri $\lambda = 9$ bez relaxácie iterácia smeruje k nefyzikálnemu riešeniu $a = 1$ a zlyhá.

7.5 Priame riešenie pre súčiniteľ vztlaku

Iteračný postup nie je jediný spôsob riešenia rovníc BEM. Ak sa pri výpočte indukčných faktorov zanedbá odpor profilu (postup Wilsona a Lissamana, čl. 7.2), dajú sa rovnice (7.9) spolu s rýchlostným trojuholníkom upraviť tak, že súčiniteľ vztlaku potrebný na splnenie hybnostných rovníc vyjde ako funkcia len uhla prúdenia [3, rov. (3.85)]:

$$c_L = \frac{4 \sin \phi (\cos \phi - \lambda_r \sin \phi)}{\sigma_r (\sin \phi + \lambda_r \cos \phi)}, \quad (7.10)$$

kde $\lambda_r = \Omega r / v_\infty$ je miestna rýchlobežnosť. Keďže $\phi = \alpha + \beta$, je pravá strana pre daný prvok (známe σ_r , λ_r , β) funkciou uhla nábehu. Hľadané riešenie je priesečník tejto krivky s charakteristikou profilu $c_L(\alpha)$ (obr. 7.7); dá sa nájsť numericky aj graficky [3, čl. 3.8.1.4]. Z nájdených ϕ a c_L potom vypočítame indukčné faktory [3, rov. (3.87)–(3.89)]:

$$a = \frac{1}{1 + \frac{4 \sin^2 \phi}{\sigma_r c_L \cos \phi}}, \quad a' = \frac{1}{\frac{4 \cos \phi}{\sigma_r c_L} - 1}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{\lambda_r}{\tan \phi}. \quad (7.11)$$

Treba overiť, že v priesečníku je $a < 0,5$, inak výsledok nie je platný [3, čl. 3.8.1.4]. Krivka (7.10) pri malých uhloch prúdenia klesá k nule, a preto ju charakteristika profilu pretína ešte raz pri záporných uhloch nábehu – tento druhý priesečník dáva a blízko 1 a je fyzikálne neprípustný.

Výhodou priameho riešenia je názornosť: z obrázka je hneď vidno, či prvok pracuje v lineárnej oblasti charakteristiky, alebo v stalle, a či existuje viac riešení (čl. 8.2). Iteračný postup sa zasa ľahšie rozširuje o korekcie pre silne zaťažený rotor [3, čl. 3.8.1.4].

Príklad 7.2: Priame riešenie prvku lopatky

Riešte prvok z čl. 7.3 ($r = 47,25$ m, $c = 3,2$ m, $\beta = 2,3^\circ$, $\lambda = 7$) priamou metódou s odporom zanedbaným pri výpočte indukčných faktorov.

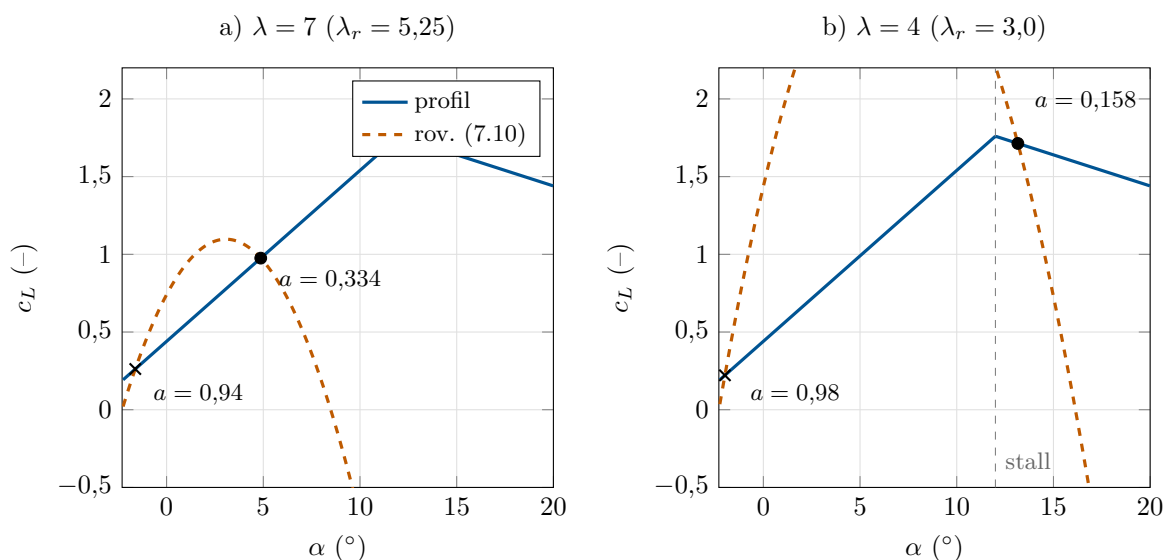
Riešenie. $\lambda_r = 7 \cdot 0,75 = 5,25$, $\sigma_r = 0,0323$. Pravú stranu (7.10) vyčíslime pre niekoľko uhlov nábehu ($\phi = \alpha + 2,3^\circ$) a porovnáme so súčiniteľom vztlaku profilu $c_L = 0,11(\alpha + 4)$:

α ($^\circ$)	0	2	4	5	6	8
c_L podľa (7.10)	0,741	1,054	1,065	0,957	0,775	0,187
c_L profilu	0,440	0,660	0,880	0,990	1,100	1,320

Rozdiel mení znamienko medzi 4° a 5° . Presnejším výpočtom dostaneme priesečník $\alpha = 4,87^\circ$, $c_L = 0,975$, $\phi = 7,17^\circ$. Podľa (7.11):

$$a = \frac{1}{1 + \frac{4 \sin^2 7,17^\circ}{0,0323 \cdot 0,975 \cos 7,17^\circ}} = 0,334, \quad a' = \frac{1}{\frac{4 \cos 7,17^\circ}{0,0323 \cdot 0,975} - 1} = 0,0080.$$

Kontrola: $a/a' = 41,7$ a $\lambda_r / \tan \phi = 5,25 / \tan 7,17^\circ = 41,7$. Iteračný výpočet s odporom (čl. 7.3) dal $a = 0,335$ a $a' = 0,0070$. Axiálny faktor sa takmer nelíši, obvodový je s odporom asi o 12 % menší: odpor znižuje obvodovú silu v pomere $1 - (c_D/c_L) \cot \phi = 1 - (0,0151/0,976) \cot 7,17^\circ = 0,877$. Druhý priesečník $\alpha = -1,62^\circ$ ($a = 0,94$) je neprípustný.



Obr. 7.7. Priame riešenie rovníc BEM pre prvok z čl. 7.3 and 7.5: priesečník charakteristiky profilu s krivkou (7.10) (vlastný výpočet; porovnaj [3, obr. 3.27]). Plný bod je platné riešenie, krížik neprípustné riešenie s $a > 0,5$. Pri $\lambda = 4$ pracuje prvok v stalle.

7.6 Ťah, krútiaci moment a výkon rotora

Po výpočte všetkých prvkov dostaneme ťah, krútiaci moment a výkon rotora súčtom (numerickou integráciou) cez prvky od koreňa lopatky r_0 po koniec R [13, rov. (3.54)]:

$$T = \int_{r_0}^R \frac{dT}{dr} dr, \quad Q = \int_{r_0}^R \frac{dQ}{dr} dr, \quad P = Q \Omega, \quad c_P = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho \pi R^2 v_\infty^3}. \quad (7.12)$$

Opakovaním výpočtu pre rôzne rýchlobežnosti dostaneme **charakteristiku rotora** $c_P(\lambda)$, $c_T(\lambda)$.

Súčiniteľ výkonu možno vyjadriť aj priamo z rozloženia indukčných faktorov. Krútiaci moment prstenca podľa vety o momente hybnosti (7.8) je $dQ = 4\pi\rho v_\infty \Omega a'(1-a)r^3 dr$. Po dosadení do $c_P = \Omega Q / (\frac{1}{2} \rho \pi R^2 v_\infty^3)$ a zavedení miestnej rýchlobežnosti $\lambda_r = \Omega r / v_\infty$ dostaneme

$$c_P = \frac{8}{\lambda^2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda_r^3 a'(1-a) d\lambda_r, \quad (7.13)$$

kde $\lambda_0 = \Omega r_0 / v_\infty$. Vzťah platí, ak sa odpor zahrnie do výpočtu a' ako v tejto kapitole. Ak sa a' počíta bez odporu (čl. 7.5), treba integrand vynásobiť činiteľom $[1 - (c_D/c_L) \cot \phi]$ [3, rov. (3.90)]; verziu so stratami na konci lopatky uvádza čl. 8.1.4.

Príklad 7.3: Súčiniteľ výkonu z troch prvkov

Modelová lopatka (tab. 7.3) pri $\lambda = 7$ je rozdelená na tri rovnako dlhé prvky od $\mu = 0,15$ po $\mu = 1$. Iteračným výpočtom v stredoch prvkov (vlastný výpočet) sme dostali:

μ	λ_r	a	a'	$\lambda_r^3 a'(1-a) \Delta \lambda_r$
0,2917	2,042	0,2178	0,03715	0,490
0,5750	4,025	0,3328	0,01223	1,056
0,8583	6,008	0,3368	0,00528	1,506

Odhadnite súčiniteľ výkonu rotora.

Riešenie. Šírka prvku v miestnej rýchlobežnosti je $\Delta \lambda_r = 7 \cdot 0,85/3 = 1,983$. Napr. pre prvý prvok $2,042^3 \cdot 0,03715 \cdot (1 - 0,2178) \cdot 1,983 = 0,490$. Súčet troch príspevkov je 3,052, a podľa (7.13) obdĺžnikovým pravidlom

$$c_P \approx \frac{8}{7^2} \cdot 3,052 = 0,498.$$

Výpočet s 2000 prvkami dáva $c_P = 0,4973$ (tab. 7.2), chyba odhadu s tromi prvkami je teda len asi 0,2 %. Vonkajší prvok prispieva takmer polovicou výkonu.

Presnosť numerickej integrácie závisí od počtu prvkov. tab. 7.2 ukazuje súčiniteľ výkonu modelového rotora pri $\lambda = 7$ pre rovnomerné delenie lopatky a obdĺžnikové pravidlo (hodnoty v strede prvkov). Bez korekcie na straty na konci lopatky je priebeh dQ/dr hladký a takmer lineárny (obr. 7.9), preto stačí malý počet prvkov. Po zavedení korekcie strát (kap. 8) sa sila pri konci lopatky mení rýchlo a treba tam jemnejšie delenie.

Tabuľka 7.2. Vplyv počtu prvkov na súčiniteľ výkonu modelového rotora pri $\lambda = 7$ (vlastný výpočet, rovnomerné delenie, bez korekcie strát; referenčná hodnota pre 2000 prvkov je $c_P = 0,49734$).

počet prvkov	2	3	5	10	20	50
c_P	0,49984	0,49822	0,49746	0,49738	0,49736	0,49734
odchýlka (%)	+0,503	+0,178	+0,024	+0,008	+0,005	−0,001

7.7 Výsledky pre modelovú lopatku

Postup ilustrujeme na trojlopatkovom rotore s polomerom 63 m s modelovou lopatkou podľa tab. 7.3. Tetiva a uhol nastavenia boli zvolené tak, aby prierezy pri návrhovej rýchlobežnosti $\lambda = 7$ pracovali pri uhle nábehu 5° ($c_L \approx 0,99$) a s $a \approx 1/3$ (postup návrhu je v kap. 9); tetiva je obmedzená na 4,5 m. Charakteristiky profilu sú modelové vzťahy z čl. 7.3, nad $\alpha = 12^\circ$ doplnené poklesom vztlaku (stall). Výpočet (vlastný) je bez korekcie na konečný počet lopatiek (kap. 8), preto výsledky nadhodnocujú výkon skutočného rotora; pri silnom zaťažení bola použitá empirická korekcia ťahu [13, rov. (3.55)] s $c_{T1} = 1,816$.

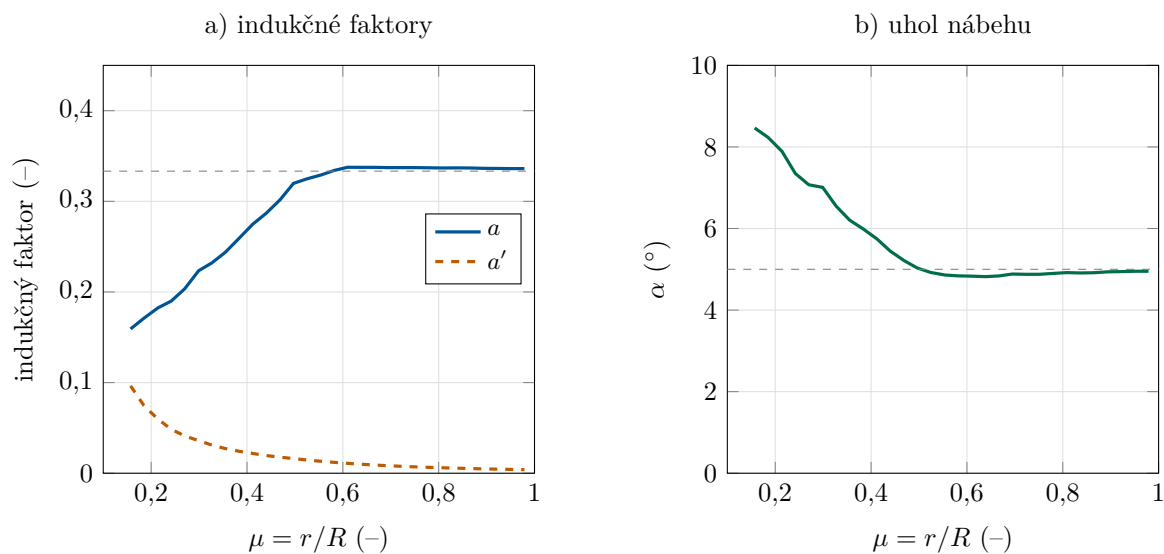
Tabuľka 7.3. Geometria modelovej lopatky ($R = 63$ m, $N = 3$). Medzi uvedenými polomerami sa hodnoty interpolujú lineárne.

$\mu = r/R$	tetiva c (m)	uhol nastavenia β ($^\circ$)
0.15	4.50	27.41
0.20	4.50	20.46
0.30	4.50	12.61
0.40	4.50	8.39
0.50	4.50	5.78
0.60	3.98	4.02
0.70	3.42	2.75
0.80	3.00	1.79
0.90	2.67	1.04
0.95	2.53	0.72
1.00	2.41	0.44

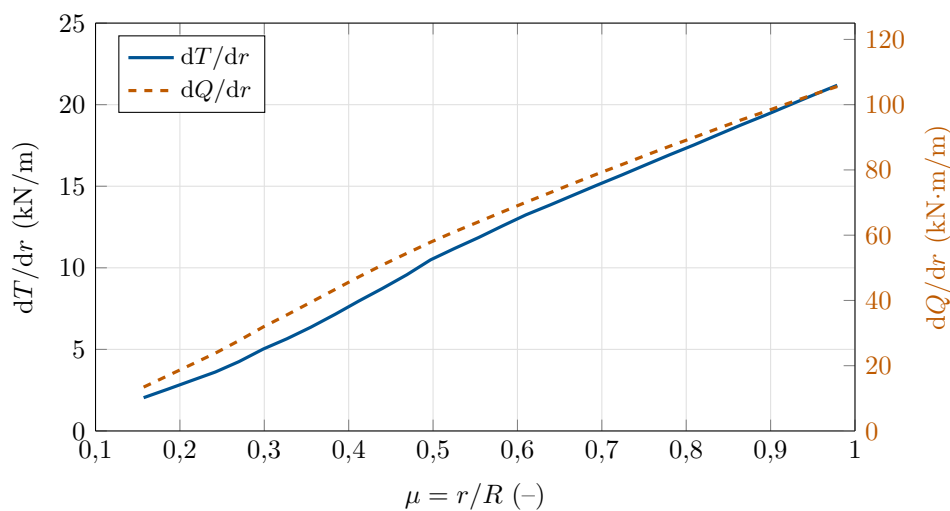
Z obr. 7.9 vidno, že najväčší príspevok ku krútiacemu momentu a výkonu dáva vonkajšia časť lopatky: prstence s väčším polomerom majú väčšiu plochu a väčšie rameno sily. Charakteristika rotora je na obr. 7.10. Najväčší súčiniteľ výkonu $c_P \approx 0,50$ nastáva pri návrhovej rýchlobežnosti $\lambda = 7$. Pri menších rýchlobežnostiach sú uhly nábehu veľké a prierezy prechádzajú do stallu; pri väčších rýchlobežnostiach klesajú uhly nábehu, rastie zaťaženie rotora a podiel odporu. Tento priebeh zodpovedá typickej charakteristike rýchlobežného rotora [13, obr. 3.15].

7.7.1 Rozloženie výkonu po lopatke

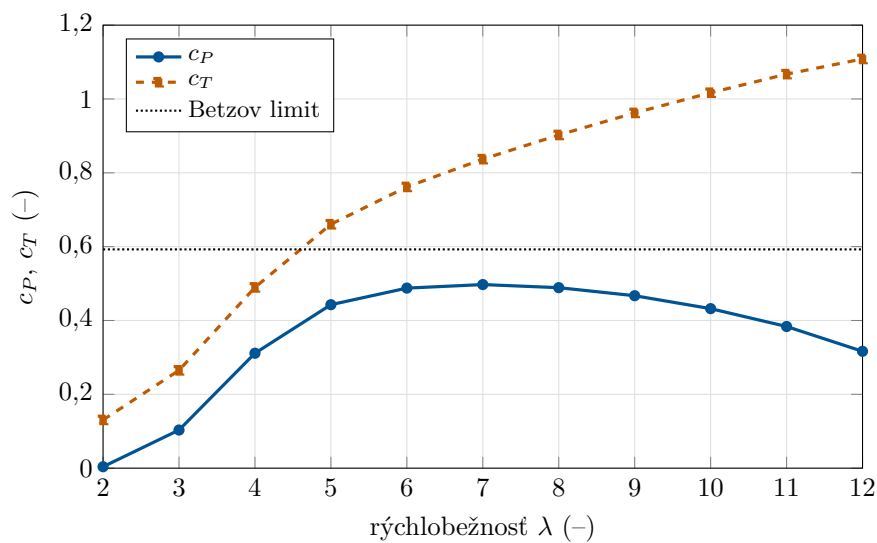
Kumulatívny podiel výkonu a ťahu, ktorý vzniká od koreňa po daný polomer, je na obr. 7.11. Vonkajšia polovica polomeru ($\mu > 0,5$) dáva asi 77 % výkonu a 80 % ťahu, vonkajších 30 % polomeru ($\mu > 0,7$) asi polovicu výkonu (52 %) a posledných 10 % polomeru asi 19 % (vlastný výpočet pri $\lambda = 7$, bez korekcie strát). Presnosť geometrie a charakteristík profilov vo vonkajšej časti lopatky je preto pre výkon rozhodujúca. Naopak, odchýlky od optimálneho tvaru pri koreni lopatky stoja málo výkonu, čo sa využíva pri návrhu praktickej lopatky (čl. 9.4).



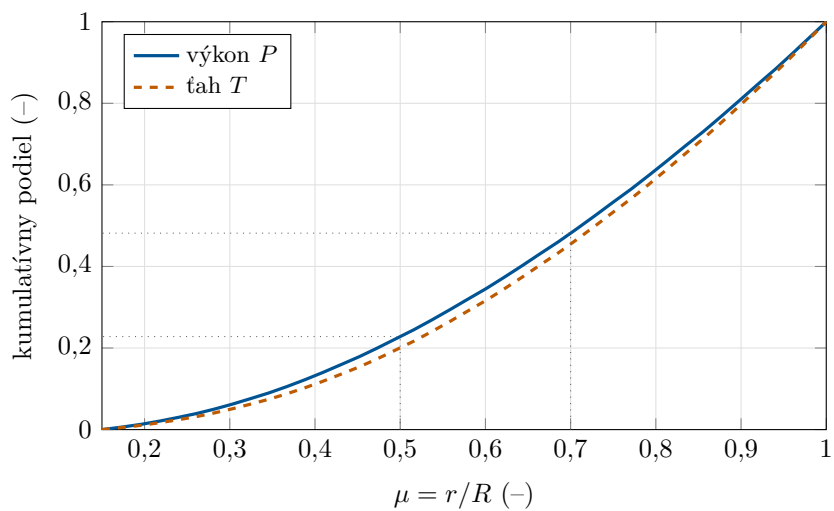
Obr. 7.8. Rozloženie indukčných faktorov a uhla nábehu po polomere modelovej lopatky pri $\lambda = 7$ (vlastný výpočet metódou BEM). Vo vnútornej časti, kde je tetiva obmedzená, je $a < 1/3$ a uhol nábehu väčší ako návrhový.



Obr. 7.9. Rozloženie ťahu a krútiaceho momentu na jednotku dĺžky lopatiek (všetky tri lopatky) modelového rotora pri $\lambda = 7$ a $v_{\infty} = 10 \text{ m/s}$ (vlastný výpočet). Bez korekcie na konečný počet lopatiek sú hodnoty pri konci lopatky nadhodnotené (kap. 8).



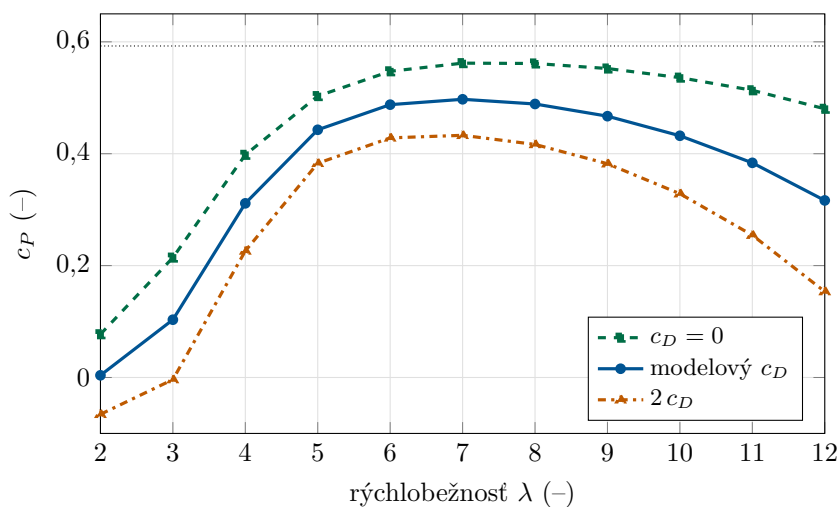
Obr. 7.10. Súčiniteľ výkonu a ťahu modelového rotora v závislosti od rýchlobežnosti (vlastný výpočet metódou BEM bez korekcie na konečný počet lopatiek).



Obr. 7.11. Podiel výkonu a ťahu, ktorý vzniká na časti lopatky od koreňa ($\mu = 0,15$) po polomer μ ; modelový rotor pri $\lambda = 7$ (vlastný výpočet metódou BEM bez korekcie strát).

7.7.2 Vplyv odporu profilu

Odpor profilu znižuje obvodovú silu $C_y = c_L \sin \phi - c_D \cos \phi$. Jeho relatívny vplyv je určený pomerom $(c_D/c_L) \cot \phi$ a rastie so znižovaním uhla prúdenia, teda s rýchlobežnosťou. Na obr. 7.12 je charakteristika modelového rotora pre tri úrovne odporu: bez odporu, s odporom podľa modelovej charakteristiky a s dvojnásobným odporom (napr. drsná nábežná hrana, čl. 4.7). Maximum c_P klesne z 0,562 (bez odporu) na 0,497 a 0,433. Pri $\lambda = 12$ je pokles oveľa výraznejší: z 0,480 na 0,317 a 0,154. Pri malých rýchlobežnostiach, keď prierezy pracujú v stalle a odpor je veľký, môže byť s dvojnásobným odporom c_P dokonca záporné. Zodpovedá to všeobecnému záveru, že čím je pomer vztlaku k odporu menší, tým nižšia je vhodná návrhová rýchlobežnosť (čl. 9.5).



Obr. 7.12. Vplyv odporu profilu na súčiniteľ výkonu modelového rotora (vlastný výpočet metódou BEM bez korekcie strát). Bodkované Betzov limit.

7.8 Predpoklady a obmedzenia metódy BEM

Metóda BEM je rýchla a pri vhodných korekciách dostatočne presná, jej predpoklady si však treba uvedomiť [13, čl. 3.5.3]:

- *Nezávislosť prstencov* je presne splnená len pri rovnomernej cirkulácii po lopatke. Pri nerovnomernej dochádza k výmene hybnosti medzi susednými prstencami; chyba je však pri rýchlobežnostiach nad 3 malá [13, čl. 3.5.3].
- *Nekonečný počet lopatiek*: hybnostná teória predpokladá rovnomerné rozloženie síl po obvodu prstenca. Pri konečnom počte lopatiek treba zaviesť korekciu strát na konci a pri koreni lopatky (kap. 8).
- *Dvojrozmerné charakteristiky profilov*: rotácia ovplyvňuje medznú vrstvu najmä pri koreni lopatky (kap. 8).
- *Ustálené prúdenie*: pri zmenách vetra alebo natáčaní lopatiek sa indukované rýchlosti nemenia okamžite (kap. 8).
- *Veľké zaťaženie*: pri a nad približne 0,4 hybnostná teória neplatí a axiálna rovnica sa nahrádza empirickým vzťahom (čl. 5.6, kap. 8).

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Teória prvku lopatky počíta sily z dvojrozmerných charakteristík profilu pri uhle nábehu $\alpha = \phi - \beta$.
- $dT = N \frac{1}{2} \rho W^2 c C_x dr$, $dQ = N \frac{1}{2} \rho W^2 c C_y r dr$, kde $C_x = c_L \cos \phi + c_D \sin \phi$, $C_y = c_L \sin \phi - c_D \cos \phi$.
- Porovnaním s hybnostnou teóriou dostaneme rovnice BEM $a/(1-a) = \sigma_r C_x / (4 \sin^2 \phi)$ a $a'/(1+a') = \sigma_r C_y / (4 \sin \phi \cos \phi)$.
- Rovnice sa riešia iteratívne pre každý prvok; pri oscilácii pomáha relaxácia, pri veľkom a empirická korekcia.
- Ak sa odpor pri výpočte indukčných faktorov zanedbá, dajú sa rovnice BEM riešiť priamo ako priesečník charakteristiky profilu s krivkou (7.10); platné je riešenie s $a < 0,5$.
- Integráciou po lopatke dostaneme T , Q , P a krivku $c_P(\lambda)$.
- $c_P = (8/\lambda^2) \int \lambda_r^3 a'(1-a) d\lambda_r$; vonkajšia polovica polomeru dáva asi tri štvrtiny výkonu.
- Vplyv odporu profilu na c_P rastie s rýchlobežnosťou.

Kontrolné otázky

1. Aké predpoklady používa teória prvku lopatky?
2. Ako súvisí uhol nábehu s uhlom prúdenia a uhlom nastavenia?
3. Rozložte vztlak a odpor prvku do smeru osi a do smeru otáčania. Prečo odpor znižuje krútiaci moment?
4. Čo je miestna plnosť rotora?
5. Aký je základný predpoklad metódy BEM?
6. Odvodte rovnicu pre a z porovnania ťahu prstenca.
7. Prečo sa rovnice BEM riešia iteratívne? Opíšte postup.
8. Čo je relaxácia a kedy sa používa?
9. Ako sa z výsledkov pre prvky určí výkon rotora?
10. Prečo je c_P malé pri malých aj veľkých rýchlobežnostiach?
11. Prečo môže iterácia bez relaxácie oscilovať alebo smerovať k nefyzikálnemu riešeniu?
12. Opíšte priame (grafické) riešenie rovníc BEM. Ako rozlíšite platný a neprípustný priesečník?
13. Ktorá časť lopatky prispieva k výkonu najviac a prečo?

14. Prečo vplyv odporu profilu na c_P rastie s rýchlosťou?
15. Aké sú hlavné obmedzenia metódy BEM?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ a modelové charakteristiky profilu z čl. 7.3.

Úloha 7.1. Vypočítajte miestnu plnosť trojlopatkového rotora na polomere 30 m, ak je tam tetiva 4 m.

(Výsledok: $\sigma_r \approx 0,0637$)

Úloha 7.2. Prierez má uhol nastavenia 3° . Pri akom uhle prúdenia je uhol nábehu 6° ? Aký je c_L a c_D ?

(Výsledok: $\phi = 9^\circ$; $c_L = 1,10$; $c_D \approx 0,0188$)

Úloha 7.3. Pre $\phi = 8^\circ$, $c_L = 1,0$ a $c_D = 0,015$ vypočítajte C_x a C_y .

(Výsledok: $C_x \approx 0,992$; $C_y \approx 0,124$)

Úloha 7.4. Pre hodnoty z predchádzajúcej úlohy a $\sigma_r = 0,03$ vypočítajte jeden krok iterácie pre a a a' podľa (7.9).

(Výsledok: $a \approx 0,278$; $a' \approx 0,0068$)

Úloha 7.5. Zopakujte prvú iteráciu čl. 7.3 pre prvok na polomere $r = 31,5 \text{ m}$ ($\mu = 0,5$) s tetivou 4,5 m a $\beta = 5,78^\circ$ (tab. 7.3). Porovnajte uhol nábehu s prvkom na $\mu = 0,75$.

(Výsledok: $\phi \approx 15,95^\circ$; $\alpha \approx 10,17^\circ$ – pri $a = a' = 0$ je uhol nábehu blízko hranice stallu modelového profilu)

Úloha 7.6. Prvok lopatky má $dQ/dr = 80 \text{ kN m/m}$ pri $\Omega = 1,2 \text{ rad/s}$. Aký je jeho príspevok k výkonu na jednotku dĺžky?

(Výsledok: 96 kW/m)

Úloha 7.7. Vysvetlite, prečo sa pri vnútorných prierezoch modelovej lopatky (obr. 7.8) dosahuje $a < 1/3$. Čo by bolo potrebné zmeniť, aby aj tam bolo $a \approx 1/3$?

Úloha 7.8. Pre prvok z čl. 7.5 ($\lambda_r = 5,25$, $\sigma_r = 0,0323$, $\beta = 2,3^\circ$) vypočítajte pravú stranu (7.10) pri $\alpha = 5^\circ$ a rozhodnite, či riešenie leží pri menšom, alebo väčšom uhle nábehu.

(Výsledok: $c_L \approx 0,957$; profil má pri 5° $c_L = 0,99$, riešenie leží pri $\alpha < 5^\circ$ (presne $4,87^\circ$))

Úloha 7.9. Prvok s miestnou plnosťou $\sigma_r = 0,04$ pracuje pri uhle prúdenia 8° so súčiniteľom vztlaku $c_L = 1,0$ (odpor zanedbajte). Vypočítajte a , a' a miestnu rýchlosť λ_r .

(Výsledok: $a \approx 0,338$; $a' \approx 0,0102$; $\lambda_r \approx 4,66$)

Úloha 7.10. Iterácia dala v kroku k hodnotu $a_k = 0,30$ a z rovníc BEM vychádza nová hodnota 0,40. Aká bude hodnota v ďalšom kroku pri relaxačnom faktore 0,5 a 0,3?

(Výsledok: 0,35; 0,33)

Úloha 7.11. Prstenec rotora pri $\lambda = 7$ má miestnu rýchlobežnosť $\lambda_r = 5$, šírku $\Delta\lambda_r = 0,5$, $a = 1/3$ a $a' = 0,0086$. Aký je jeho príspevok k súčiniteľu výkonu podľa (7.13)?

(Výsledok: $\Delta c_P \approx 0,0585$)

Úloha 7.12. Podľa obr. 7.11 určte, aký podiel výkonu modelového rotora vzniká medzi $\mu = 0,5$ a $\mu = 0,9$.

(Výsledok: asi 58 % (77 % – 19 %))

Kapitola 8

Korekcie metódy BEM

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- vysvetliť, prečo konečný počet lopatiek spôsobuje straty na konci a pri koreni lopatky,
- vypočítať Prandtlov faktor strát a zahrnúť ho do rovníc BEM,
- posúdiť vplyv strát na konci lopatky na optimálny súčiniteľ výkonu a na výkon konkrétneho rotora,
- použiť empirickú korekciu ťahu pre silne zaťažný rotor a rozpoznať viacnásobné riešenia rovníc BEM,
- opísať oneskorenie stallu na rotujúcej lopatke a použiť Snelovu korekciu súčiniteľa vztlaku,
- odhadnúť vplyv šikmého nabiehania vetra na výkon a na uhol nábehu lopatky,
- vymenovať hlavné nestacionárne javy (dynamický stall, dynamický prítok) a odhadnúť ich časové mierky.

Metóda BEM v tvare z kap. 7 vychádza z viacerých zjednodušení: nekonečný počet lopatiek, dvojrozmerné charakteristiky profilov, ustálené prúdenie v smere osi rotora a platnosť hybnostnej teórie pri každom zaťažení. Na modelovom rotore z kap. 7 sme dostali $c_P \approx 0,50$, čo je pre skutočný trojlopatkový rotor priveľa. V tejto kapitole preberieme korekcie, ktoré tieto zjednodušenia čiastočne odstraňujú. Prehľad je v tab. 8.1. Výklad sleduje [13, čl. 3.6, 3.8, 3.10, 3.12, 3.13] a [3, čl. 3.8 a 3.13].

8.1 Straty na konci lopatky

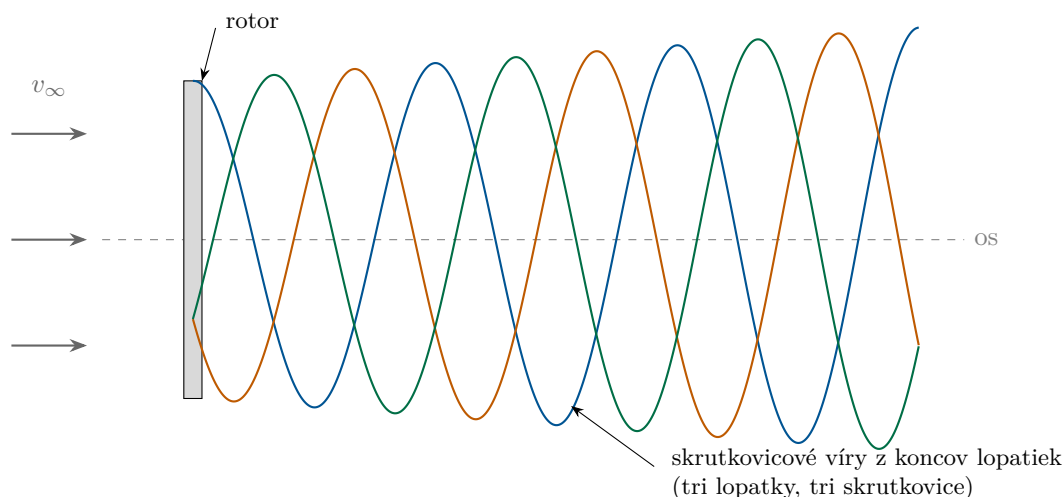
8.1.1 Fyzikálna podstata

Hybnostná teória predpokladá, že každá častica vzduchu, ktorá prejde rovinou rotora, stratí rovnakú hybnosť – ako keby rotor mal nekonečne veľa lopatiek. Pri malom počte lopatiek väčšina častíc prejde medzi lopatkami a stratí menej hybnosti ako častice, ktoré prejdú tesne pri lopatke. Axiálny indukčný faktor sa preto mení po obvode prstenca: priemer určuje zmenu hybnosti prúdu, kým hodnota v mieste lopatky určuje sily na lopatku [13, čl. 3.8.1].

Tabuľka 8.1. Prehľad korekcií metódy BEM preberaných v tejto kapitole.

jav	príčina	korekcia
straty na konci a pri koreni lopatky	konečný počet lopatiek, vírová štruktúra úplavy	Prandtllov faktor F (čl. 8.1)
silne zaťažený rotor	odtrhnutie prúdu na okraji disku, turbulentný stav úplavy	empirický vzťah $c_T(a)$ (čl. 8.2)
oneskorenie stallu	rotácia lopatky, radiálne prúdenie v medznej vrstve	korekcia c_L (čl. 8.3)
šikmé nabíehanie	natočenie osi rotora voči vetru	model šikmej úplavy (čl. 8.4)
nestacionárne javy	turbulencia, natáčanie lopatiek, tieň stožiaru	modely dynamického stallu a prítoku (čl. 8.5)

Na tlakovej strane lopatky je tlak vyšší ako na sacej, preto vzduch na konci lopatky obteká okraj z tlakovej strany na saciu. Tým sa znižuje vztlak a výkon v blízkosti konca lopatky; jav je výraznejší pri menšom počte širších lopatiek [3, čl. 3.8.3]. Tak ako z konca krídla lietadla, aj z konca lopatky sa odtrhá vír. Koniec lopatky sa pohybuje po kružnici, preto má vír tvar *skrutkovice*, ktorá sa unáša dozadu rýchlosťou úplavy (obr. 8.1) [13, čl. 3.8.2]. Ak sa cirkulácia mení pozdĺž lopatky, z odtokovej hrany sa odtrhá spojitá vírová vrstva a každá lopatka zanecháva za sebou skrutkovú plochu [13, čl. 3.8.2].



Obr. 8.1. Víry odtrhávajúce sa z koncov lopatiek vytvárajú v úplave skrutkovice, ktoré sa unášajú rýchlosťou úplavy (schematicky, bokorys; podľa [13, obr. 3.27]). Mierne rozšírenie skrutkovic zodpovedá rozširovaniu úplavy.

Vplyv na prúdenie vysvetľuje [13, čl. 3.8.2] sledovaním dráh častíc. Skrutkové vírové plochy sa unášajú rýchlosťou úplavy a sú pre prúd nepriepustné. Častica, ktorá prejde rovinou rotora medzi lopatkami blízko okraja disku, je rýchlejšia ako vírové plochy, dobieha ich, obteká okolo ich okraja a stratí menej hybnosti ako častica, ktorá prešla tesne pri lopatke. Častica bližšie k osi, ktorej axiálna rýchlosť sa rovná rýchlosti vírových plôch, sa pohybuje medzi dvoma plochami bez radiálneho pohybu – konečný počet lopatiek ju neovplyvní. Axiálny indukčný faktor teda závisí od polomeru aj od azimutu. Ak označíme $a_b(r)$ hodnotu v mieste lopatky, priemer po obvodu je

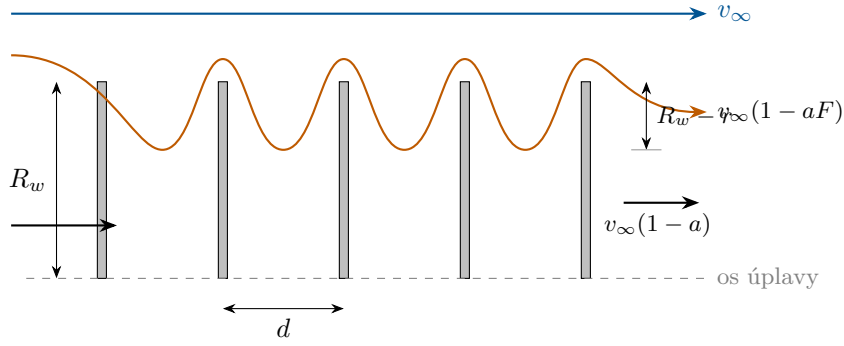
$$\bar{a}(r) = a_b(r) F(r), \quad (8.1)$$

kde $F(r)$ je **faktor strát na konci lopatky** (angl. *tip-loss factor*). Vo vnútornej časti lopatky

je $F = 1$, na okraji disku klesá k nule [13, čl. 3.8.2]. Straty na konci lopatky nie sú spojené s odporom: výkon, o ktorý prúd príde, je presne ten, ktorý odoberú lopatky; lopatky však energiu z prúdu neodoberajú optimálne, lebo a nie je po obvode rovnomerné [13, čl. 3.8.2].

8.1.2 Prandtlov model

Presné riešenie pre skrutkovú úplavu (Goldstein, 1929) je vyjadrené Besselovými funkciami a pre metódu BEM je nevhodné. Prandtl už v roku 1919 navrhol približné riešenie v uzavretom tvare [13, čl. 3.8.3]. Nepriepustné skrutkové vírové plochy nahradil radom rovinných diskov, ktoré sa pohybujú rýchlosťou úplavy $v_\infty(1-a)$ a sú od seba vzdialené o kolmú vzdialenosť d medzi vírovými plochami (obr. 8.2). Na okraji diskov prúdi nerušený prúd rýchlosťou v_∞ a vniká medzi disky tým hlbšie, čím sú disky ďalej od seba. Priemerná axiálna rýchlosť na priamke rovnobežnej s osou vo vzdialenosti $R_w - r$ od okraja úplavy je potom medzi $v_\infty(1-a)$ a v_∞ ; zapíšeme ju ako $v_\infty(1-aF)$ [13, čl. 3.8.3].



Obr. 8.2. Prandtlov model: skrutkové vírové plochy v úplave sú nahradené radom diskov pohybujúcich sa rýchlosťou úplavy; vonkajší prúd vniká medzi disky. Oranžovo dráha častice, ktorá prešla rovinou rotora medzi lopatkami (schematicky, podľa [13, obr. 3.32]).

Výsledok Prandtlovej analýzy (odvodenie uvádza Glauert) je [13, rov. (3.74)]

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos \left[\exp \left(-\pi \frac{R_w - r}{d} \right) \right]. \quad (8.2)$$

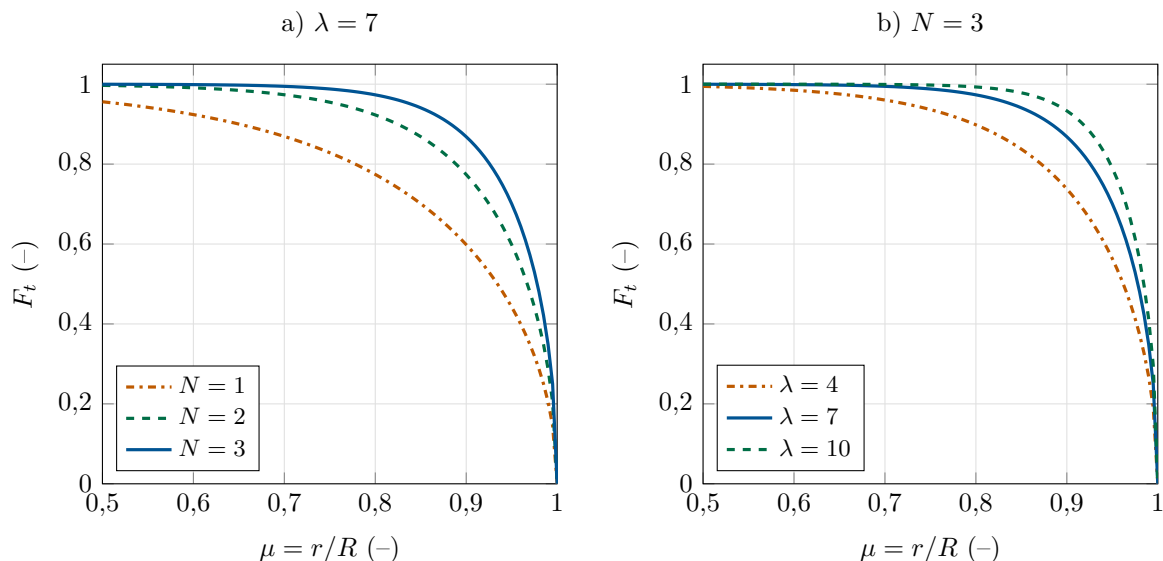
Vzdialenosť vírových plôch určuje uhol prúdenia: pri N lopatkách je $d = (2\pi R_w/N) \sin \phi_s$, kde ϕ_s je uhol prúdenia na okraji [13, rov. (3.75)]. Po Glauertovom zjednodušení ($R_w \approx R$, $\sin \phi_s$ nahradené miestnym $\sin \phi$) dostaneme tvar, ktorý sa používa v metóde BEM [3, rov. (3.98)]:

$$F_t = \frac{2}{\pi} \arccos \left[\exp \left(-\frac{N}{2} \frac{R - r}{r \sin \phi} \right) \right] \quad (8.3)$$

Funkcia $\arccos$ dáva uhol v radiánoch. Faktor je vždy medzi 0 a 1 [3, čl. 3.8.3]. Ak zanedbáme a' , platí $1/\sin \phi = \sqrt{1 + \lambda^2 \mu^2 / (1-a)^2}$ a (8.3) prejde na tvar [13, rov. (3.76)]

$$F_t(\mu) = \frac{2}{\pi} \arccos \left[\exp \left(-\frac{N}{2} \frac{1-\mu}{\mu} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \mu^2}{(1-a)^2}} \right) \right]. \quad (8.4)$$

Z neho je zrejmé, že straty sú menšie (faktor F je bližšie k jednej) pri väčšom počte lopatiek a pri väčšej rýchlobežnosti – vírové plochy sú vtedy bližšie pri sebe a vonkajší prúd medzi ne preniká menej (obr. 8.3).



Obr. 8.3. Prandtlov faktor strát na konci lopatky podľa (8.4) pre $a = 1/3$: a) vplyv počtu lopatiek, b) vplyv rýchlobežnosti (vlastný výpočet).

Príklad 8.1: Prandtlov faktor strát

Trojlopatkový rotor pracuje pri $\lambda = 7$ s $a = 1/3$. Vypočítajte faktor strát na konci lopatky pre $\mu = 0,8; 0,9; 0,95$ a $0,99$ (a' zanedbajte).

Riešenie. Uhol prúdenia $\phi = \arctan[(1 - a)/(\lambda\mu)]$. Pre $\mu = 0,9$: $\phi = \arctan[0,6667/6,3] = 6,041^\circ$, $\sin \phi = 0,1052$. Exponent

$$f = \frac{N}{2} \frac{1 - \mu}{\mu \sin \phi} = 1,5 \cdot \frac{0,1}{0,9 \cdot 0,1052} = 1,584, \quad e^{-f} = 0,2052,$$

$$F_t = \frac{2}{\pi} \arccos 0,2052 = \frac{2}{\pi} \cdot 1,364 = 0,868.$$

Podobne pre ostatné polomery:

μ	0,80	0,90	0,95	0,99
ϕ ($^\circ$)	6,789	6,041	5,725	5,495
f	3,172	1,584	0,791	0,158
F_t	0,973	0,868	0,701	0,349

Straty sa týkajú približne vonkajších 20 % polomeru; pri $\mu = 0,8$ je F_t ešte takmer 1, na samom konci lopatky klesá k nule.

8.1.3 Straty pri koreni lopatky

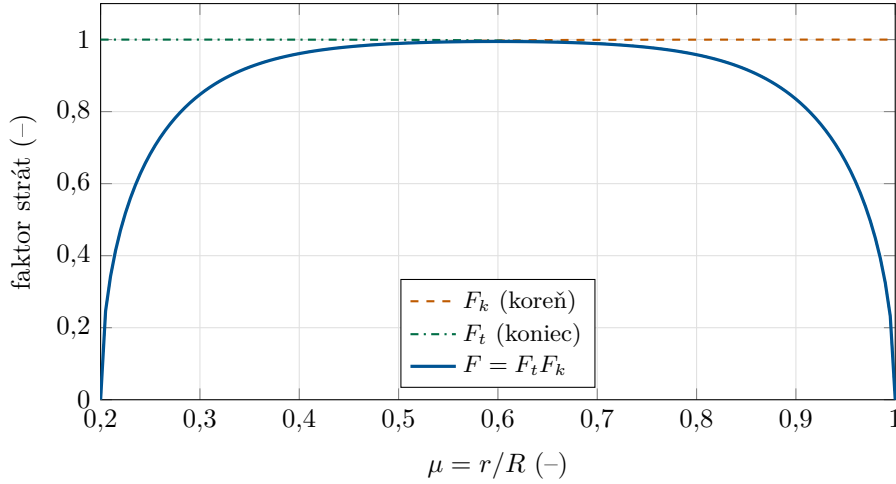
Aj pri koreni lopatky musí cirkulácia klesnúť na nulu. Koreň je v určitej vzdialenosti od osi a vzduch prúdi vnútri tohto polomeru rýchlosťou blízkou v_∞ (podľa vírovej teórie dokonca o niečo väčšou). Preto sa Prandtlov faktor zvyčajne používa aj pri koreni [13, čl. 3.8.4]. Ak je r_k polomer koreňa, faktor strát pri koreni je [13, rov. (3.78)]

$$F_k = \frac{2}{\pi} \arccos \left[\exp \left(-\frac{N}{2} \frac{r - r_k}{r \sin \phi} \right) \right] \quad (8.5)$$

a celkový faktor je súčin [13, rov. (3.79)]

$$F = F_t F_k. \quad (8.6)$$

Pri koreni je uhol prúdenia veľký, $\sin \phi$ je blízko jednej a faktor F_k rastie k jednej rýchlo – straty pri koreni zasahujú len úzku oblasť (obr. 8.4).



Obr. 8.4. Faktory strát pri koreni a na konci lopatky trojlopatkového rotora pri $\lambda = 6$ s koreňom lopatky na $\mu_k = 0,2$ a $a = 1/3$ (vlastný výpočet podľa (8.4) a (8.5); porovnaj [13, obr. 3.35]).

8.1.4 Rovnice BEM so stratami

Faktor strát mení vzťahy odvodené z hybnostnej teórie, kým vzťahy teórie prvku lopatky zostávajú bez zmeny. Ťah a krútiaci moment prstenca podľa hybnostnej teórie sa násobia faktorom F [3, rov. (3.58a), (3.59a)]:

$$dT = 4\pi\rho v_\infty^2 F a(1-a) r dr, \quad (8.7)$$

$$dQ = 4\pi\rho v_\infty \Omega F a'(1-a) r^3 dr. \quad (8.8)$$

Porovnaním s teóriou prvku lopatky rovnako ako v čl. 7.2 dostaneme namiesto (7.9)

$$\boxed{\frac{a}{1-a} = \frac{\sigma_r C_x}{4F \sin^2 \phi}, \quad \frac{a'}{1+a'} = \frac{\sigma_r C_y}{4F \sin \phi \cos \phi}} \quad (8.9)$$

Pre $C_x = c_L \cos \phi$ a $C_y = c_L \sin \phi$ (bez odporu) sú to vzťahy [3, rov. (3.84a), (3.86a)]; my odpor zahrňame rovnako ako v kap. 7. Faktor F závisí cez ϕ od a a a' , preto sa v iteračnom postupe (obr. 7.4) prepočítava v každom kroku spolu s uhlom prúdenia. Faktor strát sa uplatňuje v axiálnej aj tangenciálnej rovnici; aj vírová teória ukazuje, že sa má uplatniť na tangenciálny indukčný faktor [13, čl. 3.8.3].

Indukčné faktory a a a' vypočítané z (8.9) sú hodnoty *v mieste lopatky*; určujú uhol nábehu a sily na lopatku. Priemerné hodnoty v prstenci, ktoré určujú zmenu hybnosti, sú aF a $a'F$. Burton a kol. uvádzajú aj formuláciu s priemernými hodnotami; v nej zostávajú hybnostné členy bez zmeny a v členoch teórie prvku lopatky vystupujú priemerné hodnoty delené F [13, čl. 3.8.6].

Výkon rotora sa vypočíta integráciou krútiaceho momentu z teórie prvku lopatky rovnako ako v čl. 7.6; Manwell a kol. uvádzajú aj ekvivalentný tvar [3, rov. (3.90a)]

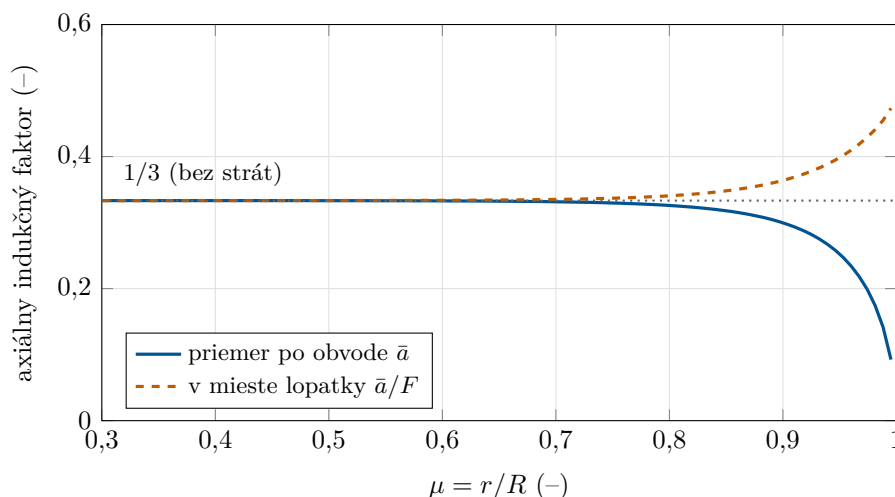
$$c_P = \frac{8}{\lambda^2} \int_{\lambda_k}^{\lambda} F \lambda_r^3 a'(1-a) \left[1 - \frac{c_D}{c_L} \cot \phi \right] d\lambda_r. \quad (8.10)$$

8.1.5 Vplyv strát na optimálny rotor

Bez strát na konci lopatky je optimálny axiálny indukčný faktor rovnomerne $1/3$ po celom disku. So stratami sa optimálna *priemerná* hodnota $\bar{a} = a_b F$ mení s polomerom a na okraji disku klesá k nule. Pri zanedbaní odporu a za predpokladu, ktorý Burton a kol. používajú pre rotáciu úplavy (čl. 6.5), dostaneme pre optimálny rotor [13, rov. (3.83), (3.84)]

$$\lambda^2 \mu^2 a' = \bar{a} \left(1 - \frac{\bar{a}}{F} \right), \quad \bar{a} = \frac{1}{3} + \frac{F}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{1 - F + F^2}. \quad (8.11)$$

Pre $F = 1$ dáva (8.11) $\bar{a} = 1/3$, pre $F \rightarrow 0$ ide $\bar{a} \rightarrow 0$, ale hodnota v mieste lopatky $\bar{a}/F \rightarrow 1/2$ (obr. 8.5). Lopatka navrhnutá so stratami sa od lopatky bez strát líši len pri konci [13, čl. 3.8.5].



Obr. 8.5. Optimálny axiálny indukčný faktor trojlopatkového rotora pri $\lambda = 6$ so stratami na konci lopatky (vlastný výpočet podľa (8.11) a (8.4); porovnaj [13, obr. 3.36]).

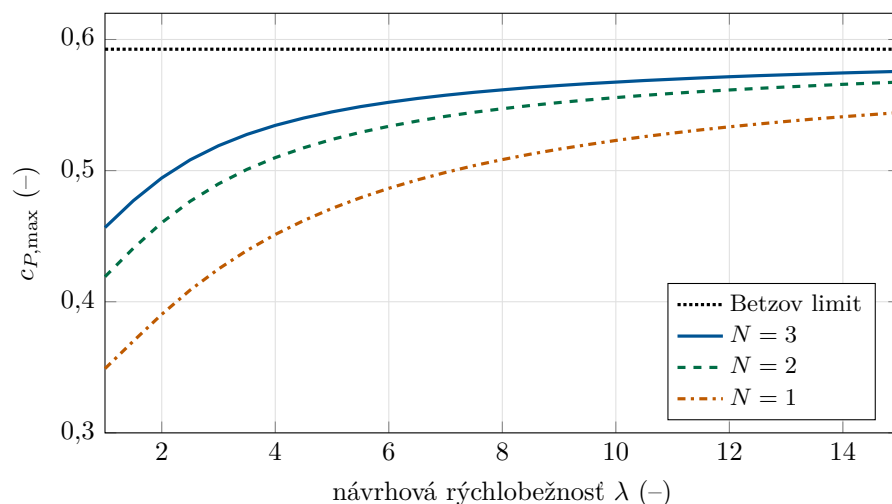
Súčiniteľ výkonu optimálneho rotora vyjadríme z (6.4) dosadením a' z (8.11) [13, rov. (3.87)]:

$$c_P = 8\lambda^2 \int_0^1 a'(1-\bar{a}) \mu^3 d\mu = 8 \int_0^1 \bar{a} \left(1 - \frac{\bar{a}}{F} \right) (1-\bar{a}) \mu d\mu. \quad (8.12)$$

Bez strát ($F = 1$, $\bar{a} = 1/3$) je výsledkom Betzov limit $16/27$ nezávisle od λ . So stratami závisí c_P od rýchlobežnosti a počtu lopatiek (obr. 8.6). Straty na konci lopatky sú najvýraznejšie pri *malých* rýchlobežnostiach, pretože vzdialenosť skrutkových vírových plôch je vtedy veľká; odpor profilov naopak znižuje c_P najmä pri *veľkých* rýchlobežnostiach [13, čl. 3.8.5]. Spolu tak vzniká maximum c_P pri určitej návrhovej rýchlobežnosti [13, obr. 3.40].

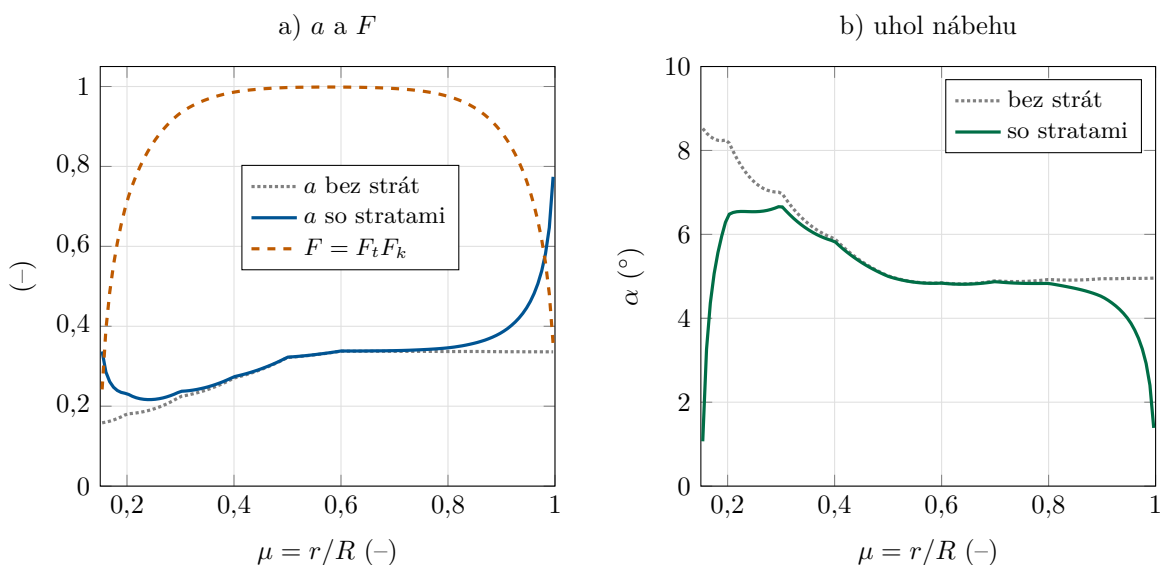
8.1.6 Straty na konci lopatky modelového rotora

Rovnice (8.9) s faktorom $F = F_t F_k$ ($\mu_k = 0,15$) sme použili pre modelovú lopatku z tab. 7.3. Rozloženie indukčného faktora a síl pri $\lambda = 7$ je na obr. 8.7 and 8.8. Vo vonkajšej časti lopatky



Obr. 8.6. Najväčší súčiniteľ výkonu optimálneho rotora so stratami na konci lopatky, bez odporu profilov a bez strát rotáciou úplavy (vlastný výpočet podľa (8.4), (8.11) a (8.12)).

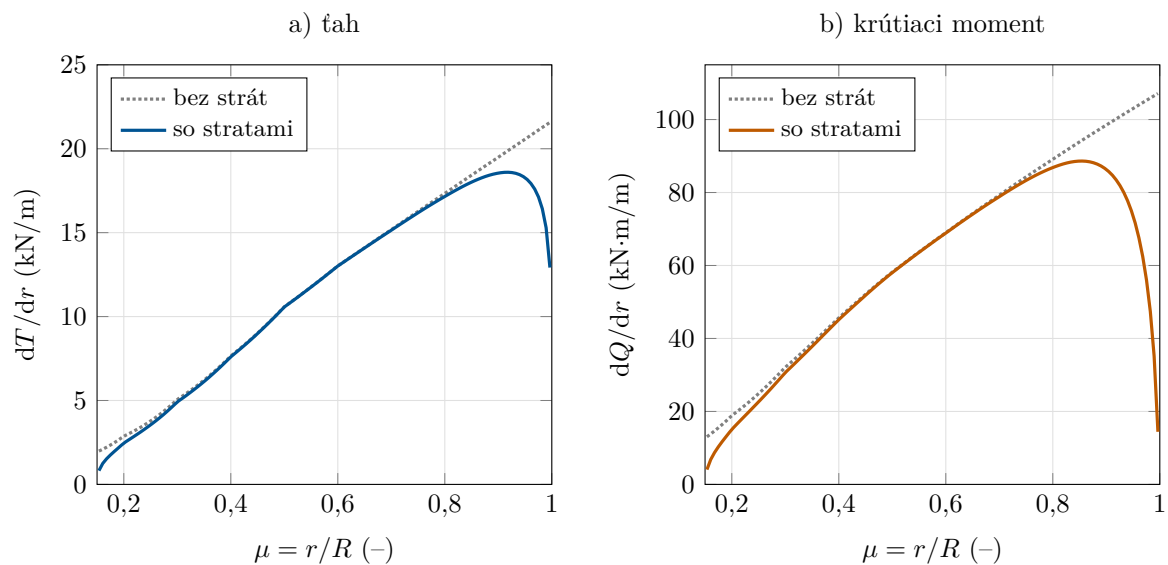
faktor F klesá, lokálny indukčný faktor a rastie nad 0,4 a uhol nábehu klesá. Krútiaci moment na jednotku dĺžky pri konci lopatky klesá k nule – rovnako ako cirkulácia na skutočnej lopatke. Súčiniteľ výkonu pri $\lambda = 7$ klesne z 0,497 na 0,451, t. j. asi o 9 % (obr. 8.9); podstatná časť poklesu pripadá na straty na konci lopatky.



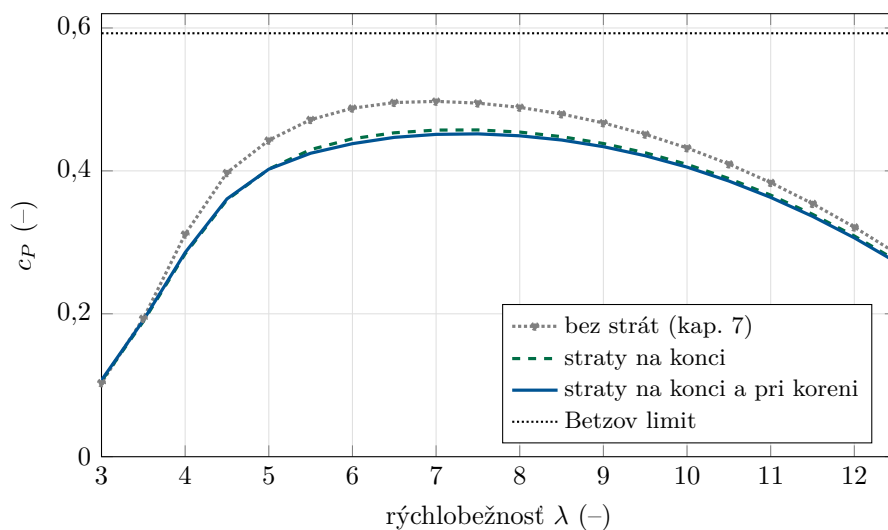
Obr. 8.7. Modelový rotor pri $\lambda = 7$: a) axiálny indukčný faktor v mieste lopatky a faktor strát, b) uhol nábehu (vlastný výpočet metódou BEM).

Príklad 8.2: Prvok lopatky so stratami na konci

Pre modelový rotor z kap. 7 ($R = 63$ m, $N = 3$, $\lambda = 7$, $v_\infty = 11,4$ m/s) je prvok na $\mu = 0,95$ ($r = 59,85$ m) s tetivou 2,532 m a $\beta = 0,725^\circ$. Iteráciou so stratami na konci lopatky sme dostali $a = 0,4527$ a $a' = 0,00488$. Overte, že tieto hodnoty vyhovujú rovniciam BEM so stratami, a porovnajte výsledok s výpočtom bez strát ($a = 0,3361$, $a' = 0,00423$, $dQ/dr = 133,9$ kN m/m).



Obr. 8.8. Rozloženie ťahu a krútiaceho momentu na jednotku dĺžky (všetky tri lopatky) modelového rotora pri $\lambda = 7$ a $v_\infty = 10$ m/s bez strát a so stratami na konci a pri koreni lopatky (vlastný výpočet).



Obr. 8.9. Súčiniteľ výkonu modelového rotora bez korekcie a s korekciou na straty na konci a pri koreni lopatky (vlastný výpočet metódou BEM).

Riešenie. $\Omega = 1,2667 \text{ rad/s}$, $\Omega r = 75,81 \text{ m/s}$, $\sigma_r = 3 \cdot 2,532 / (2\pi \cdot 59,85) = 0,02020$.

$$\phi = \arctan \frac{11,4(1 - 0,4527)}{75,81(1 + 0,00488)} = \arctan 0,08190 = 4,682^\circ, \quad \sin \phi = 0,08163.$$

Faktor strát: $f = 1,5 \cdot 0,05 / (0,95 \cdot 0,08163) = 0,967$, $F = (2/\pi) \arccos(e^{-0,967}) = (2/\pi) \arccos 0,380 = 0,752$.

Uhol nábehu $\alpha = 4,682 - 0,725 = 3,957^\circ$, $c_L = 0,875$, $c_D = 0,0127$, $C_x = 0,873$, $C_y = 0,0588$.

Miestny súčiniteľ ťahu podľa teórie prvku lopatky [3, rov. (3.102)]:

$$c_{T,r} = \frac{\sigma_r(1-a)^2 C_x}{\sin^2 \phi} = \frac{0,0202 \cdot 0,5473^2 \cdot 0,873}{0,08163^2} = 0,793.$$

To je viac ako hranica $F \cdot 4a_T(1-a_T) = 0,661$ (čl. 8.2), prvok je teda silne zatažený a a určíme z empirického vzťahu (8.16):

$$a = 1 - \frac{1,816 - 0,793/0,752}{4(\sqrt{1,816} - 1)} = 1 - \frac{0,761}{1,390} = 0,453. \quad \checkmark$$

Tangenciálna rovnica (8.9): $a'/(1+a') = 0,0202 \cdot 0,0588 / (4 \cdot 0,752 \cdot 0,08163 \cdot 0,9967) = 0,00485$, $a' = 0,00488$. $\checkmark$

Priemerný indukčný faktor v prstenci je $aF = 0,340$ – blízko optimálnej hodnoty $1/3$, kým v mieste lopatky je $a = 0,453$. Krútiaci moment na jednotku dĺžky klesne zo $133,9$ na $95,6 \text{ kN m/m}$, t.j. o 29 %, ťah na jednotku dĺžky z $26,7$ na $23,7 \text{ kN/m}$.

Poznámka

Pri iterácii so stratami môže výpočet pri samom konci lopatky skonvergovať k nefyzikálnemu riešeniu $a \rightarrow 1$, $\phi \rightarrow 0$: pri $\sin \phi \rightarrow 0$ ide exponent v (8.3) do nekonečna, $F \rightarrow 1$ a axiálna rovnica dáva $a \rightarrow 1$. Vo vlastnom výpočte sme preto hodnotu a v iterácii obmedzili na $0,95$; na výsledný c_P modelového rotora to má zanedbateľný vplyv.

8.2 Silne zatažený rotor

8.2.1 Empirický vzťah pre súčiniteľ ťahu

Ako sme ukázali v čl. 5.6, pri a približne nad $0,4$ sa rotor dostáva do **turbulentného stavu úplavy**: namerané súčinitele ťahu sú väčšie, ako predpovedá hybnostná teória, a pri $a = 1$ dosahujú približne 2 [3, čl. 3.8.4.2]. Súčiniteľ odporu kruhovej dosky je podľa Hoernera $1,17$; rotujúci disk má ťah ešte väčší, lebo rotácia hrubšej medznej vrstvy na náveternej strane disku ďalej znižuje tlak za diskom [13, čl. 3.6.2]. V tejto oblasti sa axiálna rovnica hybnostnej teórie nahrádza empirickým vzťahom medzi c_T a a . Predpokladá sa, že vzťah odvodený pre celý rotor platí aj pre jednotlivé prstence [13, čl. 3.6.3], [3, čl. 3.8.4.3]. Používajú sa dva tvary (obr. 8.10).

Priamka dotýkajúca sa paraboly hybnostnej teórie. Ak je c_{T1} súčiniteľ ťahu pri $a = 1$, priamka, ktorá sa v bode a_T dotýka paraboly $4a(1-a)$, má rovnicu [13, rov. (3.55), (3.56)]

$$c_T = c_{T1} - 4(\sqrt{c_{T1}} - 1)(1-a), \quad a_T = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{c_{T1}}. \quad (8.13)$$

Podľa nameraných údajov leží c_{T1} medzi 1,6 a 2; najlepšiu zhodu dáva $c_{T1} = 1,816$ ($a_T = 0,326$), Wilson a Lissaman odporúčajú $c_{T1} = 1,6$ [13, čl. 3.6.3]. Tento vzťah sme použili v kap. 7.

Glauertov empirický vzťah (parabola) so stratami na konci lopatky má tvar [3, rov. (3.100)]

$$a = \frac{1}{F} \left[0,143 + \sqrt{0,0203 - 0,6427 (0,889 - c_{T,r})} \right] \quad (8.14)$$

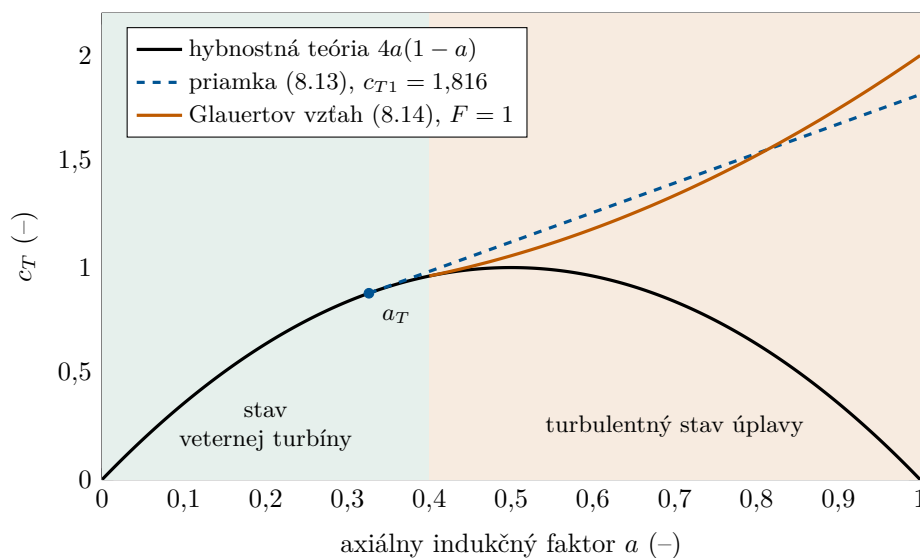
a platí pre $a > 0,4$, t.j. $c_{T,r} > 0,96$ (pri $F = 1$). Miestny súčiniteľ ťahu prstenca sa počíta z teórie prvku lopatky [3, rov. (3.101), (3.102)]:

$$c_{T,r} = \frac{dT}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 2\pi r dr} = \frac{\sigma_r (1-a)^2 C_x}{\sin^2 \phi}. \quad (8.15)$$

Postup v iterácii je jednoduchý: po určení ϕ , α , c_L a c_D vypočítame $c_{T,r}$ z (8.15). Ak je menší ako hranica platnosti hybnostnej teórie, nové a vypočítame z (8.9); inak z empirického vzťahu [3, čl. 3.8.4.3]. Tangenciálny indukčný faktor sa vždy počíta z (8.9). Vo vlastných výpočtoch používame priamku (8.13). Faktorom F v nej násobíme celý empirický ťah rovnako ako hybnostný ťah v (8.7); podmienka a nové a potom sú

$$c_{T,r} > F \cdot 4a_T(1 - a_T) : \quad a = 1 - \frac{c_{T1} - c_{T,r}/F}{4(\sqrt{c_{T1}} - 1)}. \quad (8.16)$$

Pri $F = 1$ je to presne (8.13); v bode a_T nadväzuje spojitou na hybnostnú teóriu, čo zlepšuje konvergenciu iterácie.



Obr. 8.10. Súčiniteľ ťahu podľa hybnostnej teórie a podľa empirických vzťahov (vlastný výpočet podľa [13, rov. (3.55)] a [3, rov. (3.100)]; porovnaj [3, obr. 3.29]).

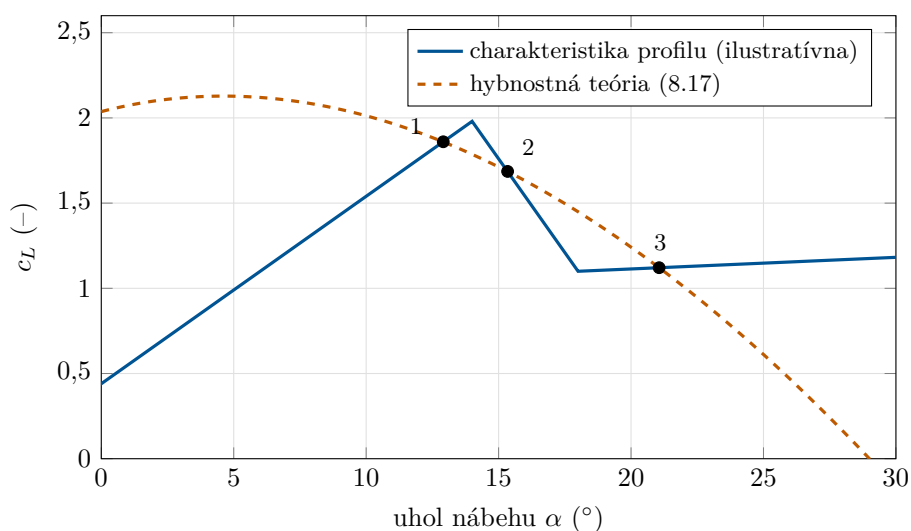
Empirické vzťahy treba považovať len za približné; sú však lepšie ako hybnostná teória. Pri bežných návrhoch axiálny indukčný faktor zriedka prekročí 0,6 a dobre navrhnutá lopatka pracuje vo väčšine prevádzkového rozsahu pri a okolo 1/3 [13, čl. 3.6.3]. Silne zaťažené sú najmä prierezy pri konci lopatky pri veľkej rýchloběžnosti – ako ukázal čl. 8.1.6, straty na konci lopatky zvyšujú lokálne a a prvky pri konci sa do tejto oblasti dostávajú častejšie.

8.2.2 Viacnásobné riešenia

V oblasti prechodu do stallu môžu mať rovnice BEM viac riešení [3, čl. 3.8.4.1]. Graficky: z hybnostnej teórie (pri $F = 1$, bez odporu) vyplýva pre daný prvok vzťah medzi c_L a uhlom prúdenia [3, rov. (3.85)]

$$c_L = \frac{4 \sin \phi (\cos \phi - \lambda_r \sin \phi)}{\sigma_r (\sin \phi + \lambda_r \cos \phi)}, \quad \phi = \alpha + \beta. \quad (8.17)$$

Riešením sú priesečníky tejto krivky s charakteristikou profilu $c_L(\alpha)$. Ak vztlak za maximom klesá strmšie ako krivka (8.17), priesečníky môžu byť tri (obr. 8.11). Každé z riešení je možné; správne je to, ktoré zachováva spojitost uhla nábehu pozdĺž lopatky [3, čl. 3.8.4.1]. Pri iteračnom výpočte závisí nájdené riešenie od začiatočného odhadu – preto je vhodné začínať iteráciu prvku z výsledku susedného prvku.



Obr. 8.11. Viacnásobné riešenia rovníc BEM pre prvok s $\lambda_r = 1$, $\sigma_r = 0,3$ a $\beta = 16^\circ$: tri priesečníky pri $\alpha \approx 12,9^\circ$, $15,3^\circ$ a $21,1^\circ$ (vlastný výpočet s ilustratívnou charakteristikou s prudkým poklesom vztlaku; schéma podľa [3, obr. 3.28]).

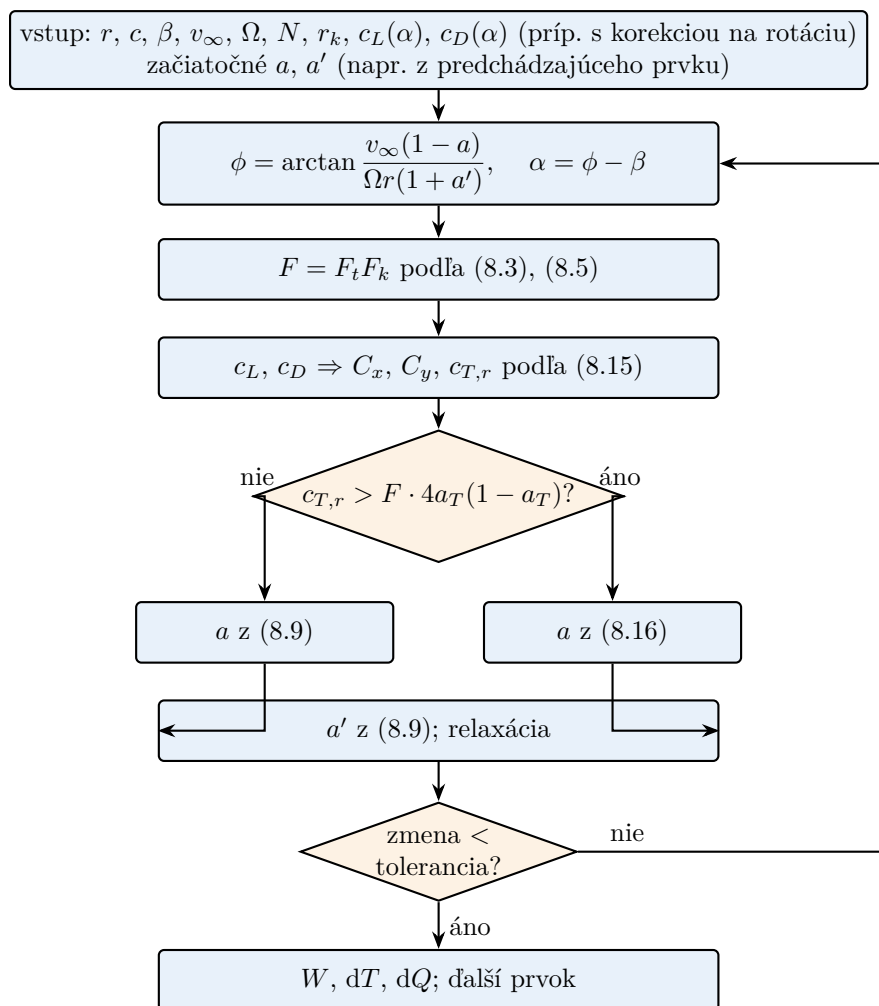
8.2.3 Iteračný postup s korekciami

Iteračný postup z obr. 7.4 doplnený o korekcie z tejto kapitoly je na obr. 8.12. Korekcia na oneskorenie stallu (čl. 8.3) sa zvyčajne zahrnie priamo do charakteristík profilov jednotlivých prierezov ešte pred výpočtom.

8.3 Vplyv rotácie na charakteristiky profilu

8.3.1 Oneskorenie stallu

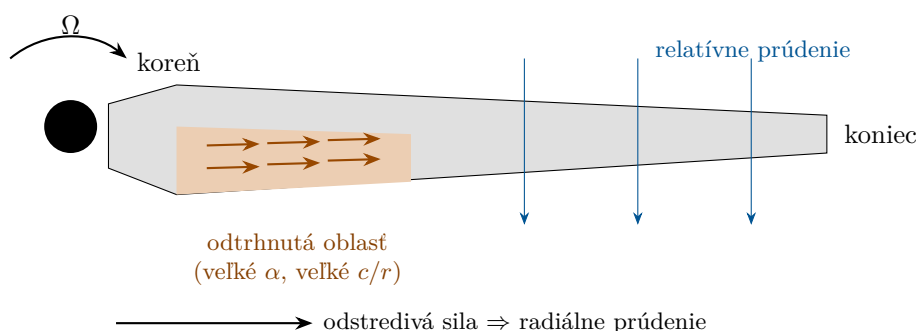
Himmelskamp (1945) si na vrtuliach prvý všimol, že vnútorné prierezy rotujúcej lopatky dosahujú súčinitele vztlaku výrazne väčšie ako maximum zistené pri statických dvojrozmerných skúškach – stall nastáva na rotujúcej lopatke pri väčšom uhle nábehu. Jav sa nazýva **oneskorenie stallu** (angl. *stall delay*). Merateľne zvyšuje výkon rotora a jeho zahrnutie zlepšuje zhodu výpočtu s meraním. Účinok je najväčší pri koreni lopatky a s polomerom klesá [13,



Obr. 8.12. Iteračný postup výpočtu prvku lopatky metódou BEM so stratami na konci a pri koreni lopatky a s empirickou korekciou pre silne zaťažný prvok.

čl. 3.12]. Neočakávane veľké zataženie pri veľkých rýchlostiach vetra, ktoré z toho vyplýva, môže skrátiť životnosť turbíny [3, čl. 3.13.1].

Presný fyzikálny mechanizmus nie je jednoznačne objasnený. Zhoda panuje v tom, že rotácia znižuje nepriaznivý tlakový gradient na sacej strane profilu, a teda aj sklon medznej vrstvy k odtrhnutiu [13, čl. 3.12]. Vzduch v odtrhnutej oblasti sa voči lopatke pohybuje pomaly, rotuje s ňou a odstredivá sila ho unáša radiálne von; aj pred odtrhnutím spôsobuje odstredivá sila radiálne prúdenie v medznej vrstve, ktoré môže zmenšiť jej výtláčnú hrúbku [13, čl. 3.12]. Manwell a kol. spájajú jav s tlakovým gradientom pozdĺž lopatky, ktorý vyvoláva radiálnu zložku rýchlosti pomáhajúcu udržať prúdenie priľnuté [3, čl. 3.13.1] (obr. 8.13). Rozhodujúcim parametrom je pomer tetivy a polomeru c/r [13, čl. 3.12]. Pri priľnutom prúdení, pod statickým kritickým uhlom nábehu, je rozdiel medzi rotujúcou a statickou lopatkou malý.



Obr. 8.13. Radiálne prúdenie v odtrhnutej oblasti a v medznej vrstve na sacej strane rotujúcej lopatky pri koreni (schematicky, kvalitatívne podľa opisu v [13, čl. 3.12]).

8.3.2 Merania a Snelova korekcia

Ronsten (1991) meral rozloženie tlaku na lopatke v pokoji a pri rotácii (rýchlobežnosť 4,32). Pri 30 % polomeru a uhle nábehu $30,41^\circ$ – ďaleko nad statickým stallom – mala rotujúca lopatka výrazný podtlak pri nábežnej hrane a rovnomerný pozvoľný nárast tlaku na zadnej časti sacej strany, t. j. menší nepriaznivý tlakový gradient. Pri 75 % polomeru a $\alpha = 12,94^\circ$ (pod statickým stallom) sa rozloženia tlaku takmer nelíšili [13, čl. 3.12]. Namerané súčinitele vztlaku sú v tab. 8.2.

Snel a kol. (1993) navrhli jednoduchú empirickú korekciu statických dvojrozmerných údajov. Ak predĺžime lineárnu časť závislosti $c_L(\alpha)$ za stall a označíme Δc_L rozdiel medzi touto priamkou a statickou charakteristikou, potom [13, rov. (3.190)]

$$c_{L,3D} = c_{L,2D} + 3 \left(\frac{c}{r} \right)^2 \Delta c_L. \quad (8.18)$$

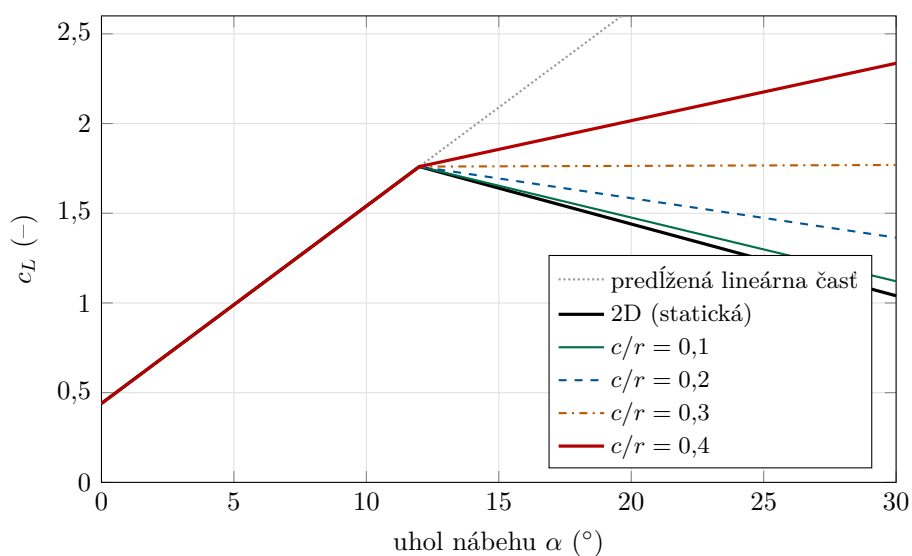
Korekcia je veľmi jednoduchá a s meraniami sa zhoduje dobre (tab. 8.2). Vplyv pomeru c/r na modelovú charakteristiku profilu z kap. 7 ukazuje obr. 8.14: pri $c/r = 0,1$ je korekcia malá, pri $c/r = 0,3$ až $0,4$ – typických pre koreňovú časť lopatky – je zvýšenie vztlaku v oblasti stallu podstatné.

Príklad 8.3: Snelova korekcia

Overte hodnotu $c_L = 1,87$ podľa Snelovej korekcie pre prierez na 30 % polomeru z tab. 8.2. Lineárnu časť charakteristiky nahraďte priamkou so sklonom $2\pi \text{ rad}^{-1}$ podľa teórie tenkého profilu (kap. 4) a predpokladajte uhol nulového vztlaku $\alpha_{L0} \approx 0$ (tento

Tabuľka 8.2. Súčinitele vztlaku namerané Ronstenom na statickej a rotujúcej lopatke a hodnoty podľa Snelovej korekcie [13, tab. 3.2].

r/R	30 %	55 %	75 %
c/r	0,374	0,161	0,093
uhol nábehu α	30,41°	18,12°	12,94°
c_L statický (meraný)	0,8	0,74	1,3
c_L rotujúci (meraný)	1,83	0,93	1,3
c_L rotujúci (Snel, 1995)	1,87	0,84	1,3



Obr. 8.14. Snelova korekcia (8.18) aplikovaná na modelovú charakteristiku profilu z kap. 7 (vlastný výpočet).

predpoklad je náš, údaje o profile nemáme).

Riešenie. Predĺžená priamka pri $\alpha = 30,41^\circ = 0,5308 \text{ rad}$: $c_{L,\text{lin}} = 2\pi \cdot 0,5308 = 3,335$. Rozdiel $\Delta c_L = 3,335 - 0,8 = 2,535$. Podľa (8.18):

$$c_{L,3D} = 0,8 + 3 \cdot 0,374^2 \cdot 2,535 = 0,8 + 1,064 = 1,864.$$

Pre 55 % polomeru rovnako: $c_{L,\text{lin}} = 2\pi \cdot 0,3163 = 1,987$, $c_{L,3D} = 0,74 + 3 \cdot 0,161^2 \cdot 1,247 = 0,837$. Obidve hodnoty sa zhodujú s tab. 8.2 (1,87 a 0,84). Pri 75 % polomeru je korekcia zanedbateľná ($3 \cdot 0,093^2 = 0,026$ a prierez je pod stallom). Zároveň vidno, že v rovnici (8.18) vystupuje miestny pomer c/r .

8.3.3 Vplyv drsnosti povrchu

Znečistenie a poškodenie nábežnej hrany (hmyz, erózia, námraza) zväčšuje odpor a znižuje vztlak profilu. Na niektorých profiloch to znížilo výrobu energie až o 40 %; riešením je čistenie a oprava lopatiek alebo profily málo citlivé na drsnosť [3, čl. 3.13.1]. Metóda BEM tento vplyv zahŕňa len prostredníctvom charakteristík profilov – ak sú k dispozícii údaje pre drsný povrch (kap. 4), výpočet sa zopakuje s nimi.

8.3.4 Charakteristiky pri veľkých uhloch nábehu

Pri stall-regulovaných turbínach, pri rozbehu alebo pri zastavenom rotore pracujú prierezy aj pri uhloch nábehu ďaleko za stallom. Pri veľkých uhloch nábehu sa profil správa čoraz viac ako rovinná doska: pri 45° sú súčinitele vztlaku a odporu približne rovnaké a pri 90° je vztlak nulový [3, čl. 3.4.4.3]. Keďže merané údaje pre veľké uhly nábehu často chýbajú, používajú sa modely, ktoré charakteristiky za stallom odvodzujú z tejto podobnosti; odkazy na ne (napr. Viterna a Corrigan, 1981) uvádza [3, čl. 3.4.4.4].

8.4 Šikmé nabiehanie vetra

8.4.1 Hybnostná teória natočeného rotora

Smer vetra sa neustále mení a rotor ho nemôže okamžite sledovať, preto väčšinu času pracuje s osou natočenou voči vetru o **uhol vybočenia** (angl. *yaw angle*) γ (obr. 8.15). Natočený rotor má menšiu účinnosť a uhol nábehu sa na lopatke počas otáčky mení aj pri ustálenom vetre, čo spôsobuje premenlivé zaťaženie a únavové poškodenie [13, čl. 3.10].

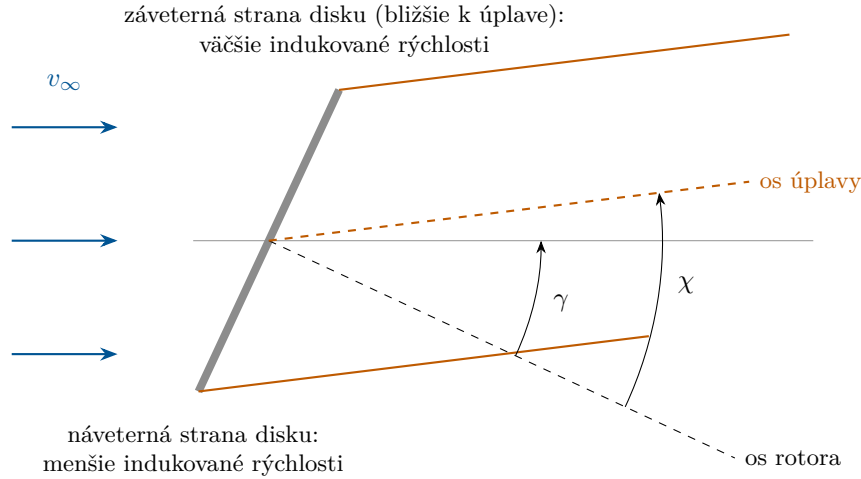
Ak predpokladáme, že sila na disk je kolmá na disk a zmenu hybnosti spôsobuje len zložka rýchlosti kolmá na rovinu rotora, dostaneme [13, rov. (3.89), (3.90)]

$$c_T = 4a(\cos \gamma - a), \quad c_P = 4a(\cos \gamma - a)^2. \quad (8.19)$$

Maximum c_P nastáva pri $a = \frac{1}{3} \cos \gamma$ [13, rov. (3.91)]:

$$c_{P,\text{max}} = \frac{16}{27} \cos^3 \gamma. \quad (8.20)$$

Toto **pravidlo** $\cos^3 \gamma$ sa bežne používa na odhad výkonu pri vybočení [13, čl. 3.10.1].



Obr. 8.15. Rotor natočený o uhol vybočenia γ a šikmá úplava; oba uhly sú merané od osi rotora a $\chi > \gamma$ (schematicky, pôdorys; podľa [13, obr. 3.47, 3.54] a [3, čl. 3.13.2]).

Oprávnenosť takého použitia hybnostnej teórie je sporná: priečne tlakové gradienty, ktoré vychylujú úplavu nabok, môžu prispievať k sile na prúd v smere osi [13, čl. 3.10.1]. Glauert (pôvodne pre autogíru) predpokladal, že hmotnostný prietok sa určuje cez plochu kolmú na výslednú rýchlosť v disku; tento predpoklad dáva [13, rov. (3.105), (3.106)]

$$c_T = 4a\sqrt{1 - a(2\cos\gamma - a)}, \quad c_P = 4a\sqrt{1 - a(2\cos\gamma - a)}(\cos\gamma - a). \quad (8.21)$$

Časť ťahu je však v tomto modeli vztlakom disku ako kruhového krídla, ktorý energiu z prúdu neodoberá. Axiálna hybnostná teória preto pravdepodobne lepšie odhaduje výkon, Glauertova teória lepšie ťah [13, čl. 3.10.2]. Tretí prístup rozširuje model vírového valca (kap. 5) na šikmý disk; úplava sa odkláňa o uhol χ , pre ktorý platí [13, rov. (3.109), (3.110)]

$$\tan\chi = \frac{\sin\gamma - a\tan(\chi/2)}{\cos\gamma - a}, \quad \chi \approx (0,6a + 1)\gamma, \quad (8.22)$$

a súčinitele ťahu a výkonu sú [13, rov. (3.111), (3.112)]

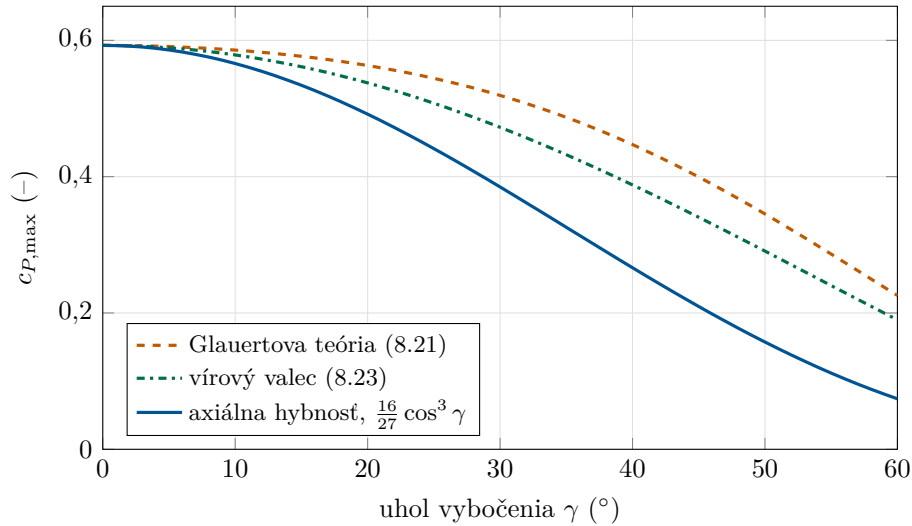
$$c_T = 4a\left(\cos\gamma + \tan\frac{\chi}{2}\sin\gamma - a\sec^2\frac{\chi}{2}\right), \quad c_P = c_T(\cos\gamma - a). \quad (8.23)$$

Porovnanie najväčších súčiniteľov výkonu podľa troch prístupov je na obr. 8.16. Pri malých uhloch vybočenia sa prístupy líšia málo; pri $\gamma = 30^\circ$ dáva pravidlo $\cos^3\gamma$ pokles na 65 % hodnoty bez vybočenia, Glauertova teória len na 88 %.

8.4.2 Šikmá úplava a nerovnomerná indukcia

Pri vybočení je úplava šikmá a záveterná časť disku je bližšie k skrutkovým vírom unášaným dozadu ako náveterná. Indukované rýchlosti sú preto na záveternej strane väčšie ako na náveternej; to vedie k väčším premenlivým silám, ako predpovedá základná metóda BEM [3, čl. 3.13.2]. Glauert navrhol najjednoduchší tvar nerovnomernej indukovanej rýchlosti kolmej na rovinu rotora [13, rov. (3.108)]

$$u = u_0\left(1 + K\frac{r}{R}\sin\psi\right), \quad (8.24)$$



Obr. 8.16. Najväčší súčiniteľ výkonu natočeného akčného disku podľa troch teórií (vlastný výpočet; porovnaj [13, obr. 3.55]).

kde $u_0 = av_\infty$ je stredná indukovaná rýchlosť a ψ je azimut lopatky meraný v smere otáčania od zvislej polohy smerom hore. Z modelu vírového valca vyplýva (Coleman) [13, rov. (3.122)]

$$K = 2 \tan \frac{\chi}{2}. \quad (8.25)$$

V BEM kódach sa používa aj model Pitta a Petersa, ktorý násobí axiálny indukčný faktor korekčnou funkciou uhla vybočenia, polomeru a azimutu [3, čl. 3.13.2], [13, čl. 3.11.5].

K indukovaným rýchlostiam treba pripočítať zložky rýchlosti vetra: kolmú na rovinu rotora $v_\infty \cos \gamma$ a v rovine rotora, kolmú na lopatku, $v_\infty \sin \gamma \cos \psi$ [13, rov. (3.120), (3.121)]. Uhol nábehu prierezu sa tak počas otáčky mení (obr. 8.17). Tangenciálna zložka vetra mení relatívnu rýchlosť s periódou jednej otáčky (1P), šikmá úplava mení axiálnu rýchlosť s fázou posunutou o 90° .

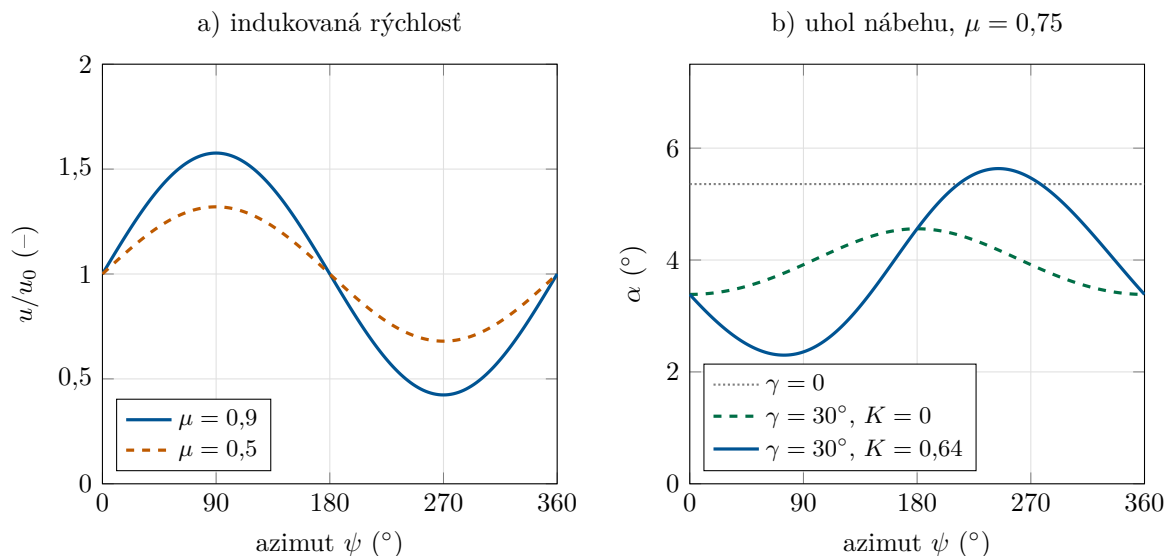
Príklad 8.4: Pokles výkonu pri vybočení

Turbína s menovitým výkonom pracuje pod menovitou rýchlosťou vetra pri výkone 2,0 MW. Odhadnite výkon pri vybočení 10° a 20° podľa pravidla $\cos^3 \gamma$ a uhol šikmej úplavy pri $a = 0,3$.

Riešenie. $\cos^3 10^\circ = 0,955$, $P \approx 1,91$ MW; $\cos^3 20^\circ = 0,830$, $P \approx 1,66$ MW. Uhol úplavy podľa (8.22): $\chi \approx (0,6 \cdot 0,3 + 1) \cdot 20^\circ = 23,6^\circ$ (presné riešenie implicitnej rovnice dáva $23,59^\circ$). Súčiniteľ $K = 2 \tan 11,8^\circ = 0,42$, t. j. na $\mu = 0,9$ sa indukovaná rýchlosť mení po obvodu o ± 38 %. Vybočenie o 10° teda znamená stratu výkonu asi 4,5 %, preto musí systém nатаčania gondoly udržiavať rotor v smere vetra.

8.5 Nestacionárne javy

Prirodzený vietor takmer nikdy nie je ustálený. Turbulentné víry unášané stredným vetrom menia rýchlosť a smer prúdenia v rovine rotora, čo spôsobuje premenlivé aerodynamické sily, väčšie špičkové sily, kmitanie lopatiek a únavu materiálu [3, čl. 3.13.3]. Mnohé javy sa opakujú s frekvenciou otáčania rotora alebo s jej násobkami; jav, ktorý nastáva raz za otáčku,



Obr. 8.17. Vplyv vybočenia $\gamma = 30^\circ$ pri $a = 0,3$ ($\chi = 35,5^\circ$, $K = 0,64$): a) indukovaná rýchlosť podľa (8.24), b) uhol nábehu prierezu modelovej lopatky na $\mu = 0,75$ pri $\lambda = 7$ bez šikmej úplavy a so šikmou úplavou (zjednodušený vlastný výpočet s konštantným a , bez a').

má frekvenciu $1P$, jav s frekvenciou n -krát za otáčku frekvenciu nP [3, čl. 3.13.3]. Metóda BEM v základnom tvare je ustálená; v tejto časti uvedieme hlavné nestacionárne javy a ich časové mierky. Ich modelovanie je súčasťou výpočtu zafarbení (kap. 10).

8.5.1 Tieň stožiara a rotačné vzorkovanie

Tieň stožiara (angl. *tower shadow*) je pokles rýchlosti vetra za stožiarom. Lopatky rotora umiestneného za stožiarom (po vetre) prechádzajú týmto tieňom raz za otáčku, čo spôsobuje krátky pokles výkonu a kmitanie konštrukcie s frekvenciou NP [3, čl. 3.13.3].

Rotačné vzorkovanie (angl. *rotational sampling*): turbulentné víry môžu byť menšie ako rotor, takže v rôznych častiach disku je rôzna rýchlosť. Všeobecné zmeny vetra majú časovú mierku rádovo 5s; lopatka, ktorá sa otočí raz za sekundu, však „vzorkuje“ rôzne časti poľa oveľa rýchlejšie a vidí rýchlo sa meniace prúdenie [3, čl. 3.13.3]. Podobne pôsobí aj vertikálny profil rýchlosti vetra (kap. 2): lopatka hore je v silnejšom vetre ako dole, čo vyvoláva zmeny zafarbenia s frekvenciou $1P$.

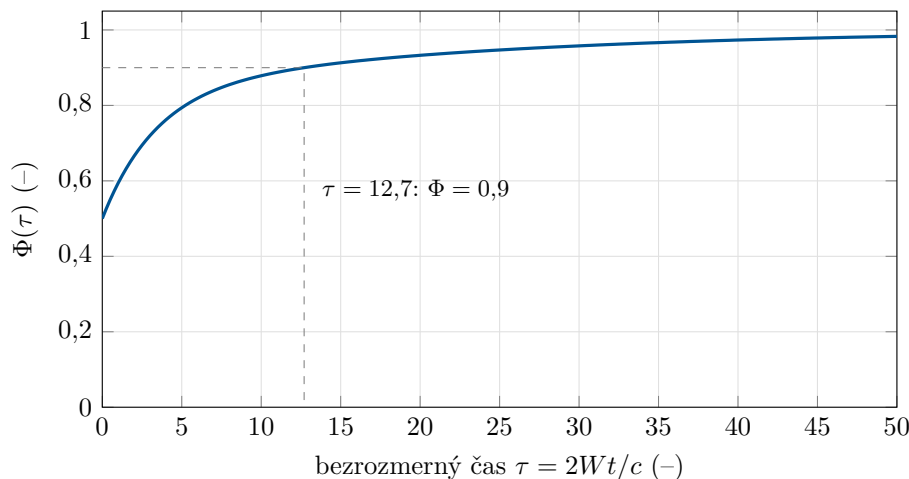
8.5.2 Nestacionárne obtekanie profilu

Ak sa uhol nábehu profilu náhle zmení, cirkulácia okolo profilu sa nezmení okamžite. Zmena cirkulácie musí byť vyrovnaná rovnako veľkým opačným vírom, ktorý sa odtrhne z odtokovej hrany (rozbehový vír) a odplaví sa po prúde; kým je blízko profilu, znižuje jeho účinok. Cirkulácia a vztlak preto rastú postupne [13, čl. 3.13.7]. Analytické riešenie odvodil Wagner (1925); Jonesova aproximácia Wagnerovej funkcie je [13, rov. (3.214)]

$$\Phi(\tau) = \frac{L_c(\tau)}{\frac{1}{2}\rho W^2 c \frac{dc_L}{d\alpha} \sin \alpha} = 1 - 0,165 e^{-0,0455\tau} - 0,335 e^{-0,30\tau}, \quad \tau = \frac{2Wt}{c}, \quad (8.26)$$

kde L_c je cirkulačný vztlak na jednotku dĺžky a bezrozmerný čas τ je počet polovic tetivy, o ktoré sa rozbehový vír od zmeny posunul [13, čl. 3.13.7]. Ihneď po skokovej zmene je $\Phi = 0,5$,

hodnota 0,9 sa dosiahne pri $\tau \approx 12,7$ (obr. 8.18). Ak sa uhol nábehu mení neustále, ako na lopatke turbíny, cirkulácia nikdy nedosiahne rovnovážny stav [13, čl. 3.13.7]. Pre harmonické kmitanie profilu odvodil riešenie Theodorsen (1935); vztlak potom nie je vo fáze s uhlom nábehu a jeho amplitúda nezodpovedá statickej charakteristike [13, čl. 3.13.7].



Obr. 8.18. Nárast cirkulačného vztlaku po skokovej zmene uhla nábehu podľa Jonesovej aproximácie Wagnerovej funkcie (8.26) (vlastný výpočet; porovnaj [13, obr. 3.79]).

8.5.3 Dynamický stall

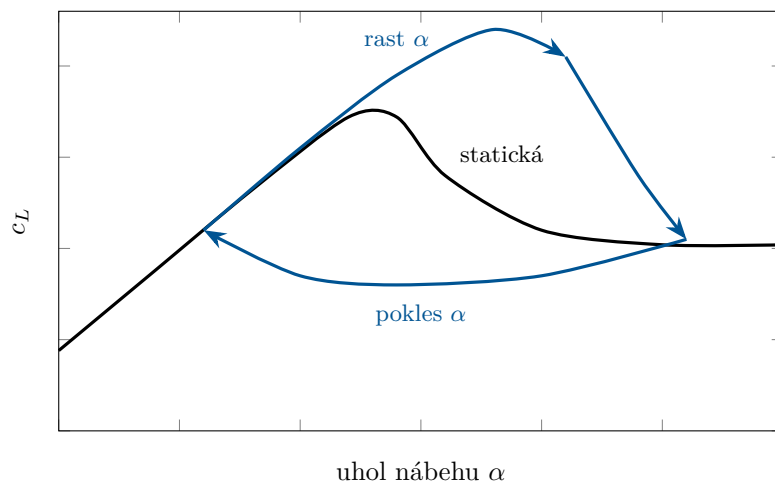
Dynamický stall označuje rýchle aerodynamické zmeny, ktoré môžu vyvolať alebo oddialiť stall. Rýchle zmeny rýchlosti vetra (napr. pri prechode lopatky tieňom stožiara alebo v turbulentnom vetre) spôsobujú náhle odtrhnutie a opätovné prilnutie prúdenia na profile, ktoré ustálená aerodynamika nepredpovedá [3, čl. 3.13.3]. Pri rýchlom raste uhla nábehu sa stall oneskorí a profil krátkodobo dosiahne vztlak väčší ako statické maximum – to môže viesť k veľkým prechodným silám [3, čl. 3.13.3]. Závislosť c_L od α potom vytvára hysteréznu slučku (obr. 8.19).

Časová miera dynamického stallu zodpovedá času, za ktorý relatívny vietor prejde tetivu, t.j. približne $c/(\Omega r)$. Pri veľkých turbínach je to rádovo 0,2 s pri koreni a 0,01 s pri konci lopatky (Snel a Schepers, 1991) [3, čl. 3.13.3]. V BEM kódach sa používajú modely dynamického stallu, napr. Gormontov alebo Beddoesov; Gormontov model upravuje uhol nábehu vypočítaný metódou BEM o člen závislý od rýchlosti zmeny uhla nábehu [3, čl. 3.13.3].

8.5.4 Dynamický prítok

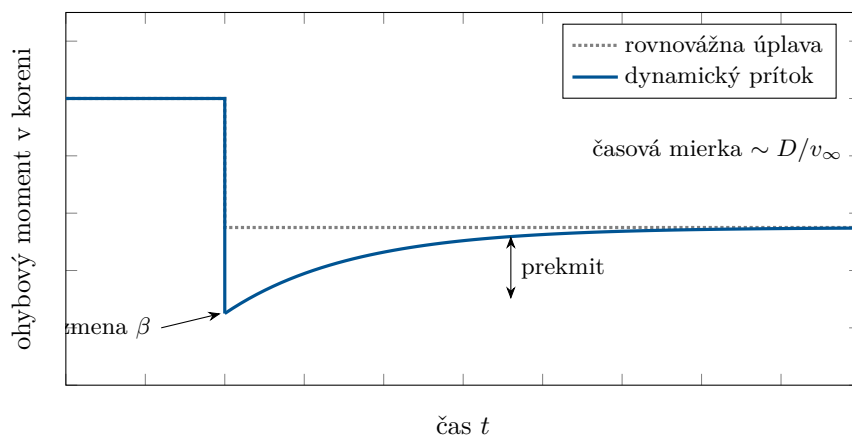
Dynamický prítok (angl. *dynamic inflow*) je odozva celého poľa prúdenia okolo rotora na turbulenciu a na zmeny prevádzky rotora (zmena uhla nastavenia lopatiek, otáčok). Podľa ustálenej teórie by sa pri zmene zaťaženia mal okamžite zmeniť axiálny indukčný faktor a prúdenie pred rotorom aj za ním. Pri rýchlych zmenách však pole prúdenia nestihne dosiahnuť ustálený stav a podmienky na rotore sú len meniacou sa aproximáciou ustálených podmienok [3, čl. 3.13.3]. Časová miera je rádovo D/v_∞ , čo môže byť až okolo 10 s; pomalšie deje možno počítať ako ustálené [3, čl. 3.13.3].

Vzduchu trvá istý čas, kým prejde z oblasti ďaleko pred rotorom do oblasti ďaleko za ním, a za ten čas sa vietor zmení. Dva krajné predpoklady sú: (1) indukovaná rýchlosť sa nemení



Obr. 8.19. Hysterézná slučka súčiniteľa vztľaku pri dynamickom stalle: pri rýchlom raste uhla nábehu sa stall oneskorí a vztlak prekročí statické maximum, pri poklese sa prúdenie opäť prilne až pri menšom uhle nábehu (schematicky, kvalitatívne; nejde o namerané údaje).

a zmena vetra prejde rotorom bez útlmu („zamrznutá“ úplava), (2) indukovaná rýchlosť sa v každom okamihu rovná ustálenej hodnote pre okamžitý vietor (**rovnovážna úplava** (angl. *equilibrium wake*)). Skutočnosť je medzi nimi [13, čl. 3.13.1]. Merania na turbíne Tjæreborg pri skokovej zmene uhla nastavenia lopatiek z $0,070^\circ$ na $3,716^\circ$ pri vetre $8,7 \text{ m/s}$ ukázali prekmit ohybového momentu v koreni lopatky, ktorý dynamický model prítoku predpovedá, model rovnovážnej úplavy nie [13, čl. 3.13.4] (obr. 8.20).

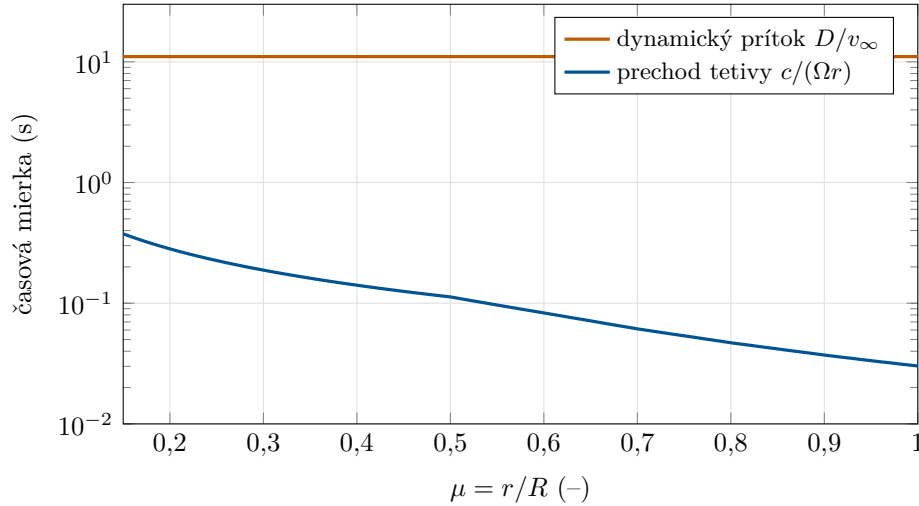


Obr. 8.20. Odozva ohybového momentu v koreni lopatky na skokové zváženie uhla nastavenia lopatiek: model rovnovážnej úplavy a dynamický model prítoku (schematicky, kvalitatívne podľa meraní na turbíne Tjæreborg v [13, obr. 3.76]).

Časové mierky nestacionárnych javov na modelovom rotore porovnáva obr. 8.21: dynamický stall a nábeh cirkulácie prebiehajú rádozo za desatiny sekundy, dynamický prítok za sekundy.

Príklad 8.5: Časové mierky nestacionárnych javov

Pre modelový rotor ($R = 63 \text{ m}$, $\lambda = 7$, $v_\infty = 11,4 \text{ m/s}$) odhadnite časovú mierku dynamického stallu pri koreni ($r = 9,45 \text{ m}$, $c = 4,5 \text{ m}$) a pri konci lopatky ($c = 2,41 \text{ m}$), časovú mierku dynamického prítoku a čas, za ktorý cirkulačný vztlak prvku z čl. 7.3 ($c = 3,2 \text{ m}$, $W = 60,7 \text{ m/s}$) dosiahne 90 % ustálenej hodnoty po skokovej zmene uhla



Obr. 8.21. Časové mierky nestacionárnych javov modelového rotora ($R = 63$ m, $\lambda = 7$, $v_\infty = 11,4$ m/s; vlastný výpočet).

nábehu.

Riešenie. $\Omega = 7 \cdot 11,4/63 = 1,267$ rad/s ($12,1$ min $^{-1}$). Koreň: $c/(\Omega r) = 4,5/(1,267 \cdot 9,45) = 0,38$ s; koniec: $2,41/(1,267 \cdot 63) = 0,030$ s. Dynamický prítok: $D/v_\infty = 126/11,4 = 11$ s. Tieto hodnoty zodpovedajú rádom, ktoré uvádza [3, čl. 3.13.3]. Podľa (8.26) je $\Phi = 0,9$ pri $\tau = 12,7$, teda

$$t_{90} = \frac{\tau c}{2W} = \frac{12,7 \cdot 3,2}{2 \cdot 60,7} = 0,33 \text{ s.}$$

Lopatka sa za ten čas otočí o $\Omega t_{90} = 0,42$ rad $\approx 24^\circ$. Zmeny uhla nábehu s frekvenciou 1P (vybočenie, profil vetra) sú teda na hranici, pri ktorej ešte možno použiť statické charakteristiky profilu.

8.6 Obmedzenia metódy BEM a iné prístupy

Aj s korekciami zostáva metóda BEM inžinierskym modelom. K jej nevýhodám patria chyby pri veľkých indukovaných rýchlostiach a pri šikmom nabíehaní vetra [3, čl. 3.13.4]; korekcie opísané v tejto kapitole sú empirické alebo vychádzajú zo zjednodušených modelov. Pre podrobnejšie výpočty sa používajú vírové metódy, ktoré priamo modelujú vírovú štruktúru úplavy, a výpočtová dynamika tekutín (CFD); sú však výpočtovo oveľa náročnejšie. Metóda BEM preto zostáva základom návrhu lopatiek (kap. 9) aj výpočtu zaťaženia v aeroelastických programoch (kap. 10) [1, 2].

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Konečný počet lopatiek spôsobuje, že indukčný faktor sa mení po obvodě prstenca. Prandtlov faktor $F = (2/\pi) \arccos[\exp(-\frac{N}{2} \frac{R-r}{r \sin \phi})]$ opisuje straty na konci lopatky; podobný faktor sa používa pri koreni, $F = F_t F_k$.
- V rovniciach BEM sa hybnostné vzťahy násobia faktorom F : $a/(1-a) = \sigma_r C_x / (4F \sin^2 \phi)$, $a'/(1+a') = \sigma_r C_y / (4F \sin \phi \cos \phi)$.
- Straty na konci lopatky znižujú c_P najmä pri malej rýchlobežnosti a malom počte lopatiek; na modelovom rotore klesol c_P z 0,50 na 0,45.
- Pri a nad približne 0,4 sa axiálna rovnica nahrádza empirickým vzťahom $c_T(a)$; pri stalle môžu mať rovnice BEM viac riešení.
- Rotácia oneskoruje stall pri koreni lopatky; Snelova korekcia $c_{L,3D} = c_{L,2D} + 3(c/r)^2 \Delta c_L$.
- Pri vybočení klesá výkon približne s $\cos^3 \gamma$; šikmá úplava spôsobuje nerovnomernú indukciu a premenlivý uhol nábehu.
- Nestacionárne javy – tieň stožiara, dynamický stall (časová mierka $c/\Omega r$), dynamický prítok (časová mierka D/v_∞) – zvyšujú premenlivé zaťaženie.

Kontrolné otázky

1. Prečo sa pri konečnom počte lopatiek mení axiálny indukčný faktor po obvodě prstenca?
2. Vysvetlite Prandtlov model s diskami v úplave. Čo predstavuje vzdialenosť d ?
3. Od čoho závisí Prandtlov faktor strát? Prečo sú straty menšie pri väčšom počte lopatiek a väčšej rýchlobežnosti?
4. Aký je rozdiel medzi indukčným faktorom v mieste lopatky a priemerom po obvodě?
5. Ako sa zmenia rovnice BEM po zavedení faktora strát?
6. Prečo straty na konci lopatky nie sú spojené s odporom?
7. Čo je turbulentný stav úplavy a ako sa v metóde BEM zohľadňuje?
8. Za akých podmienok môžu mať rovnice BEM viac riešení a ktoré z nich je správne?
9. Čo je oneskorenie stallu, kde na lopatke sa prejavuje najviac a od akého parametra závisí?
10. Odvodte pravidlo $\cos^3 \gamma$. Aké predpoklady obsahuje?
11. Prečo sú pri vybočení indukované rýchlosti na záveternej strane disku väčšie?
12. Vysvetlite rozdiel medzi dynamickým stallom a dynamickým prítokom. Aké sú ich časové mierky?
13. Čo vyjadruje Wagnerova funkcia?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ a Prandtlov faktor podľa (8.3).

Úloha 8.1. Vypočítajte faktor strát na konci lopatky pre dvojlopatkový rotor pri $\lambda = 7$, $a = 1/3$ a $\mu = 0,9$ (a' zanedbajte). Porovnajte s trojlopatkovým rotorom (čl. 8.1.2).

(Výsledok: $F_t \approx 0,774$ (pre $N = 3$ je $0,868$))

Úloha 8.2. Aký je faktor strát pri koreni pre $N = 3$, $\mu_k = 0,15$, $\mu = 0,2$ a $\phi = 30^\circ$?

(Výsledok: $F_k \approx 0,687$)

Úloha 8.3. Pre prvok s $\sigma_r = 0,02$, $\phi = 5^\circ$, $C_x = 0,9$ a $F = 0,8$ vypočítajte jeden krok iterácie pre a podľa (8.9). Porovnajte s výsledkom pre $F = 1$.

(Výsledok: $a \approx 0,425$ (pre $F = 1$: $a \approx 0,372$); obidve hodnoty sú nad $a_T = 0,326$, v ďalšom kroku treba overiť podmienku (8.16))

Úloha 8.4. Vypočítajte súčiniteľ ťahu podľa (8.13) s $c_{T1} = 1,816$ a podľa (8.14) ($F = 1$) pre $a = 0,5$ a $a = 0,8$.

(Výsledok: priamka: $1,121$ a $1,538$; Glauert: $1,056$ a $1,529$)

Úloha 8.5. Miestny súčiniteľ ťahu prstenca je $c_{T,r} = 1,2$ a $F = 0,9$. Vypočítajte axiálny indukčný faktor podľa (8.16) a podľa (8.14).

(Výsledok: $0,653$ podľa (8.16); $0,680$ podľa (8.14))

Úloha 8.6. Prierez s tetivou $3,5 \text{ m}$ je na polomere 12 m . Pri $\alpha = 20^\circ$ je statický $c_L = 1,0$ a predĺžená lineárna časť dáva $c_L = 2,2$. Vypočítajte c_L podľa Snelovej korekcie.

(Výsledok: $c_{L,3D} \approx 1,31$)

Úloha 8.7. Pri akom uhle vybočenia klesne podľa pravidla $\cos^3 \gamma$ výkon o 10% ? Aký je vtedy uhol šikmej úplavy pri $a = 0,3$?

(Výsledok: $\gamma \approx 15,1^\circ$; $\chi \approx 17,8^\circ$)

Úloha 8.8. Vypočítajte $c_{P,\max}$ natočeného disku pre $\gamma = 30^\circ$ podľa pravidla $\cos^3 \gamma$ a hľadaním maxima (8.21) pre $a = 0,25$; $0,30$; $0,35$.

(Výsledok: $\cos^3 \gamma$: $0,385$; Glauert: $0,489$; $0,513$; $0,519$ – maximum $0,519$ pri $a \approx 0,34$)

Úloha 8.9. Prvok lopatky má tetivu $1,5 \text{ m}$ a relatívnu rýchlosť 80 m/s . Za aký čas po skokovej zmene uhla nábehu dosiahne cirkulačný vztlak 90% ustálenej hodnoty?

(Výsledok: $t_{90} \approx 0,12 \text{ s}$)

Úloha 8.10. Na modelovom rotore z obr. 8.9 porovnajte pokles c_P v dôsledku strát na konci lopatky pri $\lambda = 4$, 7 a 10 . Vysvetlite rozdiel pomocou obr. 8.3.

Kapitola 9

Návrh lopatky a výkonové charakteristiky

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- opísať postup aerodynamického návrhu rotora a zvoliť jeho základné parametre,
- vypočítať tetivu a uhol nastavenia optimálnej lopatky bez rotácie úplavy aj s ňou,
- vysvetliť vplyv návrhovej rýchlobežnosti, profilu a počtu lopatiek na tvar lopatky a na $c_{P,max}$,
- navrhnúť zjednodušenú (vyrobiteľnú) lopatku a posúdiť jej výkonnosť metódou BEM,
- interpretovať charakteristiky $c_P(\lambda)$, $c_Q(\lambda)$, $c_T(\lambda)$ a $K_P(1/\lambda)$,
- opísať prevádzku pri konštantných a premenlivých otáčkach, reguláciu stallom a natáčaním lopatiek a zostrojiť výkonovú krivku turbíny.

V kap. 7 and 8 sme metódou BEM počítali výkon rotora so *zadanou* lopatkou. Pri návrhu je úloha opačná: pre zvolený výkon, rýchlobežnosť a profil hľadáme tetivu a uhol nastavenia lopatky tak, aby rotor odoberal z vetra čo najviac energie. Optimálny návrh závisí od spôsobu prevádzky turbíny (konštantné alebo premenlivé otáčky) a v ideálnom prípade aj od rozdelenia rýchlosti vetra v lokalite; v praxi sa robia inžinierske kompromisy, stále je však potrebné poznať najlepšie možné riešenie [13, čl. 3.7.1]. V druhej časti kapitoly sa venujeme výkonovým charakteristikám rotora a ich využitiu pri prevádzke turbíny [13, kap. 4].

9.1 Postup návrhu rotora

Manwell a kol. uvádzajú všeobecný postup návrhu v troch krokoch [3, čl. 3.10.1] (obr. 9.1):

1. *Základné parametre rotora.* Z požadovaného výkonu P pri rýchlosti vetra v_∞ sa s odhadnutým súčiniteľom výkonu c_P a účinnosťou η ďalších častí (prevodovka, generátor) určí polomer rotora [3, rov. (3.109)]

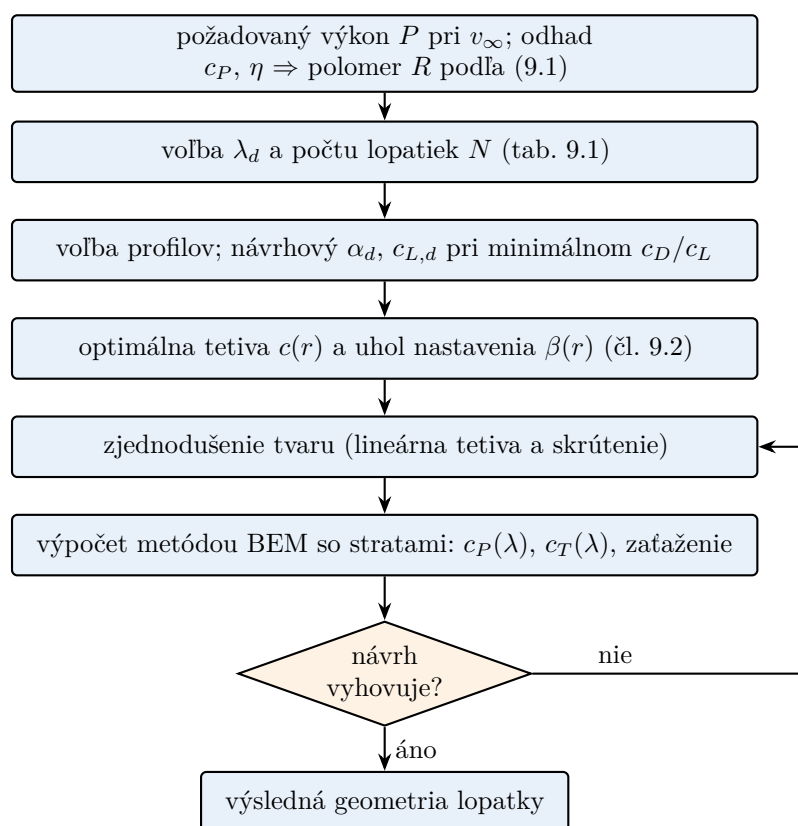
$$P = c_P \eta \frac{1}{2} \rho \pi R^2 v_\infty^3. \quad (9.1)$$

Podľa použitia sa zvolí rýchlobežnosť: pre čerpanie vody, kde je potrebný veľký krútiaci moment, $1 < \lambda < 3$; pre výrobu elektriny $4 < \lambda < 10$. Rýchlobežnejšie rotory potrebujú menej materiálu na lopatky a menšiu prevodovku, ale kvalitnejšie profily. Počet lopatiek sa zvolí podľa tab. 9.1; pri menej ako troch lopatkách treba riešiť viaceré problémy dynamiky konštrukcie náboja. Pri $\lambda < 3$ možno použiť zakrivené plechy, pri $\lambda > 3$ aerodynamické profily [3, čl. 3.10.1.1].

2. *Tvar lopatky.* Pre každý prierez sa z charakteristík profilu zvolí návrhový uhol nábehu a súčiniteľ vztlaču, pri ktorých je pomer c_D/c_L najmenší. Lopatka sa rozdelí na 10 až 20 prvkov a tetiva a uhol nastavenia sa určia z teórie optimálneho rotora (čl. 9.2). Potom sa zvolí tvar, ktorý optimálny dobre aproximuje a dá sa vyrobiť, napr. s lineárnym priebehom tetivy a skrútenia [3, čl. 3.10.1.2].
3. *Výpočet výkonnosti a úprava návrhu.* Metódou BEM so stratami na konci lopatky (kap. 8) sa vypočíta výkonnosť rotora a návrh sa upravuje, kým sa nenájde najlepšie riešenie pri daných výrobných obmedzeniach [3, čl. 3.10.1.3].

Tabuľka 9.1. Odporúčaný počet lopatiek N pre rôzne návrhové rýchlobežnosti [3, tab. 3.4].

λ	1	2	3	4	> 4
N	8–24	6–12	3–6	3–4	1–3



Obr. 9.1. Postup aerodynamického návrhu rotora (podľa [3, čl. 3.10.1]).

Príklad 9.1: Základné parametre rotora

Navrhnete polomer rotora turbíny s elektrickým výkonom 5 MW pri rýchlosti vetra 11,4 m/s, ak odhadujeme $c_P = 0,45$ a účinnosť prevodovky a generátora $\eta = 0,94$. Aké budú otáčky rotora pri návrhovej rýchlobežnosti $\lambda_d = 7,5$?

Riešenie. Z (9.1):

$$R = \sqrt{\frac{P}{c_P \eta \frac{1}{2} \rho \pi v_\infty^3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6}{0,45 \cdot 0,94 \cdot 0,5 \cdot 1,225 \cdot \pi \cdot 11,4^3}} = 64,4 \text{ m.}$$

Uhlová rýchlosť $\Omega = \lambda_d v_\infty / R = 7,5 \cdot 11,4 / 64,4 = 1,33 \text{ rad/s}$, t. j. $12,7 \text{ min}^{-1}$; obvodová rýchlosť konca lopatky $\Omega R = 85,5 \text{ m/s}$. Pre porovnanie: referenčná turbína NREL 5 MW má priemer 126 m a menovité otáčky $12,1 \text{ min}^{-1}$ [6].

9.2 Optimálna lopatka

9.2.1 Optimálna lopatka bez rotácie úplavy

Najjednoduchší návrh vychádza z predpokladov: bez rotácie úplavy ($a' = 0$), bez odporu ($c_D = 0$), bez strát na konci lopatky a $s = 1/3$ v každom prstenci. Takto navrhnutú lopatku nazývajú Manwell a kol. **Betzov optimálny rotor** [3, čl. 3.7]. Porovnaním ťahu prstenca z hybnostnej teórie pri $a = 1/3$ s ťahom z teórie prvku lopatky a s uhlom prúdenia $\tan \phi = (1 - a)/\lambda_r$ dostaneme [3, rov. (3.78), (3.79)]

$$\phi = \arctan \frac{2}{3\lambda_r}, \quad c = \frac{8\pi r \sin \phi}{3N c_{L,d} \lambda_r}. \quad (9.2)$$

Uhol nastavenia prierezu je $\beta = \phi - \alpha_d$. Podľa týchto vzťahov bola navrhnutá modelová lopatka v kap. 7 (tab. 7.3; vzťah pre tetivu použitý tam je s (9.2) totožný). Pre $\lambda = 7$, $N = 3$, $c_L = 1$ a $\alpha_d = 7^\circ$ sme vlastným výpočtom overili hodnoty [3, tab. 3.2], napr. pri $\mu = 0,5$: $c/R = 0,075$, $\phi = 10,8^\circ$, $\beta = 3,8^\circ$.

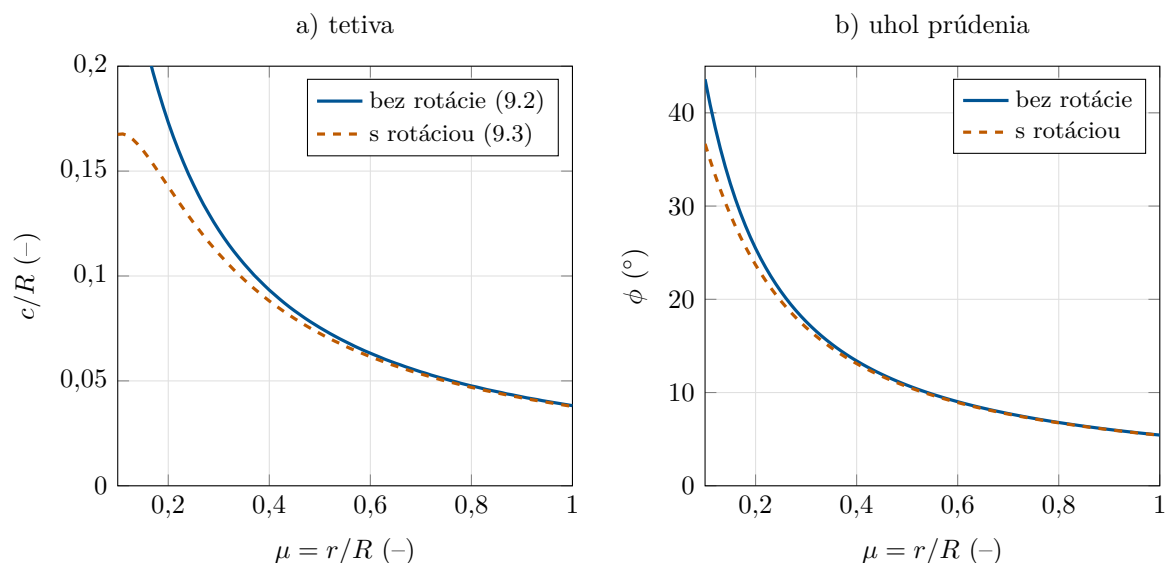
9.2.2 Optimálna lopatka s rotáciou úplavy

Ak zahrnieme rotáciu úplavy (bez odporu a strát na konci lopatky), maximum príspevku prstenca k c_P vzhľadom na uhol prúdenia vedie k vzťahom [3, rov. (3.105), (3.106)]

$$\phi = \frac{2}{3} \arctan \frac{1}{\lambda_r}, \quad c = \frac{8\pi r}{N c_{L,d}} (1 - \cos \phi) \quad (9.3)$$

Indukčné faktory takto navrhutej lopatky sú $a = 1/[1 + 4 \sin^2 \phi / (\sigma_r c_L \cos \phi)]$ a $a' = (1 - 3a)/(4a - 1)$ [3, čl. 3.9]. Vzťahy (9.3) odporúčajú Manwell a kol. ako východisko návrhu (krok 2 v čl. 9.1) [3, rov. (3.111), (3.112)]. Hodnoty z [3, tab. 3.3] (napr. pre $\lambda = 6$, $N = 3$, $c_L = 1$ pri $\mu = 0,55$: $\phi = 11,2^\circ$, $c/R = 0,088$) sme vlastným výpočtom overili.

Obidva návrhy sa líšia najmä pri koreni lopatky, kde je miestna rýchlobežnosť malá a vplyv rotácie úplavy veľký (obr. 9.2); vo vonkajšej časti sú takmer totožné. Optimálna lopatka má smerom ku koreňu rýchlo rastúcu tetivu a veľké skrútenie [3, čl. 3.7].



Obr. 9.2. Optimálna lopatka pre $\lambda_d = 7$, $N = 3$ a $c_{L,d} = 0,99$ bez rotácie úplavy a s rotáciou úplavy (vlastný výpočet). Uhol nastavenia je $\beta = \phi - \alpha_d$.

Príklad 9.2: Tetiva a uhol nastavenia prierezu

Pre trojlopatkový rotor s $R = 63$ m a $\lambda_d = 7$ navrhnete prierez na $\mu = 0,75$ ($r = 47,25$ m), ak profil pracuje pri $\alpha_d = 5^\circ$ s $c_{L,d} = 0,99$. Porovnajte návrh bez rotácie úplavy a s ňou.

Riešenie. Miestna rýchlobežnosť $\lambda_r = 7 \cdot 0,75 = 5,25$.

Bez rotácie úplavy (9.2): $\phi = \arctan[2/(3 \cdot 5,25)] = 7,237^\circ$, $\sin \phi = 0,1260$,

$$c = \frac{8\pi \cdot 47,25 \cdot 0,1260}{3 \cdot 3 \cdot 0,99 \cdot 5,25} = 3,198 \text{ m}, \quad \beta = 7,24 - 5 = 2,24^\circ.$$

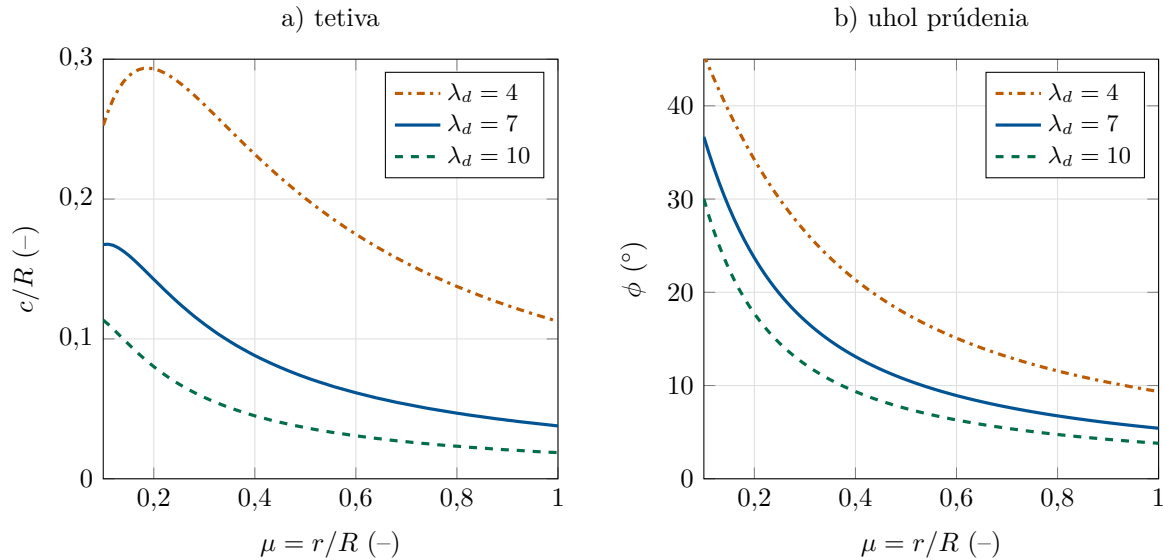
S rotáciou úplavy (9.3): $\phi = \frac{2}{3} \arctan(1/5,25) = \frac{2}{3} \cdot 10,784^\circ = 7,190^\circ$, $1 - \cos \phi = 0,00786$,

$$c = \frac{8\pi \cdot 47,25}{3 \cdot 0,99} \cdot 0,00786 = 3,144 \text{ m}, \quad \beta = 2,19^\circ.$$

Rozdiel je v tejto časti lopatky menší ako 2 %. Pri koreni ($\mu = 0,2$) dávajú vzťahy 10,9 m a 9,0 m – tetivy, ktoré by sa nedali vyrobiť ani prepraviť; preto bola tetiva modelovej lopatky obmedzená na 4,5 m.

9.2.3 Vplyv návrhovej rýchlobežnosti

Ak je súčiniteľ vztlaku pozdĺž lopatky konštantný, veľká návrhová rýchlobežnosť vyžaduje dlhú štíhlu lopatku a malá rýchlobežnosť krátku širokú lopatku [13, čl. 3.7.2] (obr. 9.3). Z (9.3) vidno, že tetiva je nepriamo úmerná počtu lopatiek a súčiniteľu vztlaku: rovnakú plnosť rotora možno dosiahnuť menším počtom širších lopatiek. Pri rotore pracujúcom mimo návrhovej rýchlobežnosti nie je axiálny indukčný faktor rovnomerný a výkonnosť je menšia ako optimálna aj bez odporu [13, čl. 3.7.2].



Obr. 9.3. Optimálna lopatka s rotáciou úplavy (9.3) pre rôzne návrhové rýchlobežnosti ($N = 3$, $c_{L,d} = 0,99$; vlastný výpočet).

9.3 Voľba profilu a návrhového uhla nábehu

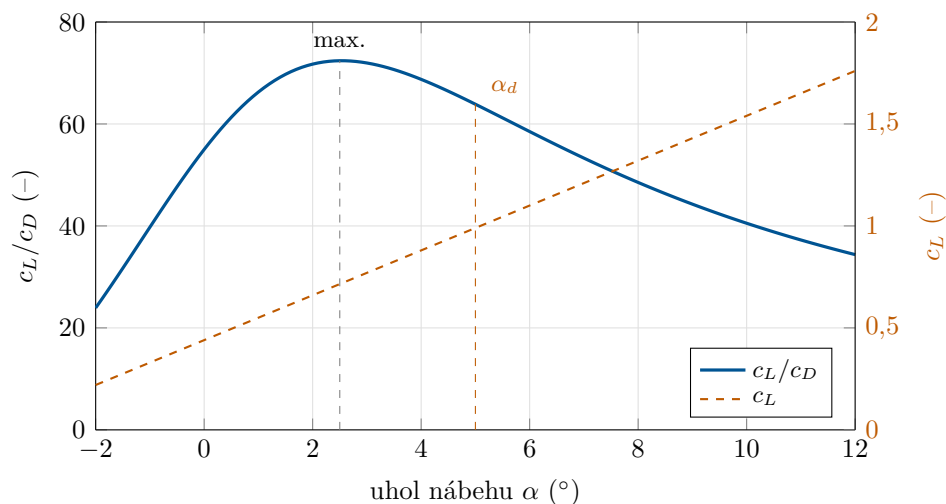
Návrhový súčiniteľ vztľaku sa volí tam, kde je pomer c_L/c_D najväčší, aby boli straty odporom čo najmenšie. Hoci sa odpor pri určovaní optimálnej geometrie zanedbáva, pri výpočte krútiaceho momentu a výkonu ho zanedbať nemožno [13, čl. 3.7.2]. Pre profil NACA 4412 pri Reynoldsovom čísle okolo $5 \cdot 10^5$ je najväčší pomer c_L/c_D pri $c_L \approx 0,7$ a $\alpha \approx 3^\circ$ [13, čl. 3.7.2]. Profil DU 93-W-210 má najväčší pomer $c_L/c_D = 140$ pri 6° , 19-percentný profil LS(1) pomer 85 pri 4° [3, čl. 3.12]. Veľký pomer c_L/c_D závisí od profilu, najmä však od Reynoldsovho čísla a drsnosti povrchu; vysoká hodnota je okolo 150, nízka okolo 40 [13, čl. 3.7.4].

Moderné lopatky sa navrhujú z *rodín profilov*: pri konci lopatky tenký profil s veľkým pomerom c_L/c_D , pri koreni hrubá verzia toho istého profilu kvôli pevnosti [3, čl. 3.4.5] (kap. 4).

Modelová charakteristika z kap. 7 má najväčší pomer $c_L/c_D = 72$ pri $\alpha = 2,5^\circ$ ($c_L = 0,715$) (obr. 9.4). Modelová lopatka bola navrhnutá pre $\alpha_d = 5^\circ$ ($c_L = 0,99$, $c_L/c_D = 64$): pomer c_L/c_D je o 12 % menší, ale tetivy sú podľa (9.2) o 28 % kratšie. Kratšia tetiva znamená menšiu plochu, hmotnosť a zaťaženie lopatky v pokoji – aj tu ide o inžiniersky kompromis.

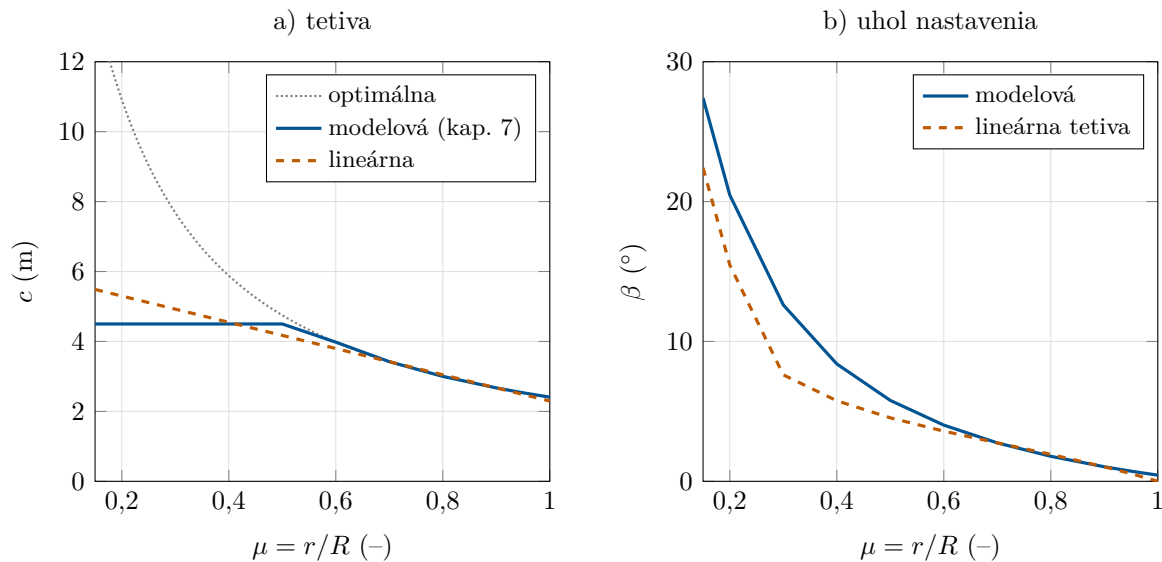
9.4 Praktická lopatka

Optimálna lopatka je účinná, ale zložitá na výrobu, a teda drahá [13, čl. 3.7.3]. Burton a kol. ukazujú zjednodušenie: tetiva sa nahradí priamkou, ktorá prechádza optimálnymi tetivami na 70 % a 90 % polomeru. Vonkajšia časť lopatky zostane takmer optimálna a pri koreni sa ušetrí veľa materiálu. Aby prierezy s neoptimálnou tetivou vytvárali rovnaký vztlak na jednotku dĺžky, musí sa súčiniteľ vztľaku zmeniť tak, aby súčin $c c_L$ zostal rovnaký ako pri optimálnej lopatke; zodpovedajúci uhol nábehu určí potom nový uhol nastavenia. Pri koreni sa potrebný súčiniteľ vztľaku blíži k stallu a odpor je veľký, strata je však malá, lebo krútiaci moment tejto časti je malý [13, čl. 3.7.3]. Manwell a kol. odporúčajú lineárny priebeh tetivy aj skrútenia [3, rov. (3.115), (3.116)].



Obr. 9.4. Pomer c_L/c_D a súčiniteľ vztlaku modelovej charakteristiky profilu z kap. 7 (vlastný výpočet).

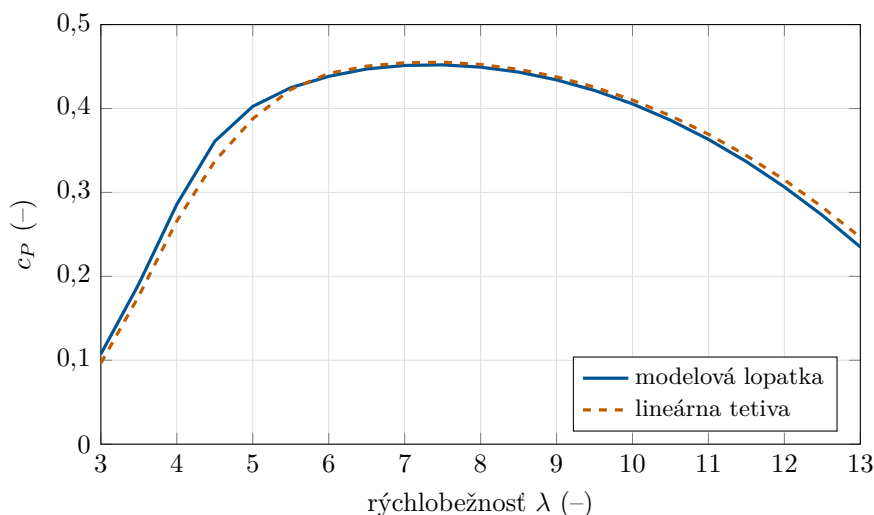
Postup sme použili pre modelovú lopatku (obr. 9.5): tetiva je priamka cez optimálne hodnoty 3,42 m na $\mu = 0,7$ a 2,67 m na $\mu = 0,9$. Potrebný súčiniteľ vztlaku $c_L = c_{L,d} c_{\text{opt}}/c_{\text{lin}}$ pri koreni prekračuje maximum modelového profilu (1,76), preto sme uhol nábehu pri koreni obmedzili na 10° . Plocha troch lopatiek je 625 m^2 (plnosť 0,050), pri modelovej lopatke s obmedzenou tetivou 610 m^2 (0,049). Charakteristiky $c_P(\lambda)$ oboch lopatiek vypočítané metódou BEM so stratami sú na obr. 9.6: rozdiel je menší ako 1 % – jednoduchší tvar prakticky nič nestojí.



Obr. 9.5. Modelová lopatka z kap. 7 a lopatka s lineárnou tetivou cez optimálne hodnoty na 70 % a 90 % polomeru ($\lambda_d = 7$; vlastný výpočet podľa postupu [13, čl. 3.7.3]).

9.5 Vplyv odporu a počtu lopatiek na optimálny výkon

Odpor profilov znižuje c_P tým viac, čím väčšia je návrhová rýchloběžnosť; straty na konci lopatky sú naopak najväčšie pri malej rýchloběžnosti (čl. 8.1.5) [13, čl. 3.7.4]. Odpor má na



Obr. 9.6. Súčiniteľ výkonu modelovej lopatky a lopatky s lineárnou tetivou (vlastný výpočet metódou BEM so stratami na konci a pri koreni lopatky).

geometriu optimálnej lopatky len malý vplyv, preto ho pri návrhu tvaru možno zanedbať [13, čl. 3.7.4]. Wilson a kol. (1976) vypočítali najväčší dosiahnuteľný súčiniteľ výkonu optimálneho rotora s konečným počtom lopatiek a s odporom a výsledky aproximovali vzťahom s presnosťou 0,5 % pre $4 \leq \lambda \leq 20$, $25 \leq c_L/c_D \leq \infty$ a $N = 1$ až 3 [3, rov. (3.145)]:

$$c_{P,\max} = \frac{16}{27} \lambda \left[\lambda + \frac{1,32 + \left(\frac{\lambda-8}{20}\right)^2}{N^{2/3}} \right]^{-1} - \frac{0,57 \lambda^2}{\frac{c_L}{c_D} \left(\lambda + \frac{1}{2N} \right)}. \quad (9.4)$$

Prvý člen vyjadruje straty rotáciou úplavy a na konci lopatky, druhý straty odporom. Z obr. 9.7 vidno, že menej lopatiek znamená menšie $c_{P,\max}$ pri rovnakej rýchlobežnosti; dvojlopatkové turbíny však zvyčajne pracujú pri väčšej rýchlobežnosti ako trojlopatkové, takže rozdiel medzi typickými návrhmi je malý. Použitie profilov s veľkým pomerom c_L/c_D je jednoznačne výhodné [3, čl. 3.12].

Príklad 9.3: Odhad najväčšieho súčiniteľa výkonu

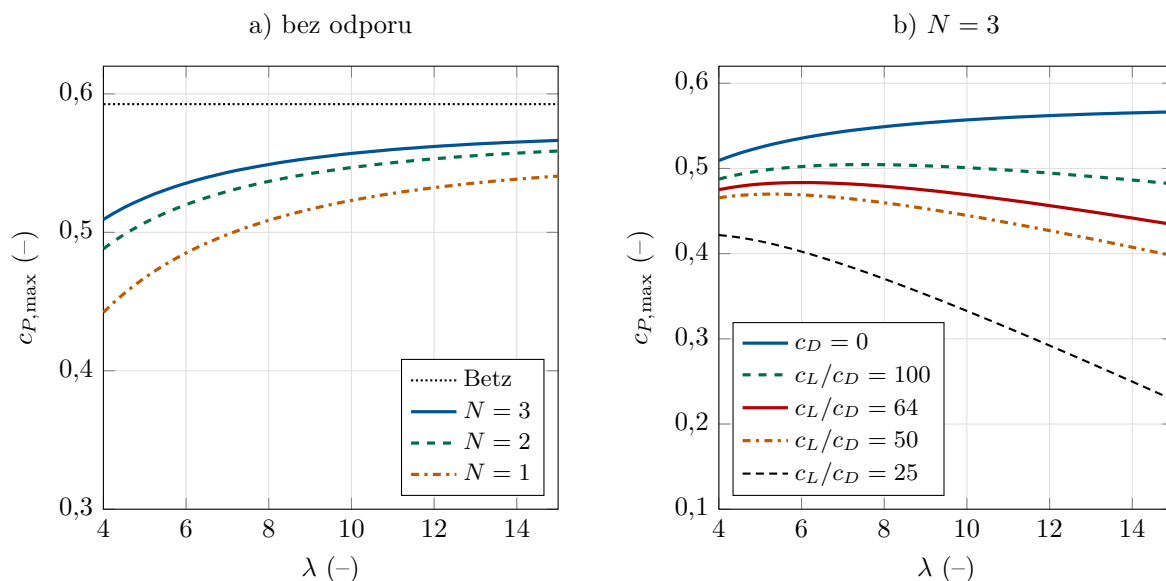
Odhadnite $c_{P,\max}$ trojlopatkového rotora s $\lambda = 7$ a profilom s $c_L/c_D = 64$ (modelový profil pri $\alpha = 5^\circ$) a porovnajte s výsledkom metódy BEM pre modelovú lopatku.

Riešenie. Prvý člen (9.4): $(\lambda - 8)/20 = -0,05$, $N^{2/3} = 2,080$,

$$\frac{16}{27} \cdot \frac{7}{7 + (1,32 + 0,0025)/2,080} = 0,5926 \cdot \frac{7}{7,636} = 0,543.$$

Druhý člen: $0,57 \cdot 49/[64(7 + 1/6)] = 27,93/458,7 = 0,061$. Spolu $c_{P,\max} \approx 0,482$.

Metóda BEM so stratami dala pre modelovú lopatku $c_P = 0,451$ pri $\lambda = 7$ (obr. 8.9), teda o 6 % menej. Rozdiel vysvetľujú odchýlky od optimálnej lopatky: obmedzená tetiva pri koreni, chýbajúca lopatka vnútri $\mu = 0,15$ a straty pri koreni. Aj Manwell a kol. upozorňujú, že skutočné c_P znižujú neoptimálne (vyrobitelne) lopatky, chýbajúce profily pri náboji a straty pri koreni [3, čl. 3.12].



Obr. 9.7. Najväčší dosiahnuteľný súčiniteľ výkonu podľa (9.4): a) vplyv počtu lopatiek bez odporu, b) vplyv pomeru c_L/c_D pre trojlopatkový rotor (vlastný výpočet; porovnaj [3, obr. 3.33, 3.34]).

9.6 Výkonové charakteristiky rotora

Výkonnosť turbíny charakterizujú tri veličiny: výkon určuje vyrobenú energiu, krútiaci moment dimenziu prevodovky a generátora a ťah dimenziu stožiaru. Ak sa aerodynamické vlastnosti lopatiek nezhoršujú, bezrozmerné charakteristiky rotora závisia len od rýchlobežnosti a prípadne od uhla natočenia lopatiek; preto sa zobrazujú súčinitele výkonu, momentu a ťahu v závislosti od λ [13, čl. 4.1]. Súčiniteľ krútiaceho momentu je

$$c_Q = \frac{Q}{\frac{1}{2}\rho\pi R^3 v_\infty^2} = \frac{c_P}{\lambda}. \quad (9.5)$$

9.6.1 Charakteristika $c_P(\lambda)$

Typický moderný trojlopatkový rotor dosahuje najväčšie c_P okolo 0,47 pri $\lambda \approx 7$, čo je výrazne menej ako Betzov limit; rozdiel spôsobujú odpor, straty na konci lopatky a pri malých rýchlobežnostiach stall. Ani bez strát sa Betzov limit nedosiahne, lebo tvar lopatky nie je dokonalý [13, čl. 4.1.1]. Pre modelový rotor je charakteristika na obr. 9.8 (krivka $N = 3$).

9.6.2 Vplyv plnosti rotora

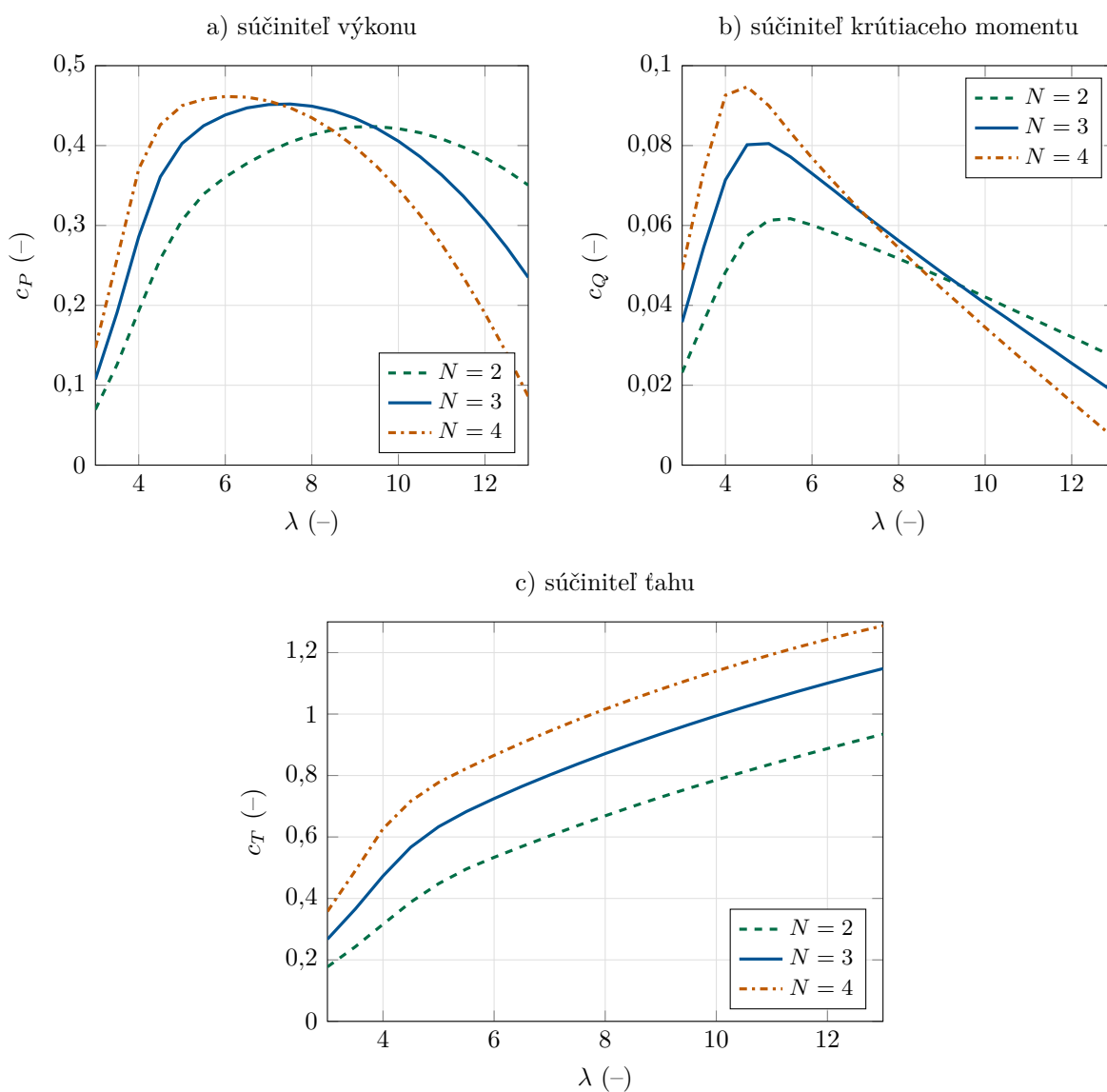
Plnosť rotora (celková plocha lopatiek k ploche rotora) možno meniť počtom lopatiek alebo tetivou [13, čl. 4.1.2]. Hlavné vplyvy sú [13, čl. 4.1.2]:

- malá plnosť dáva širokú plochú krivku $c_P(\lambda)$ – c_P sa v širokom rozsahu rýchlobežností mení málo, maximum je však nízke, lebo straty odporom sú veľké (približne úmerné λ^3);
- veľká plnosť dáva úzku krivku s ostrým maximom – turbína je citlivá na zmenu rýchlobežnosti a pri príliš veľkej plnosti klesá aj maximum v dôsledku stallu;

- optimum sa dosahuje približne s tromi lopatkami; dve lopatky sú prijateľnou alternatívou, lebo širšie maximum môže dať väčšiu ročnú výrobu.

Krútiaci moment rastie s plnosťou; maximum c_Q nastáva pri menšej rýchlobežnosti ako maximum c_P [13, čl. 4.1.3]. Pre turbíny na výrobu elektriny je žiaduci čo najmenší moment (lacnejšia prevodovka); viaclopatkové pomalobežné turbíny na čerpanie vody majú naopak veľký rozbehový moment [13, čl. 4.1.3]. Ťah s plnosťou vo všeobecnosti rastie [13, čl. 4.1.4].

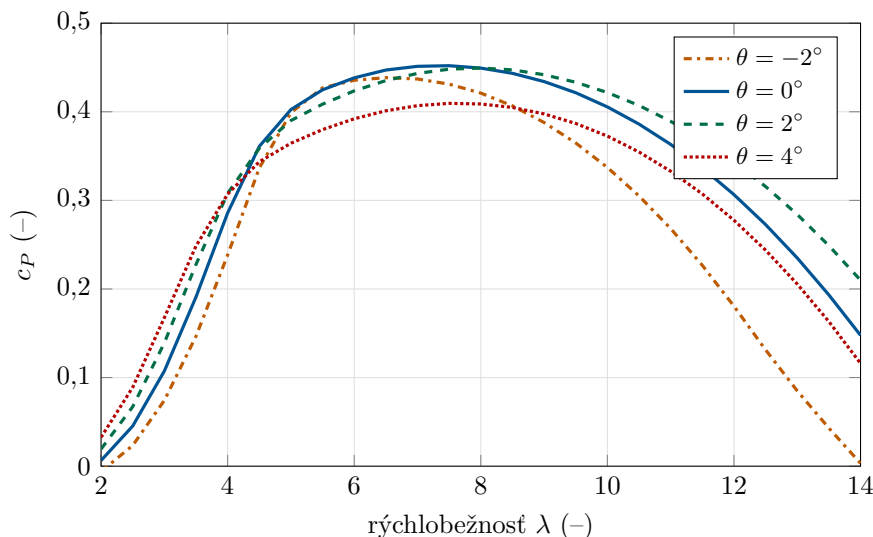
Tieto trendy ukazuje vlastný výpočet pre modelový rotor s dvomi, tromi a štyrmi rovnakými lopatkami (obr. 9.8): so zväčšujúcim sa počtom lopatiek sa maximum c_P posúva k menšej rýchlobežnosti ($\lambda = 9,5; 7,5; 6$) a maximum c_Q rastie (0,062; 0,081; 0,095).



Obr. 9.8. Charakteristiky modelového rotora s dvomi, tromi a štyrmi lopatkami podľa tab. 7.3 (vlastný výpočet metódou BEM so stratami; porovnaj [13, obr. 4.3–4.5]).

9.6.3 Vplyv uhla natočenia lopatiek

Lopatka je skrútená, celá sa však dá natočiť o **uhol natočenia** θ (angl. *pitch angle*); uhol nastavenia prierezu je potom $\beta(r) + \theta$. Kladné θ zväčšuje uhol nastavenia a znižuje uhol nábehu, záporné θ uhol nábehu zväčšuje a môže vyvolať stall. Už malá zmena uhla natočenia výrazne mení výkon [13, čl. 4.2.4] (obr. 9.9). Rotor navrhnutý pre jedny podmienky možno prispôbiť iným vhodnou voľbou uhla natočenia a otáčok [13, čl. 4.2.4].



Obr. 9.9. Vplyv uhla natočenia lopatiek na charakteristiku $c_P(\lambda)$ modelového rotora (vlastný výpočet).

9.7 Prevádzka pri konštantných otáčkach

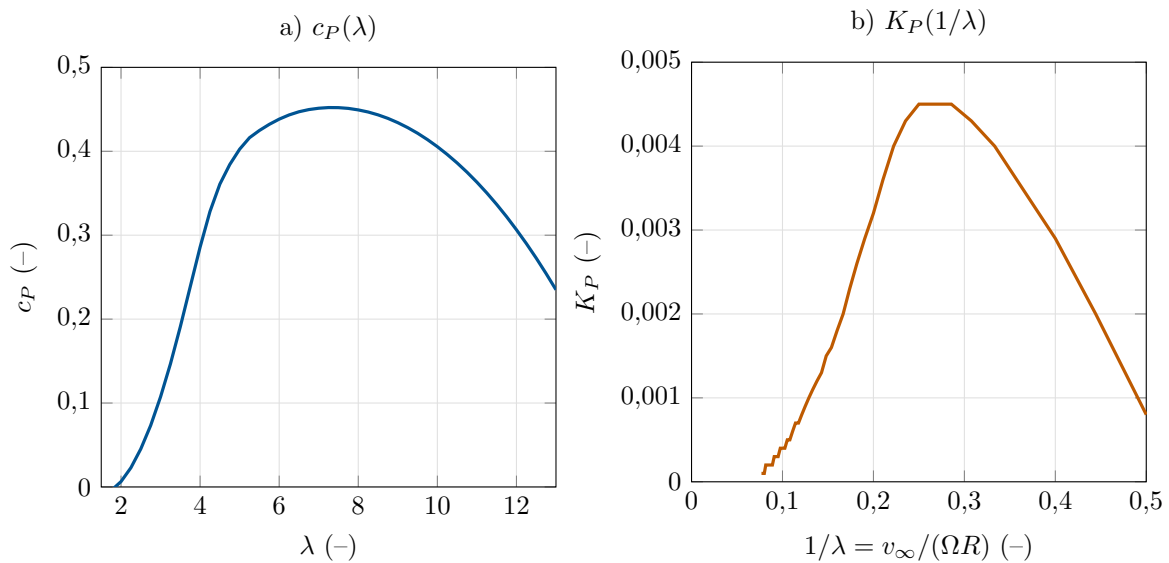
Väčšina turbín vyrába elektrinu s konštantnou frekvenciou, preto bola najbežnejším spôsobom prevádzky prevádzka s konštantnými otáčkami [13, čl. 4.2]. Charakteristika $c_P(\lambda)$ ukazuje, ako by sa menil výkon s otáčkami pri konštantnom vetre. Pri konštantných otáčkach je výhodnejšia charakteristika $K_P(1/\lambda)$, kde [13, rov. (4.1)]

$$K_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^3\pi R^2} = \frac{c_P}{\lambda^3}. \quad (9.6)$$

Pretože ΩR je konštantné, K_P je úmerné výkonu a $1/\lambda = v_\infty/(\Omega R)$ rýchlosti vetra – krivka $K_P(1/\lambda)$ má rovnaký tvar ako výkonová krivka turbíny (obr. 9.10). Účinnosť turbíny (daná krivkou c_P) sa pri konštantných otáčkach s rýchlosťou vetra značne mení; turbína by mala byť navrhnutá tak, aby maximum účinnosti bolo pri rýchlostiach vetra, pri ktorých je k dispozícii najviac energie [13, čl. 4.2.1].

9.7.1 Regulácia stallom

Po nástupe stallu výkon najskôr klesne a potom s rýchlosťou vetra pomaly rastie; to poskytuje pasívnu reguláciu výkonu, ktorá chráni generátor pred preťažením. Ideálne by mal výkon po dosiahnutí maxima zostať konštantný (dokonalá regulácia stallom), skutočné turbíny sa tak nesprávajú [13, čl. 4.2.2]. Regulácia stallom je najjednoduchší spôsob obmedzenia výkonu.



Obr. 9.10. Charakteristiky modelového rotora s pevným uhlom natočenia lopatiek: a) $c_P(\lambda)$, b) $K_P(1/\lambda)$, ktorá má pri konštantných otáčkach tvar výkonovej krivky (vlastný výpočet; porovnaj [13, obr. 4.6]).

Jej nevýhody sú: výkonová krivka je daná aerodynamikou lopatiek, výkon po stalle sa mení veľmi nestacionárne a ťažko predpovedateľne, odtrhnuté prúdenie dáva malé aerodynamické tlmenie kmitov lopatiek a zaparkovaný rotor s pevnými lopatkami nemožno pri silnom vetre odľahčiť natočením lopatiek. Turbína regulovaná stallom má preto väčšie zaťaženie lopatiek a stožiara ako turbína s natáčaním lopatiek [13, čl. 4.2.2].

Výkon turbíny s konštantnými otáčkami silno závisí od zvolených otáčok: pri nízkych otáčkach dosiahne maximum pri malej rýchlosti vetra a je malé, pri vysokých otáčkach je naopak turbína pri stredných rýchlostiach vetra neúčinná. Preto sa stavali aj turbíny s dvomi otáčkami [13, čl. 4.2.3].

9.8 Prevádzka s premenlivými otáčkami a natáčanie lopatiek

Ak sa otáčky rotora plynule menia tak, aby rýchloběžnosť zostávala na hodnote, pri ktorej je c_P najväčšie, účinnosť turbíny sa výrazne zvýši. Nad menovitou rýchlosťou vetra sa otáčky udržiavajú konštantné a výkon sa reguluje natáčaním lopatiek [13, čl. 4.4].

Natáčanie lopatiek (angl. *pitch control*) odstraňuje mnohé nevýhody regulácie stallom. Výkon sa dá obmedziť dvoma spôsobmi [13, čl. 4.2.5–4.2.7]:

- *natáčaním do stallu* – malým záporným natočením (okolo -2°) sa vyvolá stall; potrebné zmeny uhla sú malé, lopatky však majú rovnaké problémy s tlmením a únavou ako pri regulácii stallom;
- *natáčaním do prúdu* (angl. *pitching to feather*) – kladným natočením sa zmenší uhol nábehu a vztlak. Potrebné uhly rastú s rýchlosťou vetra a sú oveľa väčšie, prúdenie však zostáva prilnuté, dobre predpovedateľné a s kladným tlmením. Pri odstavení sa lopatky natáčajú o 90° (lopátka „v prúde“), čím sa minimalizujú otáčky voľnobehu, pri ktorých sa zabrzdí parkovacia brzda; veľké kladné natočenie tiež vytvára veľký rozbehový moment. Tento spôsob sa presadil najmä preto, že zaťaženie lopatiek možno predpovedať

spoľahlivejšie.

Stratégiu prevádzky ukážeme na modelovom rotore (vlastný výpočet metódou BEM so stratami). Predpokladáme menovitý výkon rotora 5 MW (aerodynamický, bez strát v prevodovke a generátore), najväčšie otáčky $12,1 \text{ min}^{-1}$ ($\Omega = 1,267 \text{ rad/s}$) ako pri referenčnej turbíne NREL 5 MW [6] a rýchlobežnosť $\lambda = 7,5$, pri ktorej má modelový rotor najväčšie $c_P = 0,452$ (obr. 9.9). Prevádzka má tri oblasti (obr. 9.11):

1. *Optimálna rýchlobežnosť* (v_∞ do $10,6 \text{ m/s}$): otáčky rastú úmerne rýchlosti vetra, $\theta = 0$, $c_P = 0,452$ a výkon rastie s v_∞^3 .
2. *Konštantné otáčky pod menovitým výkonom* ($10,6$ až $11,3 \text{ m/s}$): otáčky dosiahli maximum, rýchlobežnosť klesá. Menovitý výkon sa dosiahne pri $v_\infty = 11,3 \text{ m/s}$.
3. *Menovitý výkon* (nad $11,3 \text{ m/s}$): lopatky sa nатаčajú do prúdu tak, aby výkon zostal 5 MW; pri 25 m/s je potrebný uhol natočenia $23,3^\circ$.

Ťah rotora je najväčší (788 kN) pri menovitej rýchlosti vetra a nad ňou klesá – nатаčanie lopatiek do prúdu znižuje aj ťah. Turbína regulovaná stallom by mala ťah s rýchlosťou vetra ďalej rastúci [13, obr. 3.45].

Príklad 9.4: Uhol natočenia lopatiek pri menovitom výkone

Pri rýchlosti vetra 15 m/s vyžaduje modelový rotor na udržanie výkonu 5 MW uhol natočenia $11,1^\circ$ (obr. 9.11). Vypočítajte súčiniteľ výkonu a rýchlobežnosť v tomto bode a vysvetlite, prečo sa uhol nábehu prierezu zmenšil.

Riešenie.

$$c_P = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho \pi R^2 v_\infty^3} = \frac{5 \cdot 10^6}{0,5 \cdot 1,225 \cdot \pi \cdot 63^2 \cdot 15^3} = 0,194, \quad \lambda = \frac{\Omega R}{v_\infty} = \frac{1,267 \cdot 63}{15} = 5,32.$$

Pri $\lambda = 5,32$ a $\theta = 0$ by bol $c_P \approx 0,42$ (obr. 9.10) a výkon by bol viac ako dvojnásobný. Natočením lopatiek o $11,1^\circ$ sa uhol nastavenia všetkých prierezu zväčší a pri nezmenenom uhle prúdenia sa rovnako zmenší uhol nábehu $\alpha = \phi - \beta - \theta$; vztlak a krútiaci moment klesnú.

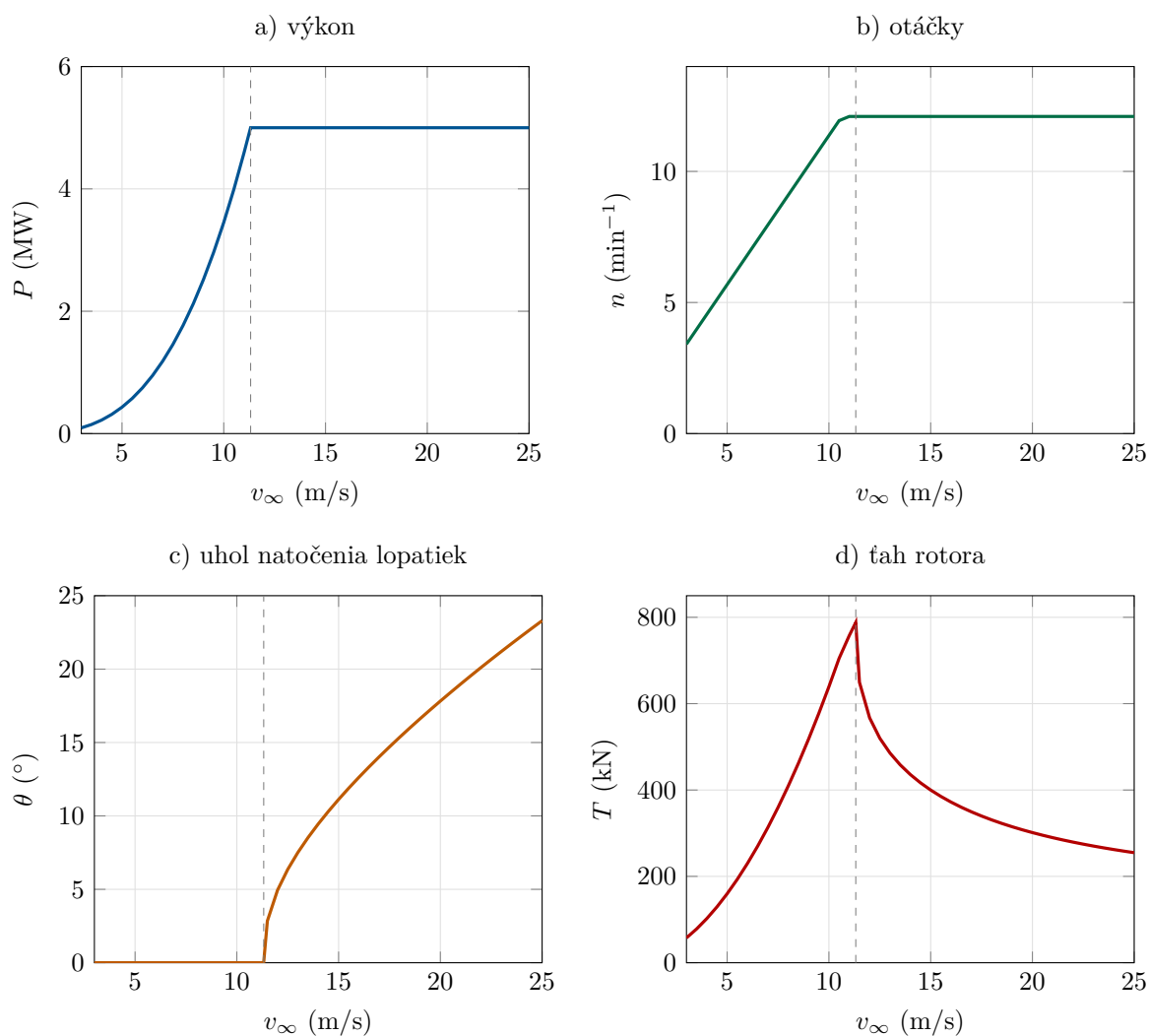
Príklad 9.5: Ročná výroba energie modelovej turbíny

Vypočítajte ročnú výrobu energie modelovej turbíny s výkonovou krivkou z obr. 9.11 pre Rayleighovo rozdelenie so strednou rýchlosťou $8,5 \text{ m/s}$ ($v_{\text{in}} = 3 \text{ m/s}$, $v_{\text{out}} = 25 \text{ m/s}$) a porovnajte s čl. 2.6.

Riešenie. Postup je rovnaký ako v čl. 2.6, výkon v triedach odčítame z vypočítanej krivky (tab. 9.2). Súčet dáva

$$E_r \approx 20\,290 \text{ MWh} \approx 20,3 \text{ GWh}, \quad k_c = \frac{20\,290}{5 \cdot 8760} = 0,46.$$

Výsledok je o 1,3 % väčší ako v čl. 2.6, kde sme predpokladali konštantné $c_P = 0,44$; modelový rotor pracuje pod menovitou rýchlosťou s $c_P = 0,452$. Výpočet nezahŕňa straty v prevodovke a generátore, nedostupnosť turbíny ani straty v úplave susedných turbín.



Obr. 9.11. Prevádzka modelového rotora s premenlivými otáčkami a natáčaním lopatiek do prúdu ($P_n = 5 \text{ MW}$, $n_{\max} = 12,1 \text{ min}^{-1}$; vlastný výpočet metódou BEM so stratami). Čiarkovane menovitá rýchlosť vetra $11,3 \text{ m/s}$.

Tabuľka 9.2. Ročná výroba energie modelovej turbíny (čl. 9.8; Rayleighovo rozdelenie, $\bar{v} = 8,5 \text{ m/s}$).

v_i (m/s)	hodiny (h)	$P(v_i)$ (kW)	energia (MWh)	v_i (m/s)	hodiny (h)	$P(v_i)$ (kW)	energia (MWh)
3	517	93	48	15	248	5000	1240
4	639	221	141	16	189	5000	945
5	724	432	312	17	140	5000	702
6	771	746	575	18	102	5000	508
7	781	1184	925	19	72	5000	359
8	759	1767	1341	20	50	5000	248
9	710	2517	1786	21	33	5000	167
10	642	3452	2215	22	22	5000	109
11	562	4596	2583	23	14	5000	70
12	478	5000	2389	24	9	5000	44
13	395	5000	1973	25	5	5000	27
14	317	5000	1585			spolu	20 292

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Návrh rotora: polomer z $P = c_P \eta \frac{1}{2} \rho \pi R^2 v_\infty^3$, voľba λ_d , N a profilu, optimálna lopatka, zjednodušenie tvaru a kontrola metódou BEM so stratami.
- Optimálna lopatka s rotáciou úplavy: $\phi = \frac{2}{3} \arctan(1/\lambda_r)$, $c = 8\pi r(1 - \cos \phi)/(Nc_{L,d})$; $\beta = \phi - \alpha_d$.
- Návrhový uhol nábehu sa volí pri najväčšom c_L/c_D ; väčšia λ_d vedie k štíhlejšej lopatke.
- Lineárna tetiva cez optimálne hodnoty na 70 % a 90 % polomeru dáva prakticky rovnaké c_P ako optimálna lopatka.
- $c_{P,\max}$ znižuje odpor (najmä pri veľkom λ) a konečný počet lopatiek (najmä pri malom λ).
- Väčšia plnosť posúva maximum c_P k menšej rýchlobežnosti a zväčšuje krútiaci moment a ťah.
- Pri premenlivých otáčkach sa pod menovitou rýchlosťou udržiava optimálna rýchlobežnosť, nad ňou sa výkon obmedzuje natáčaním lopatiek; ťah je najväčší pri menovitej rýchlosti vetra.

Kontrolné otázky

1. Aké sú hlavné kroky aerodynamického návrhu rotora?
2. Prečo majú pomalobežné rotory viac lopatiek?
3. Ako sa líši optimálna lopatka bez rotácie úplavy a s rotáciou úplavy? Kde je rozdiel najväčší?
4. Prečo tetiva optimálnej lopatky ku koreňu rýchlo rastie?
5. Podľa čoho sa volí návrhový uhol nábehu? Aký kompromis sa pri tom robí?
6. Ako sa odvodí lopatka s lineárnou tetivou a aký je jej vplyv na výkon?
7. Ako ovplyvňuje odpor profilu a počet lopatiek $c_{P,\max}$?
8. Ako vplýva plnosť rotora na charakteristiky $c_P(\lambda)$, $c_Q(\lambda)$ a $c_T(\lambda)$?
9. Čo vyjadruje charakteristika $K_P(1/\lambda)$ a kedy sa používa?
10. Porovnajte reguláciu stallom, natáčaním do stallu a natáčaním do prúdu.
11. Opíšte oblasti prevádzky turbíny s premenlivými otáčkami.
12. Prečo je ťah turbíny s natáčaním lopatiek najväčší pri menovitej rýchlosti vetra?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Úloha 9.1. Aký polomer rotora je potrebný pre elektrický výkon 2 MW pri 12 m/s, ak $c_P = 0,45$ a $\eta = 0,93$?

(Výsledok: $R \approx 37,9 \text{ m}$)

Úloha 9.2. Pre $\lambda_d = 6$, $N = 3$ a $c_{L,d} = 1$ vypočítajte uhol prúdenia a pomernú tetivu c/R optimálnej lopatky s rotáciou úplavy na $\mu = 0,95$ a $\mu = 0,15$. Porovnajte s [3, tab. 3.3].

(Výsledok: $\mu = 0,95$: $6,6^\circ$, $0,053$; $\mu = 0,15$: $32,0^\circ$, $0,191$)

Úloha 9.3. Pre optimálnu lopatku bez rotácie úplavy s $\lambda = 7$, $N = 3$, $c_L = 1$ a $\alpha_d = 7^\circ$ vypočítajte c/R , ϕ a β na $\mu = 0,3$.

(Výsledok: $c/R = 0,121$; $\phi = 17,6^\circ$; $\beta = 10,6^\circ$)

Úloha 9.4. Ako sa zmení tetiva optimálnej lopatky, ak namiesto troch lopatiek zvolíme dve pri rovnakom λ_d a $c_{L,d}$?

(Výsledok: *zväčší sa 1,5-krát*)

Úloha 9.5. Podľa (9.4) vypočítajte $c_{P,\max}$ dvojlopatkového rotora pri $\lambda = 10$ a $c_L/c_D = 100$.

(Výsledok: $c_{P,\max} \approx 0,491$)

Úloha 9.6. Modelový rotor má pri $\lambda = 5$ súčiniteľ výkonu 0,40. Vypočítajte c_Q a K_P .

(Výsledok: $c_Q = 0,080$; $K_P = 0,0032$)

Úloha 9.7. Turbína s $R = 63 \text{ m}$ pracuje s konštantnými otáčkami $12,1 \text{ min}^{-1}$. Pri akej rýchlosti vetra pracuje s $\lambda = 7,5$? Aký je jej výkon pri 6 m/s, ak $c_P(\lambda = 13,3) = 0,21$?

(Výsledok: $10,6 \text{ m/s}$; $0,35 \text{ MW}$ (pri premenlivých otáčkach by to bolo $0,75 \text{ MW}$))

Úloha 9.8. Vypočítajte súčiniteľ výkonu modelovej turbíny pri menovitom výkone 5 MW a rýchlosti vetra 20 m/s a 25 m/s.

(Výsledok: $0,082$ a $0,042$)

Úloha 9.9. Z tab. 9.2 určte, aký podiel ročnej výroby pripadá na rýchlosti vetra nad menovitou rýchlosťou (triedy od 12 m/s).

(Výsledok: *približne 50 %*)

Kapitola 10

Zaťaženia veternej turbíny

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- roztriediť zaťaženia veternej turbíny podľa zdroja a podľa časového priebehu,
- vypočítať z výsledkov metódy BEM rozloženie síl a ohybových momentov po lopatke,
- vysvetliť priebeh ohybového momentu v koreni lopatky v závislosti od rýchlosti vetra pri regulácii natáčaním lopatiek,
- odhadnúť periodické zaťaženie od strihu vetra, tieňa stožiara, tiaže a odstredivej sily,
- opísať turbulenciu spektrom a vysvetliť jej význam pre únavové zaťaženie,
- odhadnúť extrémne zaťaženie zastavenej lopatky a ohybový moment v päte stožiara.

V predchádzajúcich kapitolách sme metódu BEM používali najmä na výpočet výkonu. Tie isté výpočty však dávajú aj sily na lopatky, ktoré sú základom dimenzovania lopatiek, náboja, hriadeľa, gondoly a stožiara. Táto kapitola je úvodom do výpočtu zaťažení; podrobné postupy vrátane dynamickej odozvy konštrukcie sú v [13, kap. 5] a [1, 2]. Nestacionárne aerodynamické javy (dynamický stall, dynamický prítok) sme opísali v čl. 8.5.

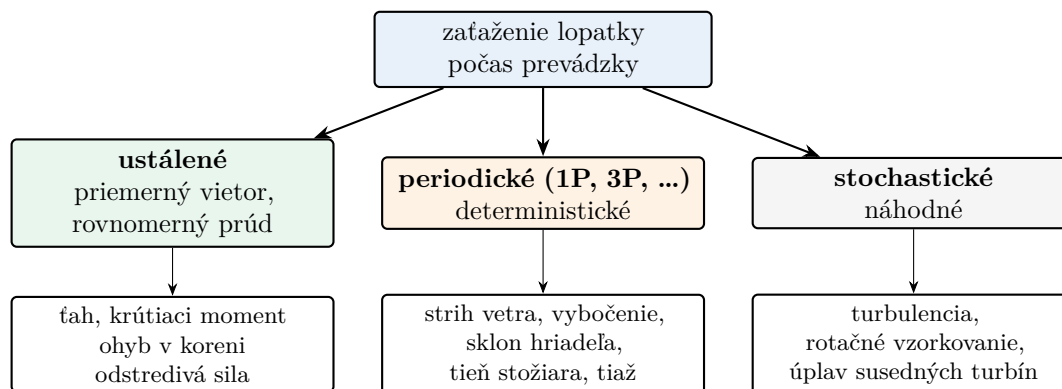
10.1 Druhy zaťaženia

10.1.1 Zdroje zaťaženia

Podľa zdroja rozlišujeme [13, čl. 5.2.1]:

- aerodynamické zaťaženie,
- tiažové zaťaženie,
- zotrvačné zaťaženie (vrátane odstredivých a gyroskopických účinkov),
- prevádzkové zaťaženie vyvolané činnosťou riadiaceho systému (brzdzenie, natáčanie gondoly, natáčanie lopatiek, odpojenie generátora).

Podľa časového priebehu sa zaťaženie lopatky počas prevádzky rozdeľuje na dve zložky [13, čl. 5.7.1]. **Deterministická zložka** je periodické zaťaženie od ustáleného, ale priestorovo nerovnomerného vetra v ploche rotora; je jednoznačne určená niekoľkými parametrami – rýchlosťou vetra v osi rotora, otáčkami, strihom vetra atď. **Stochastická zložka** je náhodné zaťaženie od fluktuácií rýchlosti vetra (turbulencie) a musí sa opisovať pravdepodobnostne. Tiažové zaťaženie závisí len od azimutu a rozloženia hmotnosti, je teda deterministické; zotrvačné zaťaženie môže mať obe zložky (obr. 10.1).



Obr. 10.1. Rozdelenie zaťaženia lopatky počas prevádzky podľa časového priebehu (schematicky; podľa [13, čl. 5.2, 5.3, 5.7]).

10.1.2 Medzné a únavové zaťaženie

Konštrukcia sa overuje na dva druhy namáhania. **Medzné (extrémne) zaťaženie** (angl. *ultimate load*) je najväčšie zaťaženie, ktoré musí konštrukcia vydržať bez porušenia. Návrhové prípady zaťaženia kombinujú normálne alebo extrémne veterné podmienky s normálnymi stavmi stroja alebo s poruchami [13, čl. 5.2.2]:

- normálne veterné podmienky a normálny stav stroja,
- normálne veterné podmienky a porucha stroja,
- extrémne veterné podmienky a normálny stav stroja.

Extrémne a normálne veterné podmienky sa zvyčajne definujú ako najhoršie podmienky s dobou opakovania 50 rokov, resp. 1 rok. Predpokladá sa, že poruchy sú zriedkavé a nekorrelované s extrémnym vetrom, preto ich kombinácia nie je návrhovým prípadom; ak však korelácia existuje, norma IEC 61400-1 požaduje kombináciu posúdiť [13, čl. 5.2.2].

Únavové zaťaženie vzniká opakovaním zaťažovacích cyklov. Rotor turbíny 600 kW sa za 20 rokov otočí približne $2 \cdot 10^8$ -krát a každá otáčka znamená úplnú zmenu znamienka napätia od tiaže v pomalobežnom hriadeľi a v lopatkách a cyklus zaťaženia lopatky kolmo na rovinu rotora od strihu vetra, vybočenia, sklonu hriadeľa, tieňa stožiara a turbulencie. Dimenzovanie mnohých častí turbíny preto určuje únava, nie medzné zaťaženie [13, čl. 5.2.3].

Pri návrhu metódou medzných stavov sa charakteristické zaťaženia násobia **častkovými súčiniteľmi spoľahlivosti**. Hodnoty, ktoré uvádza [13, tab. 5.2] pre vtedajšie vydanie normy IEC 61400-1, sú v tab. 10.1; pre únavové zaťaženie je súčiniteľ 1,0. Pri skutočnom návrhu treba použiť platné vydanie normy [14].

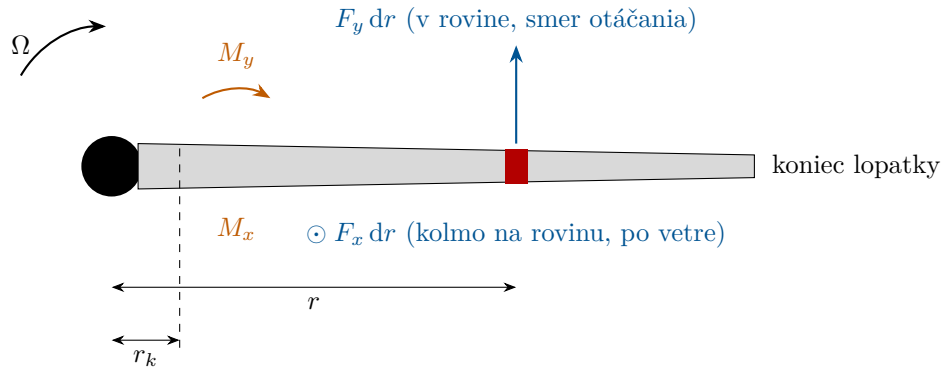
Tabuľka 10.1. Čiastkové súčinitele spoľahlivosti pre medzné zataženie podľa normy IEC 61400-1 v znení opísanom v [13, tab. 5.2] (nepriaznivé zataženie).

zdroj zataženia	normálne a extrémne	abnormálne
aerodynamické	1,35	1,1
prevádzkové	1,35	1,1
tiažové	1,1 *	1,1
zotrvačné	1,25	1,1

* 1,35, ak hmotnosti nie sú určené vážením.

10.1.3 Označenie síl a momentov na lopatke

Sily na lopatku rozkladáme rovnako ako v kap. 7: sila **kolmo na rovinu rotora** (angl. *out-of-plane*) F_x v smere osi rotora a sila **v rovine rotora** (angl. *in-plane*) F_y v smere pohybu lopatky [13, čl. 5.7.2]. Zodpovedajúce ohybové momenty v koreni lopatky sú M_x (ohyb z roviny rotora, „mávanie“) a M_y (ohyb v rovine rotora); pri natočenej lopatke sa rozlišujú aj momenty k osiam profilu (*flapwise*, *edgewise*) (obr. 10.2).



Obr. 10.2. Sily na prvok lopatky a ohybové momenty v koreni lopatky (pohľad v smere vetra; schematicky). M_x – ohyb z roviny rotora (od síl F_x), M_y – ohyb v rovine rotora (od síl F_y a tiaže).

10.2 Ustálené aerodynamické zataženie lopatky

10.2.1 Rozloženie síl a momentov

Metódou BEM so stratami na konci lopatky (kap. 8) vypočítame pre každý prvok sily na jednotku dĺžky jednej lopatky

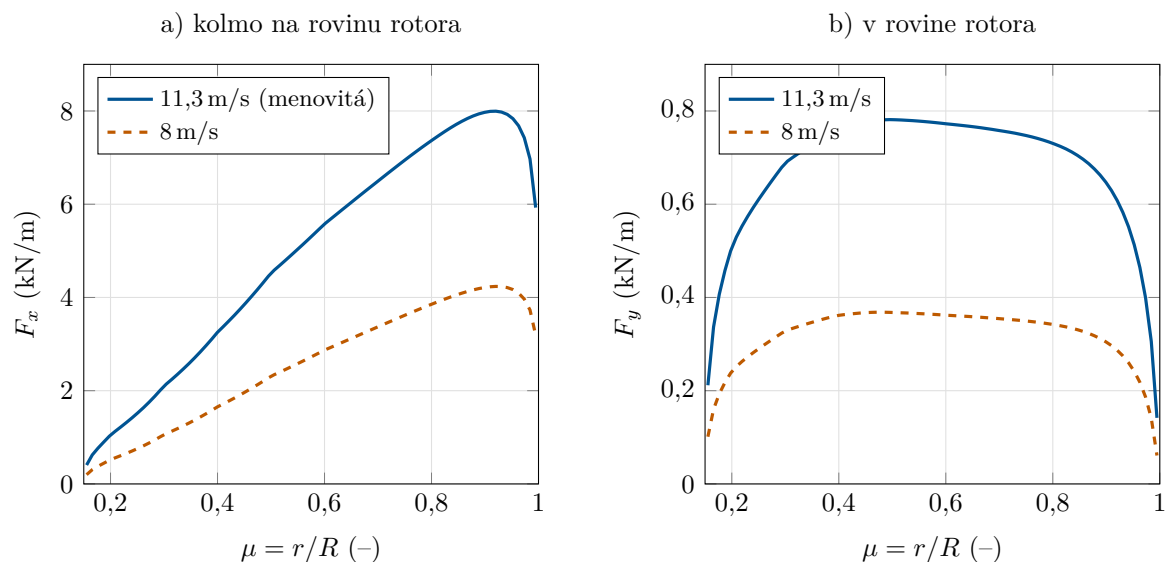
$$F_x = \frac{1}{2} \rho W^2 c C_x, \quad F_y = \frac{1}{2} \rho W^2 c C_y, \quad (10.1)$$

kde C_x a C_y sú z (7.3) a (7.4) [13, rov. (5.18), (5.19)]. Ohybové momenty v reze na polomere r_0 dostaneme integráciou síl vonkajšej časti lopatky:

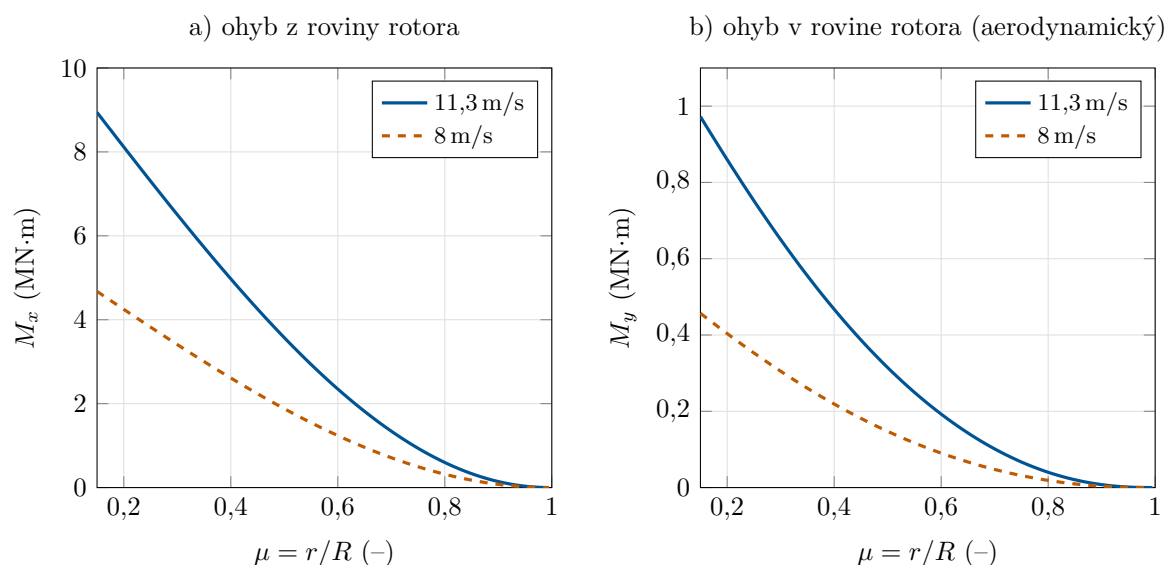
$$M_x(r_0) = \int_{r_0}^R F_x(r) (r - r_0) dr, \quad M_y(r_0) = \int_{r_0}^R F_y(r) (r - r_0) dr. \quad (10.2)$$

Pre modelový rotor s prevádzkovou stratégiou z čl. 9.8 je rozloženie síl na obr. 10.3 a momentov na obr. 10.4. Sila kolmo na rovinu rotora rastie s polomerom približne lineárne napriek zmenšujúcej sa tetive, kým sa vo vonkajšej štvrtine lopatky neprejavia straty na konci; to

isté opisuje Burton pre 40-metrový rotor [13, čl. 5.7.2]. Sila v rovine rotora je asi desaťkrát menšia. Keďže zaťaženie je sústredené vo vonkajšej časti, ohybový moment vo vnútornej tretine lopatky klesá s polomerom takmer lineárne [13, čl. 5.7.2]. Tvar rozloženia závisí len od rýchlobežnosti, nie od kombinácie otáčok, rýchlosti vetra a polomeru [13, čl. 5.7.2].



Obr. 10.3. Aerodynamické sily na jednotku dĺžky jednej lopatky modelového rotora (vlastný výpočet metódou BEM so stratami; porovnaj [13, obr. 5.6]).



Obr. 10.4. Aerodynamické ohybové momenty jednej lopatky modelového rotora podľa (10.2) (vlastný výpočet; porovnaj [13, obr. 5.7]).

Príklad 10.1: Odhad ohybového momentu v koreni lopatky

Ťah modelového rotora pri menovitej rýchlosti vetra je 788 kN. Odhadnite ohybový moment z roviny rotora v koreni lopatky ($r_k = 9,45$ m), ak predpokladáme, že sila na jednotku dĺžky rastie lineárne od nuly v osi rotora po koniec lopatky. Porovnaj s výsledkom metódy BEM $M_x = 8,94$ MN m.

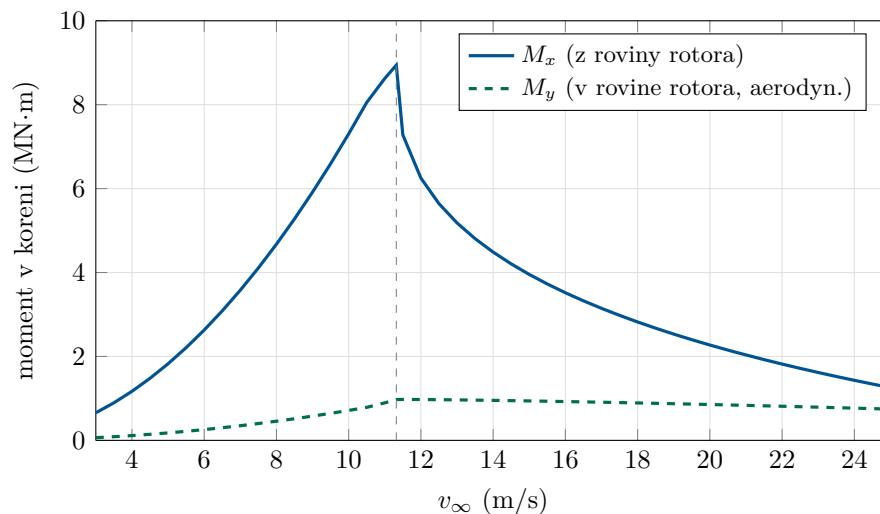
Riešenie. Na jednu lopatku pripadá $T/3 = 262,6 \text{ kN}$. Pri lineárnom rozložení $F_x \propto r$ na intervale $\langle 0, R \rangle$ leží výslednica v ťažisku trojuholníka, na polomere $\frac{2}{3}R = 42 \text{ m}$. Rameno ku koreňu je $42 - 9,45 = 32,55 \text{ m}$ a

$$M_x \approx 262,6 \cdot 32,55 = 8550 \text{ kN m} = 8,55 \text{ MN m}.$$

Odhad je o 4 % menší ako výsledok metódy BEM. Skutočné zataženie je bližšie ku koncu lopatky, ale straty na konci ho pri samom konci znižujú; výslednica je podľa BEM na polomere $9,45 + 8,94/0,2626 = 43,5 \text{ m}$ ($0,69R$).

10.2.2 Závislosť od rýchlosti vetra

Priebeh ohybového momentu v koreni lopatky v závislosti od rýchlosti vetra závisí od spôsobu regulácie. Pri regulácii stallom rastie moment najprv takmer lineárne, v oblasti stallu sa ustáli a potom ďalej mierne rastie; pri regulácii natáčaním lopatiek nad menovitou rýchlosťou rýchlo klesá [13, čl. 5.7.2]. Pre modelový rotor s natáčaním lopatiek do prúdu je priebeh na obr. 10.5: moment z roviny rotora aj ťah sú najväčšie pri menovitej rýchlosti vetra ($8,94 \text{ MN m}$, 788 kN). Aerodynamický moment v rovine rotora nad menovitou rýchlosťou takmer nerastie, lebo krútiaci moment je pri konštantnom výkone a otáčkach konštantný.



Obr. 10.5. Aerodynamické ohybové momenty v koreni lopatky modelového rotora s premenlivými otáčkami a natáčaním lopatiek do prúdu v ustálenom rovnomernom vetre (vlastný výpočet; porovnaj [13, obr. 5.8]).

10.3 Periodické zataženie

10.3.1 Strih vetra

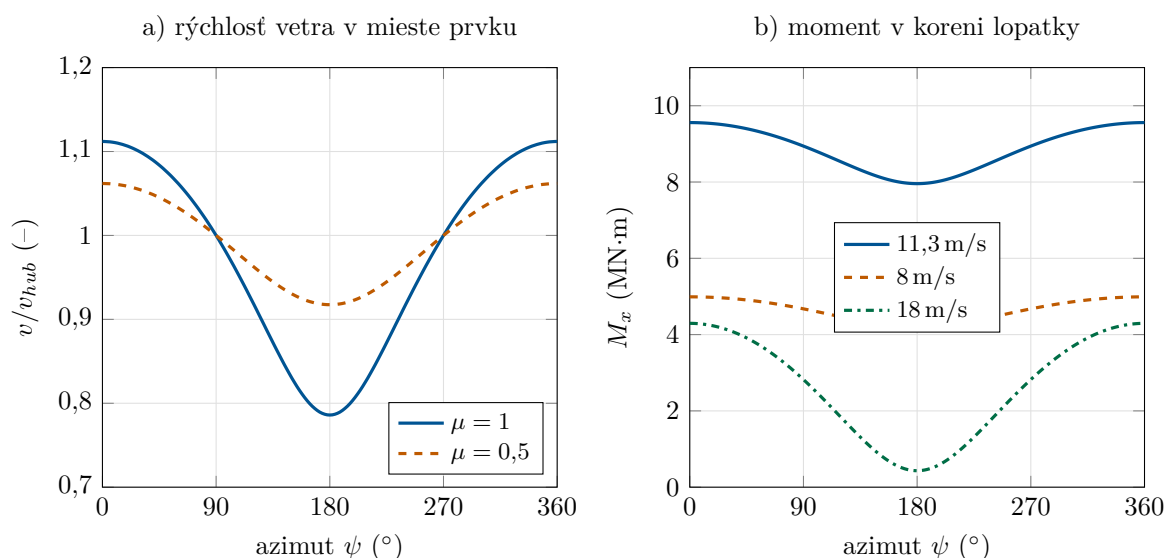
Pri návrhu turbín sa strih vetra zvyčajne opisuje mocninovým zákonom (kap. 2); exponent 0,14 je typický pre rovinatú krajinu, norma IEC 61400-1 používa konzervatívnu hodnotu 0,20 [13, čl. 5.7.2]. Zložka rýchlosti kolmá na rovinu rotora v mieste prvku na polomere r a azimute

ψ (merané od hornej polohy v smere otáčania) je [13, čl. 5.7.2]

$$v_{\infty} \left(1 + \frac{r \cos \psi}{z_{hub}} \right)^{\alpha} (1 - a). \quad (10.3)$$

Indukčné faktory ponecháme na hodnotách pre rovnomerný prúd a sily vypočítame teóriou prvku lopatky pre každý azimut.

Pre modelový rotor s výškou osi 90 m (ako NREL 5 MW [6]) a $\alpha = 0,2$ je rýchlosť na konci lopatky v hornej polohe o 11 % väčšia a v dolnej o 21 % menšia ako v osi rotora (obr. 10.6a). Moment M_x sa počas otáčky mení sínusovo s periódou jednej otáčky (1P): pri 8 m/s v rozsahu 4,17 MN m až 4,99 MN m, pri menovitej rýchlosti 7,96 MN m až 9,56 MN m. Pri 18 m/s sú lopatky natočené o $15,4^\circ$, pracujú pri malých uhloch nábehu a ich zaťaženie je na zmenu rýchlosti veľmi citlivé: moment sa mení v rozsahu 0,43 MN m až 4,30 MN m pri strednej hodnote 2,6 MN m. Pri turbíne regulovanej stallom je to naopak – pri 15 m/s je lopatka v stalle a moment sa so strihom takmer nemení [13, čl. 5.7.2].



Obr. 10.6. Vplyv strihu vetra ($\alpha = 0,2$, $z_{hub} = 90$ m) na modelový rotor: a) pomerná rýchlosť vetra, b) ohybový moment z roviny rotora v koreni lopatky (vlastný výpočet; $\psi = 0$ je horná poloha; porovnaj [13, obr. 5.11]).

10.3.2 Vybočenie a sklon hriadeľa

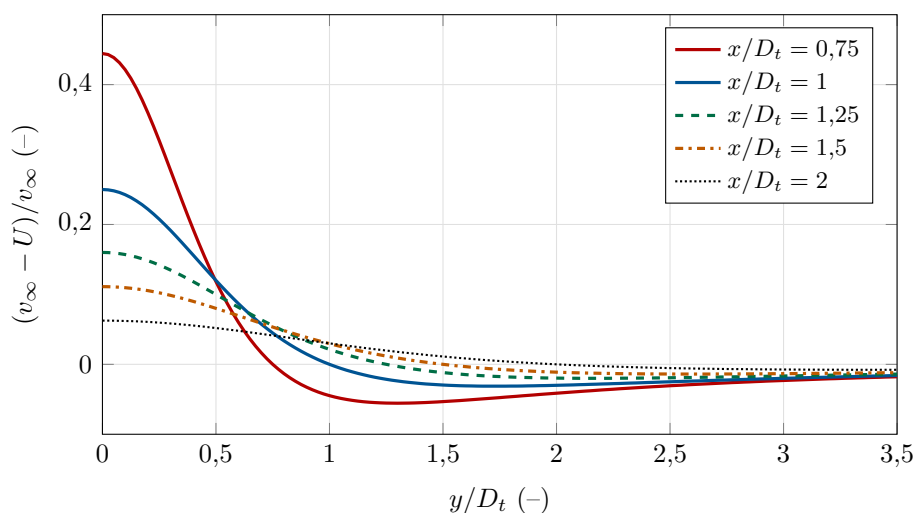
Pri vybočení osi rotora od smeru vetra sa uhol nábehu mení počas otáčky (čl. 8.4). Burton a kol. ukazujú na 40-metrovom rotore pri vybočení 30° , že pri 20 m/s je priebeh momentu v koreni sínusový s maximom pri azimute 180° – prevláda zmena relatívnej rýchlosti W ; pri 10 m/s je maximum okolo 240° , lebo sa uplatňuje aj nerovnomerná zložka indukovanej rýchlosti šikmej úplavy (8.24) [13, čl. 5.7.2]. Pri väčšej rýchlosti vetra je indukčný faktor malý a vplyv šikmej úplavy klesá. Rotory pred stožiarom majú hriadeľ zvyčajne sklonený nahor o niekoľko stupňov, aby sa zväčšila vzdialenosť lopatiek od stožiara; prúd je potom voči osi rotora sklonený podobne ako pri vybočení, len vo zvislej rovine [13, čl. 5.7.2].

10.3.3 Tieň stožiara

Stožiar spomaľuje prúd pred sebou aj za sebou. Pri rúrovom stožiarom je spomalenie väčšie za stožiarom, kde sa prúd odtŕha; preto sa rotor turbín za stožiarom umiestňuje ďaleko od stožiara [13, čl. 5.7.2]. Pred rúrovým stožiarom s priemerom D_t možno prúd opísať potenciálovým obtekaním valca (superpozícia rovnomerného prúdu a dipólu). Rýchlosť v smere prúdu je [13, rov. (5.21)]

$$U = v_\infty \left(1 - \frac{(D_t/2)^2 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad (10.4)$$

kde x je vzdialenosť pred osou stožiara a y priečna vzdialenosť od nej. Na osi je pomerné spomalenie $(D_t/2x)^2$ a šírka oblasti spomalenia je $2x$; s rastúcou vzdialenosťou x gradient rýchlosti, ktorý lopatka pretína, rýchlo klesá (obr. 10.7) [13, čl. 5.7.2]. Za stožiarom sa spomalenie opisuje empiricky, zvyčajne kosínusovým profilom [13, rov. (5.22)].

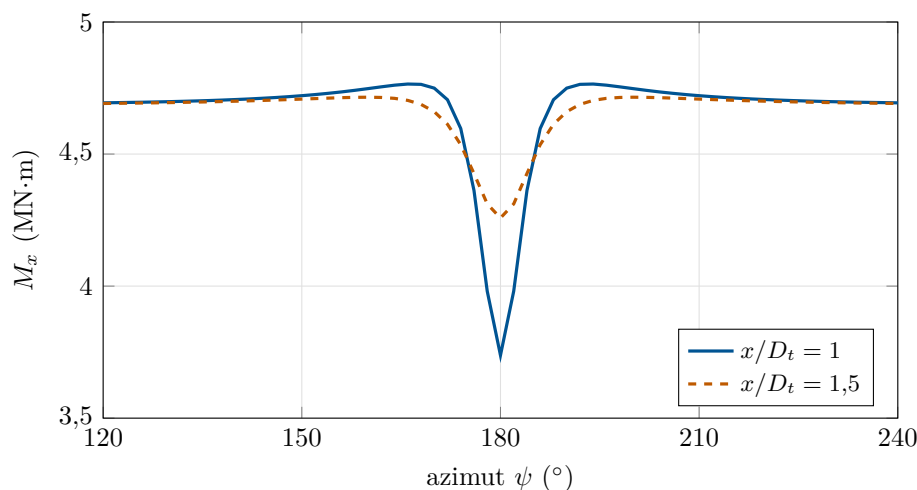


Obr. 10.7. Pomerné spomalenie prúdu pred rúrovým stožiarom podľa (10.4) v rôznej vzdialenosti x pred osou stožiara (vlastný výpočet; porovnaj [13, obr. 5.13]).

Vplyv na lopatku odhadneme tak, že v teórii prvku lopatky nahradíme $v_\infty(1 - a)$ hodnotou $U(1 - a)$ [13, čl. 5.7.2]. Pre modelový rotor pri 8 m/s a predpokladanom priemere stožiara 5 m (konštantnom po výške; zjednodušenie) je výsledok na obr. 10.8. Pri vzdialenosti roviny rotora od osi stožiara $x = D_t$ klesne moment M_x pri prechode lopatky pred stožiarom o 20 %, pri $x = 1,5D_t$ o 9 %. Ostrý pokles zataženia od tieňa stožiara ľahšie vybudí kmitanie lopatky ako plynulé zmeny od strihu vetra, sklonu hriadeľa alebo vybočenia [13, čl. 5.7.2].

10.3.4 Tiaž a odstredivá sila

Tiaž lopatky spôsobuje ohybový moment v rovine rotora, ktorý sa mení sínusovo s azimutom: je najväčší pri vodorovnej polohe lopatky a medzi oboma vodorovnými polohami mení znamienko. Je preto hlavným zdrojom únavového zataženia v rovine rotora [13, čl. 5.7.3]. Najväčší moment od tiaže je $g \int_{r_k}^R m(r)(r - r_k) dr$, kde $m(r)$ je hmotnosť lopatky na jednotku dĺžky. Pre lopatku „TR“ 20-metrového polomeru uvádza [13, čl. 5.7.3] najväčší moment od tiaže 134 kN m, teda rozkmit 268 kN m; zmeny momentu v rovine rotora od vybočenia alebo strihu vetra sú typicky desatinou tejto hodnoty alebo menšie.



Obr. 10.8. Pokles ohybového momentu z roviny rotora pri prechode lopatky pred stožiarom ($\psi = 180^\circ$); modelový rotor pri 8 m/s, $D_t = 5$ m, bez strihu vetra a bez dynamickej odozvy (vlastný výpočet; porovnaj [13, obr. 5.14]).

Odstredivé sily vyvolávajú v lopatke ťahovú silu, ktorá je v reze na polomere r [13, čl. 5.7.4]

$$N_c(r) = \Omega^2 \int_r^R m(r') r' dr'. \quad (10.5)$$

Premenlivé napätia v lopatke sú preto počas prevádzky vždy posunuté do ťahu. Ohyb lopatky po vetre spôsobí, že odstredivé sily vytvárajú moment proti momentu od ťahu a znižujú ho [13, čl. 5.7.4]. Pri zmene smeru osi rotora (natáčanie gondoly) vznikajú aj gyroscopické momenty [13, čl. 5.2.1].

Príklad 10.2: Odstredivá sila v koreni lopatky

Lopatka „TR“ z [13, čl. 5.7.3, 5.7.4] má najväčší moment od tiaže 134 kN m a rotor sa otáča 30 min^{-1} . Odhadnite odstredivú silu v koreni lopatky. Aký je pomer odstredivej sily k tiaži lopatky, ak je jej ťažisko 7 m od osi otáčania?

Riešenie. Najväčší moment od tiaže je gS , kde $S = \int m r dr$ je statický moment hmotnosti lopatky k osi otáčania (koreň lopatky sme tu stotožnili s osou). Odstredivá sila v koreni je $\Omega^2 S$, teda

$$N_c = \frac{\Omega^2}{g} M_g = \frac{(30 \cdot 2\pi/60)^2}{9,81} \cdot 134 = \frac{9,87}{9,81} \cdot 134 \approx 135 \text{ kN}.$$

Hmotnosť lopatky je $S/r_T = (134/9,81)/7 = 1,95 \text{ t}$, tiaž 19,1 kN a pomer $N_c/G \approx 7$. Burton a kol. uvádzajú odstredivú silu 134 kN, približne sedemnásobok tiaže [13, čl. 5.7.4].

10.4 Turbulencia a únavové zaťaženie

10.4.1 Spektrum turbulencie

Turbulencia je zdrojom extrémnych nárazov vetra aj veľkej časti únavového zaťaženia lopatiek [13, čl. 5.3]. Intenzitu turbulencie sme zaviedli v čl. 2.4; frekvenčný obsah fluktuácií opisuje

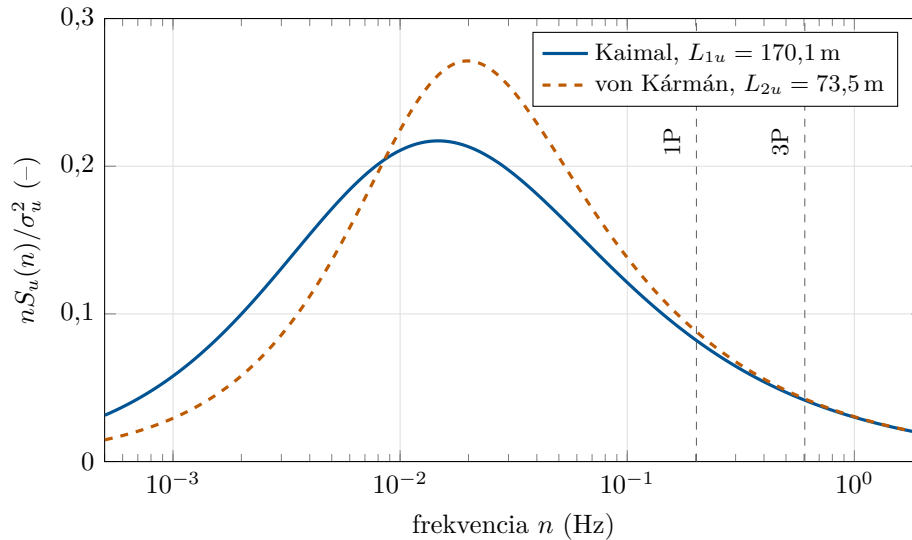
spektrum turbulencie. Pri vysokých frekvenciách musí spektrum podľa Kolmogorovovho zákona klesať úmerne $n^{-5/3}$. Bežne sa používajú dve spektrá pozdĺžnej zložky [13, rov. (2.23), (2.24)]:

$$\text{Kaimalovo: } \frac{nS_u(n)}{\sigma_u^2} = \frac{4nL_{1u}/U}{(1 + 6nL_{1u}/U)^{5/3}}, \quad (10.6)$$

$$\text{von Kármánovo: } \frac{nS_u(n)}{\sigma_u^2} = \frac{4nL_{2u}/U}{[1 + 70,8(nL_{2u}/U)^2]^{5/6}}, \quad (10.7)$$

kde $S_u(n)$ je spektrálna hustota, n frekvencia (Hz) a L_{1u} , L_{2u} dĺžkové mierky; rovnaká asymptota pri vysokých frekvenciách vyžaduje $L_{1u} = 2,329 L_{2u}$. Kaimalovo spektrum lepšie opisuje atmosférickú turbulenciu, von Kármánovo má ostrejšie maximum a používa sa kvôli analytickým vzťahom pre koreláciu [13, čl. 2.6.4]. Vtedajšie vydanie normy IEC 61400-1 odporúčalo pre výšku nad 30 m $L_{1u} = 170,1$ m (Kaimal) alebo $L_{2u} = 73,5$ m (von Kármán) [13, rov. (2.30), (2.31)]; platné vydanie normy uvádza vlastné parametre [14].

Spektrá pri 10 m/s sú na obr. 10.9. Väčšina energie turbulencie je pri frekvenciách pod 0,1 Hz, t. j. v dedoch s periódou dlhšou ako 10 s. Rotor modelovej turbíny sa otáča s frekvenciou 0,2 Hz (1P) a lopatky prechádzajú každou polohou s frekvenciou 0,6 Hz (3P).



Obr. 10.9. Normované spektrá pozdĺžnej zložky turbulencie podľa (10.6) a (10.7) pri $U = 10$ m/s s dĺžkovými mierkami podľa [13, rov. (2.30), (2.31)]; čiarkovane frekvencie 1P a 3P modelovej turbíny pri $12,1 \text{ min}^{-1}$ (vlastný výpočet; porovnaj [13, obr. 2.5]).

10.4.2 Priestorová korelácia a rotačné vzorkovanie

Jednobodové spektrum neopisuje dobre zmeny rýchlosti, ktoré „vidí“ otáčajúca sa lopatka. Lopatka pretína priestorovo premenlivé pole turbulencie, a tým ho „vzorkuje“; preto je dôležitá korelácia fluktuácií v bodoch vzdialených priečne a zvislo. Opisuje ju **koherencia**, ktorá klesá so vzdialenosťou bodov aj s frekvenciou [13, čl. 2.6.6]. Lopatka opakovane pretína lokálny náraz vetra počas niekoľkých otáčok; tento jav zväčšuje únavové zataženie [13, čl. 5.3]. Časť energie turbulencie sa tak v zatažení lopatky presúva z nízkych frekvencií k frekvenciám 1P, 2P, 3P, ... (čl. 8.5).

Turbíny vo veternom parku pracujú v úplave iných turbín so zväčšenou turbulenciou a zmenšenou strednou rýchlosťou. Turbína, ktorá je v úplave len čiastočne, je vystavená vodorovnému

strihu vetra a jej zaťaženie sa analyzuje podobne ako pri strihu vetra [13, čl. 5.3, 5.7.2] (kap. 12).

Príklad 10.3: Kvázistatický odhad premenlivého momentu

Pri strednej rýchlosti 8 m/s je ohybový moment z roviny rotora v koreni lopatky modelového rotora 4,68 MN m a jeho derivácia podľa rýchlosti vetra (obr. 10.5) je $dM_x/dv_\infty \approx 1,17 \text{ MN m/(m/s)}$. Odhadnite smerodajnú odchýlku momentu pre turbulenciu kategórie A podľa modelu normálnej turbulencie (2.11).

Riešenie. $\sigma_1 = 0,16 (0,75 \cdot 8 + 5,6) = 1,86 \text{ m/s}$. Ak predpokladáme, že fluktuácia rýchlosti pôsobí naraz na celú lopatku a lopatka reaguje kvázistaticky (bez dynamiky), je

$$\sigma_M \approx \frac{dM_x}{dv_\infty} \sigma_1 = 1,17 \cdot 1,86 = 2,2 \text{ MN m},$$

t. j. takmer polovica strednej hodnoty. Odhad je horným odhadom: fluktuácie nie sú po celej ploche rotora úplne korelované (koherencia s frekvenciou a vzdialenosťou klesá) a riadenie otáčok a natáčania lopatiek zaťaženie čiastočne tlmí. Presnejší výpočet vyžaduje simuláciu turbulentného vetra a dynamickej odozvy turbíny [13, čl. 5.8, 5.9].

10.4.3 Spektrum únavového zaťaženia

Úplné spektrum únavového zaťaženia sa skladá zo spektier pre prevádzku pri rôznych rýchlostiach vetra a z cyklov pri rozbehu, bežnom a núdzovom odstavení a pri zastavenom rotore. Najprv sa určí počet cyklov jednotlivých rozkmitov napätia za hodinu prevádzky v danej triede rýchlosti vetra, potom sa vynásobí počtom hodín prevádzky v tejto triede za životnosť. Podľa IEC 61400-1 sa počet hodín určuje z Rayleighovho rozdelenia so strednou rýchlosťou podľa triedy turbíny [13, čl. 5.5.1] (čl. 2.5).

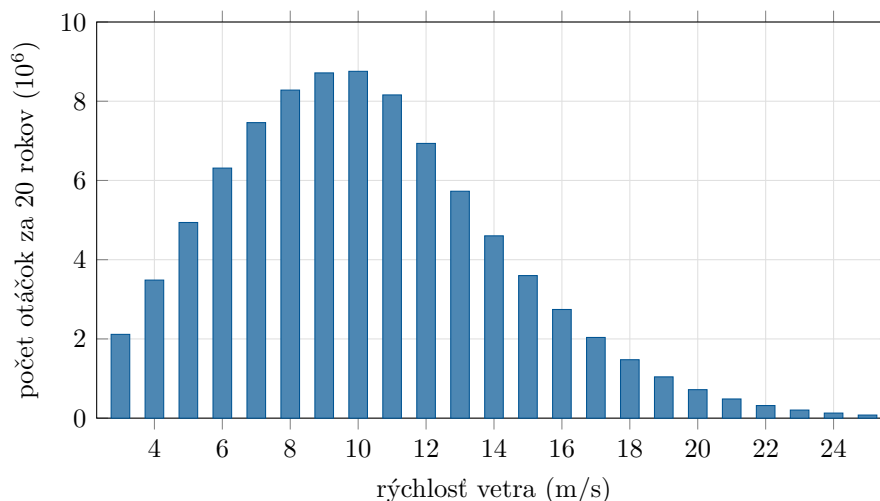
Ako ilustráciu uvádzame počet otáčok modelového rotora za 20 rokov v jednotlivých triedach rýchlosti vetra pre Rayleighovo rozdelenie so strednou rýchlosťou 8,5 m/s (trieda II) (obr. 10.10). Každá otáčka znamená jeden cyklus momentu od tiaže a jeden cyklus od strihu vetra. Spolu je to $8,8 \cdot 10^7$ otáčok; najviac pripadá na rýchlosti 8 m/s až 11 m/s, kde je rotor často a otáča sa rýchlo.

10.5 Extrémne zaťaženie

10.5.1 Zastavený rotor v extrémnom vetre

Pre zastavený alebo voľne sa otáčajúci rotor sa za návrhovú rýchlosť vetra zvyčajne berie náraz vetra s dobou opakovania 50 rokov. Norma IEC 61400-1 v znení opísanom v [13, čl. 5.4.1] ho definuje ako trojsekundový náraz s veľkosťou 1,4-násobku referenčnej rýchlosti V_{ref} (tab. 2.4). Treba uvažovať aj výpadok siete, pri ktorom systém natáčania gondoly nemôže sledovať zmeny smeru vetra [13, čl. 5.4.1].

Najväčšie zaťaženie zastavenej lopatky pôsobí kolmo na rovinu lopatky, keď vietor prúdi kolmo na lopatku (najväčší odpor), alebo pod uhlom 12° až 16° k rovine lopatky, keď je uhol nábehu blízko maxima vztlaku [13, čl. 5.6.1]. Merania dali súčiniteľ odporu lopatky pri prúdení kolmo na ňu 1,24 až 1,25; dánska norma DS 472 predpisuje najmenej 1,3. Najväčší súčiniteľ vztlaku zriedka prekročí 1,6, na hrubších vnútorných prierezoch klesá až na 1,1 [13,



Obr. 10.10. Počet otáčok modelového rotora za 20 rokov v triedach rýchlosti vetra šírky 1 m/s (Rayleighovo rozdelenie, $\bar{v} = 8,5$ m/s, otáčky podľa obr. 9.11; vlastný výpočet).

čl. 5.6.1]. Keďže najväčší súčiniteľ vztlaču je spravidla väčší ako súčiniteľ odporu, rozhodujúce je obtekanie pri maximálnom vztlaču; pri turbíne s natáčaním lopatiek (lopatky v prúde) na to stačí, aby vietor zvieral s osou gondoly uhol približne 10° až 20° [13, čl. 5.6.2]. Kmitanie lopatky vybudené turbulenciou zväčšuje zaťaženie nad kvázistatickú hodnotu; rozhodujúci je útlm, ktorý je pri zastavenom rotore malý [13, čl. 5.6.3].

Príklad 10.4: Zataženie zastavenej lopatky

Modelová lopatka (tab. 7.3) má pôdorysnú plochu 203 m^2 s ťažiskom na polomere 33,3 m. Turbína je triedy I ($V_{\text{ref}} = 50 \text{ m/s}$). Odhadnite silu a ohybový moment v koreni lopatky ($r_k = 9,45 \text{ m}$) pri prúdení kolmo na lopatku ($c_D = 1,3$) v nárazoch vetra s dobou opakovania 50 rokov. Porovnajte s prevádzkovým zatažením.

Riešenie. $V_{e50} = 1,4 \cdot 50 = 70 \text{ m/s}$, dynamický tlak $q = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 70^2 = 3001 \text{ Pa}$. Sila na lopatku

$$F = q c_D A = 3001 \cdot 1,3 \cdot 203 = 793 \text{ kN},$$

ohybový moment v koreni $M = F (33,3 - 9,45) = 793 \cdot 23,9 = 18,9 \text{ MN m}$. To je viac ako dvojnásobok najväčšieho momentu počas prevádzky v ustálenom vetre (8,94 MN m). Pri obtekaní s maximálnym vztlakom ($c_L = 1,5$ až $1,6$) by bolo zataženie ešte o 15 až 23 % väčšie; výpočet predpokladá rovnomerný tlak po celej dĺžke lopatky a nezahŕňa dynamickú odozvu ani čiastkové súčinitele spoľahlivosti.

10.5.2 Zataženie stožiara

Ťah rotora pôsobí na stožiar vo výške osi rotora a spolu s odporom samotného stožiara určuje ohybový moment v päte stožiara. Pre extrémne zataženie stožiara sú rozhodujúce prípady so zastaveným rotorom v extrémnom vetre aj prevádzkové prípady s veľkým ťahom [13, čl. 5.12].

Príklad 10.5: Ohybový moment v päte stožiaru

Odhadnite ohybový moment v päte stožiaru modelovej turbíny od ťahu rotora pri menovitej rýchlosti vetra (788 kN); výška osi rotora je 90 m.

Riešenie. $M = T z_{hub} = 788 \cdot 90 = 70\,900 \text{ kN m} \approx 71 \text{ MN m}$. K tomu treba pripočítať moment od odporu stožiaru a gondoly, moment od excentricity hmotnosti gondoly a rotora a dynamické účinky turbulencie. Pri regulácii natáčaním lopatiek je ťah rotora pri menovitej rýchlosti vetra najväčší (obr. 9.11).

Zhrnutie**Zhrnutie kapitoly**

- Zdroje zaťaženia: aerodynamické, tiažové, zotrvačné a prevádzkové. Časovo: ustálené, periodické (deterministické) a stochastické.
- Konštrukcia sa overuje na medzné zaťaženie (kombinácie normálnych/extrémnych podmienok a stavov stroja) a na únavu.
- Z metódy BEM dostaneme F_x , F_y po lopatke a integráciou ohybové momenty; sila kolmo na rovinu rotora rastie takmer lineárne s polomerom.
- Pri regulácii natáčaním lopatiek je ohybový moment v koreni lopatky aj ťah rotora najväčší pri menovitej rýchlosti vetra.
- Strih vetra, vybočenie, sklon hriadeľa a tieň stožiaru spôsobujú periodické zaťaženie 1P; tiaž je hlavným zdrojom únavy v rovine rotora; odstredivá sila napína lopatku.
- Turbulenciu opisuje spektrum (Kaimal, von Kármán) a koherencia; rotačné vzorkovanie presúva zaťaženie k frekvenciám nP .
- Zastavená lopatka v náraze vetra s dobou opakovania 50 rokov môže byť zaťažená viac ako pri prevádzke.

Kontrolné otázky

1. Aké sú zdroje zaťaženia veternej turbíny?
2. Čím sa líši deterministická a stochastická zložka zaťaženia?
3. Aké kombinácie veterných podmienok a stavov stroja sa uvažujú pri medznom zaťažení?
4. Prečo je dimenzovanie mnohých častí turbíny určené únavou?
5. Ako sa z výsledkov metódy BEM určí ohybový moment v koreni lopatky?
6. Prečo je pri regulácii natáčaním lopatiek ohybový moment v koreni najväčší pri menovitej rýchlosti vetra?
7. Ako vplýva strih vetra na zaťaženie lopatky? Prečo je vplyv pri natočených lopatkách väčší?

8. Opíšte model tieňa stožiara pred rúrovým stožiarom. Ako súvisí pokles zataženia so vzdialenosťou rotora od stožiara?
9. Aké zataženie spôsobuje tiaž lopatky a aké odstredivá sila?
10. Čo vyjadruje spektrum turbulencie? V čom sa líši Kaimalovo a von Kármánovo spektrum?
11. Čo je rotačné vzorkovanie a prečo zväčšuje únavové zataženie?
12. Pri akom obtekaní je zastavená lopatka zatažená najviac?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Úloha 10.1. Koľkokrát sa otočí rotor s otáčkami $12,1 \text{ min}^{-1}$ za 20 rokov, ak by sa otáčal nepretržite? Porovnajte s obr. 10.10.

(Výsledok: $1,27 \cdot 10^8$; skutočne asi $8,8 \cdot 10^7$ – rotor nepracuje stále pri najväčších otáčkach)

Úloha 10.2. Pri strihu vetra s $\alpha = 0,2$ a výške osi 90 m vypočítajte pomer rýchlosti vetra v mieste konca lopatky ($R = 63 \text{ m}$) v hornej a dolnej polohe k rýchlosti v osi rotora.

(Výsledok: 1,112 a 0,786)

Úloha 10.3. Aké je pomerné spomalenie prúdu na osi stožiara vo vzdialenosti $x = 1,2 D_t$ pred jeho osou? Aká je šírka oblasti spomalenia pri $D_t = 4 \text{ m}$?

(Výsledok: 0,174; 9,6 m)

Úloha 10.4. Lopatka s hmotnosťou 17 t má ťažisko 20 m od osi otáčania. Vypočítajte najväčší moment od tiaže (k osi otáčania) a odstredivú silu pri 12 min^{-1} .

(Výsledok: $M_g = 3,34 \text{ MN m}$; $N_c = 537 \text{ kN}$)

Úloha 10.5. Vypočítajte hodnotu normovaného Kaimalovho spektra (10.6) pri frekvencii 1P modelovej turbíny ($n = 0,2 \text{ Hz}$) pre $U = 10 \text{ m/s}$ a $L_{1u} = 170,1 \text{ m}$.

(Výsledok: $nS_u/\sigma_u^2 \approx 0,082$)

Úloha 10.6. Pri akej frekvencii má Kaimalovo spektrum (10.6) maximum pre $U = 10 \text{ m/s}$ a $L_{1u} = 170,1 \text{ m}$? (Návod: maximum funkcie $x/(1+6x)^{5/3}$ je pri $x = 1/4$.)

(Výsledok: $n = U/(4L_{1u}) \approx 0,0147 \text{ Hz}$)

Úloha 10.7. Odhadnite silu na zastavenú lopatku z čl. 10.5.1 pre turbínu triedy III ($V_{\text{ref}} = 37,5 \text{ m/s}$).

(Výsledok: $F \approx 445 \text{ kN}$)

Úloha 10.8. Porovnajte moment v päte stožiara od ťahu rotora pri menovitej rýchlosti vetra (čl. 10.5.2) s momentom od síl na tri zastavené lopatky podľa čl. 10.5.1, ak by pôsobili vo výške osi rotora.

(Výsledok: 71 MN m a $3 \cdot 793 \cdot 90 \approx 214 \text{ MN m}$ – tri lopatky však nemôžu byť naraz v polohe kolmej na vietor)

Kapitola 11

Turbíny so zvislou osou rotácie

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- opísať hlavné typy turbín so zvislou osou a ich výhody a nevýhody,
- určiť relatívnu rýchlosť a uhol nábehu lopatky H-rotora v závislosti od azimutu,
- vysvetliť, prečo sa krútiaci moment lopatky počas otáčky mení a prečo majú tieto turbíny problém s rozbehom,
- vypočítať súčiniteľ výkonu H-rotora metódou jednej prúdovej trubice a opísať metódu viacerých prúdových trubíc,
- vypočítať normálovú a tangenciálnu silu lopatky a vysvetliť rozdiel medzi náveternou a záveternou polovicou otáčky podľa metódy DMST,
- opísať požiadavky na profily lopatiek turbín so zvislou osou,
- porovnať turbíny so zvislou a vodorovnou osou.

Turbíny so zvislou osou (angl. *vertical axis wind turbine*, *VAWT*) sme predstavili v čl. 1.3 (obr. 1.2). Hoci v minulosti prevládali turbíny s vodorovnou osou, turbíny so zvislou osou sa v niektorých aplikáciách používali a používajú. Táto kapitola sleduje najmä [3, čl. 3.14].

11.1 Typy turbín so zvislou osou

Turbíny so zvislou osou môžu byť poháňané odporom alebo vztlakom [3, čl. 3.14.1]:

- *Odporové* – najrozšírenejší je **rotor Savonius**. Používal sa na čerpanie vody a v iných aplikáciách s veľkým krútiacim momentom. Je lacný na výrobu, ale ako odporové zariadenie má principiálne malý súčiniteľ výkonu (čl. 1.3.2), plnosť blízku 1, takže je veľmi ťažký v pomere k výkonu, a ťažko sa chráni pred poškodením pri silnom vetre.
- *Vztlakové* – na výrobu elektriny sa takmer vždy používali vztlakové rotory s priamymi lopatkami (**H-rotor**) alebo so zakrivenými lopatkami v tvare *troposkein* (**rotor Darrieus**). Niektoré rotory s priamymi lopatkami mali mechanizmus natáčania lopatiek, väčšina však má lopatky pevné a výkon pri silnom vetre sa obmedzuje stallom.

Hlavnou výhodou turbín so zvislou osou je, že nepotrebujú mechanizmus natáčania do vetra; lopatky sú spravidla neskrútené s konštantnou tetivou, takže sa dajú vyrábať hromadne, napr. pretláčaním [3, čl. 3.14.1]. Generátor a prevodovka môžu byť pri zemi a rotor môže priamo poháňať pevne uložený spotrebič [27]. Turbíny so zvislou osou sa však nerozšírili tak ako turbíny s vodorovnou osou [3, čl. 3.14.1]:

- zaťaženie lopatiek sa počas každej otáčky výrazne mení, čo spôsobuje veľké únavové poškodenie a vyžaduje veľkú životnosť lopatiek a spojov,
- rotor sa nehodí na umiestnenie na samostatný vysoký stožiar; veľká časť rotora je preto blízko zeme v oblasti slabšieho vetra a výroba môže byť menšia ako pri turbíne s vodorovnou osou s rovnakým menovitým výkonom na vyššom stožiar.

Ďalšími nevýhodami sú neschopnosť samostatného rozbehu a relatívne menšia účinnosť [27]. Väčšina vztlakových turbín so zvislou osou sa preto používa v malých aplikáciách [27]. Pre podrobnejšie informácie o rotoroch Darrieus odkazujú Manwell a kol. na prácu Paraschivoiu (2002) a súhrn výskumu v Sandia National Laboratories [3].

11.2 Kinematika H-rotora

Uvažujme H-rotor s polomerom R , výškou H a N priamymi lopatkami so symetrickým profilom a tetivou c . Tetiva je kolmá na polomer, t.j. dotýka sa kružnice otáčania; poloha lopatky je daná uhlom φ medzi polomerom a smerom vetra (obr. 11.1) [3, čl. 3.14.2]. Vektor je v rotore spomalený na $v_\infty(1-a)$. Relatívna rýchlosť má zložku rovnobežnú s tetivou $\Omega R + (1-a)v_\infty \sin \varphi$ a zložku kolmú na tetivu $(1-a)v_\infty \cos \varphi$, takže [3, rov. (3.146), (3.147)]

$$\frac{W}{v_\infty} = \sqrt{[\lambda + (1-a) \sin \varphi]^2 + [(1-a) \cos \varphi]^2}, \quad \lambda = \frac{\Omega R}{v_\infty}, \quad (11.1)$$

a uhol nábehu je [3, rov. (3.149)]

$$\alpha = \arctan \frac{(1-a) \cos \varphi}{\lambda + (1-a) \sin \varphi} \approx \frac{(1-a) \cos \varphi}{\lambda}. \quad (11.2)$$

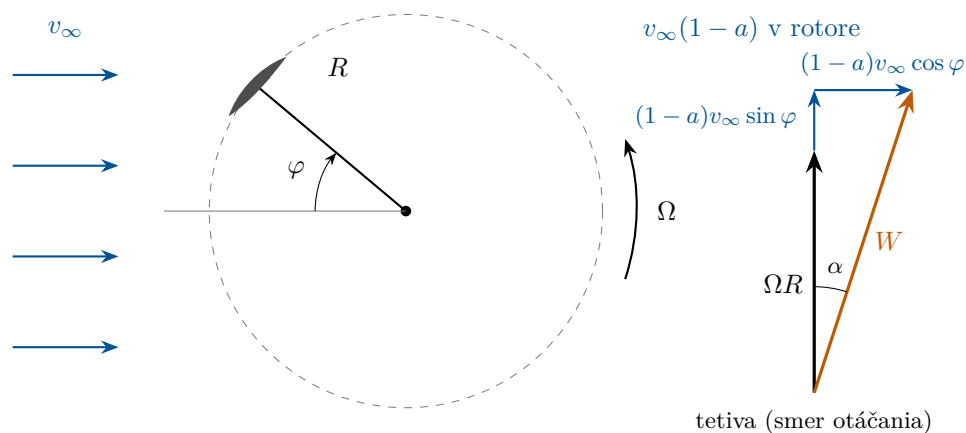
Približný tvar platí pri veľkej rýchlobežnosti [3, rov. (3.150)].

Z (11.2) vidno podstatný rozdiel oproti turbíne s vodorovnou osou: uhol nábehu lopatky sa počas otáčky mení približne sínusovo medzi $+\alpha_{\max}$ na náveternej strane ($\varphi \approx 0$) a $-\alpha_{\max}$ na záveternej strane ($\varphi \approx 180^\circ$), s amplitúdou približne $(1-a)/\lambda$ (obr. 11.2). Pri polohách $\varphi = \pm 90^\circ$, keď sa lopatka pohybuje v smere vetra alebo proti nemu, prechádza uhol nábehu nulou. Profily lopatiek rotorov Darrieus – bežne NACA 0012, 0015 a 0018 – sú navrhnuté na uhly nábehu menšie ako približne $\pm 10^\circ$; pri väčších uhloch nastáva stall [27]. Pri malej rýchlobežnosti je amplitúda uhla nábehu veľká a lopatka prechádza stallom.

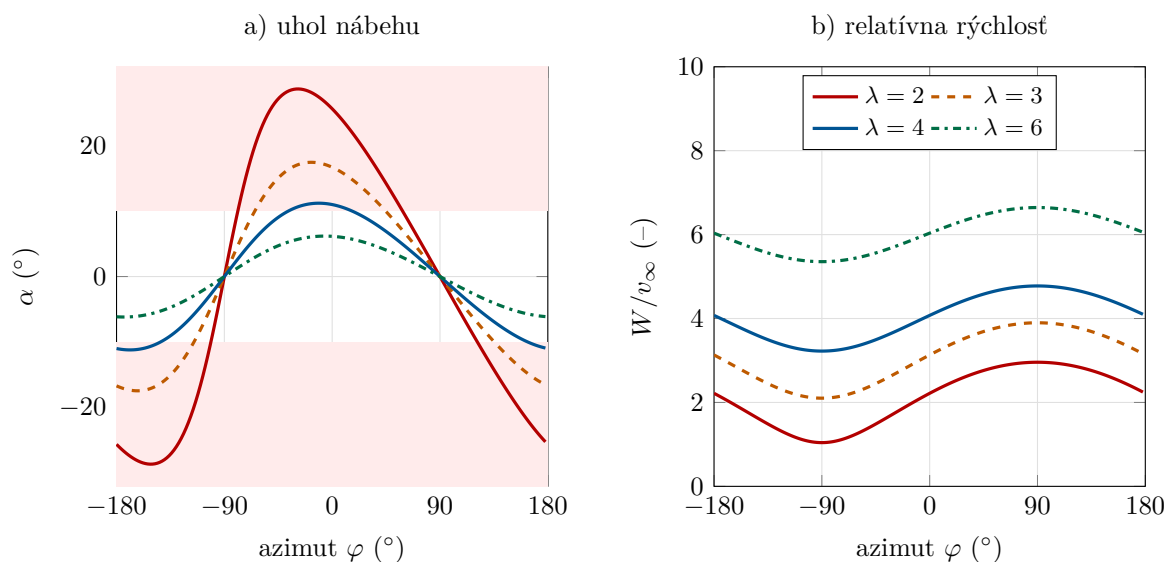
Príklad 11.1: Uhol nábehu lopatky H-rotora

H-rotor pracuje pri $\lambda = 4$ s indukčným faktorom $a = 0,224$. Vypočítajte uhol nábehu a pomernú relatívnu rýchlosť lopatky pri $\varphi = 0, 90^\circ, 180^\circ$ a -90° .

Riešenie. $1-a = 0,776$. Pri $\varphi = 0$: $\alpha = \arctan(0,776/4) = 10,98^\circ$, $W/v_\infty = \sqrt{4^2 + 0,776^2} = 4,08$. Pri $\varphi = 180^\circ$ je $\cos \varphi = -1$: $\alpha = -10,98^\circ$, $W/v_\infty = 4,08$. Pri $\varphi = 90^\circ$ sa zložka vetra sčíta s obvodovou rýchlosťou: $\alpha = 0$, $W/v_\infty = 4 + 0,776 = 4,78$;



Obr. 11.1. Geometria H-rotora pri pohľade zhora a zložky relatívnej rýchlosti lopatky (schematicky, podľa [3, obr. 3.36, 3.37]). Poloha $\varphi = 0$ je na náveternej strane rotora, $\varphi = 180^\circ$ na záveternej.



Obr. 11.2. Uhol nábehu a relatívna rýchlosť lopatky H-rotora počas otáčky podľa (11.1) a (11.2); indukčný faktor a z metódy jednej prúdovej trubice pre $Nc/R = 0,15$ (vlastný výpočet). Vyznačená oblasť $|\alpha| > 10^\circ$ zodpovedá stallu bežných profilov.

pri $\varphi = -90^\circ$ sa odčíta: $\alpha = 0$, $W/v_\infty = 3,22$. Približný vzťah (11.2) dáva $\alpha \approx 0,776/4 = 0,194 \text{ rad} = 11,1^\circ$. Uhol nábehu kmitá s amplitúdou takmer 11° – na hranici stallu bežných profilov.

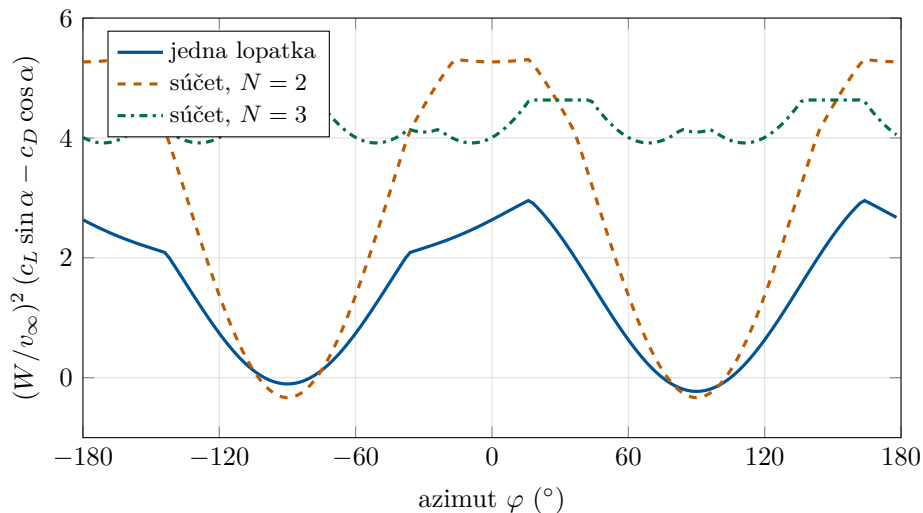
11.3 Sily a krútiaci moment

Tangenciálna sila na jednotku dĺžky lopatky, ktorá vytvára krútiaci moment, je [3, rov. (3.160)]

$$F_T = \frac{1}{2} \rho W^2 c (c_L \sin \alpha - c_D \cos \alpha), \quad (11.3)$$

krútiaci moment rotora s N lopatkami výšky H je $Q = N H F_T R$ a stredný výkon sa počíta z krútiaceho momentu spriemerovaného cez otáčku [3, rov. (3.159)–(3.162)]. Na náveternej strane sú α aj c_L kladné, na záveternej obe záporné, takže súčin $c_L \sin \alpha$ je kladný v oboch polovičkách otáčky – lopatka koná prácu dvakrát za otáčku [27]. V polohách, kde je uhol nábehu nulový (pri našom označení $\varphi = \pm 90^\circ$), je tangenciálna sila daná len odporom, teda záporná [27].

Krútiaci moment jednej lopatky sa preto počas otáčky silno mení (obr. 11.3). Pri viacerých lopatkách sa zmeny čiastočne vyrovnávajú: pri dvoch lopatkách sa výkyvy sčítavajú (maximá oboch lopatiek nastávajú súčasne), pri troch sa kmitanie momentu výrazne zmenší. Aj pri ustálenom vetre lopatka vytvára premenlivý krútiaci moment [27], čo je zdrojom únavového zataženia (čl. 11.1).

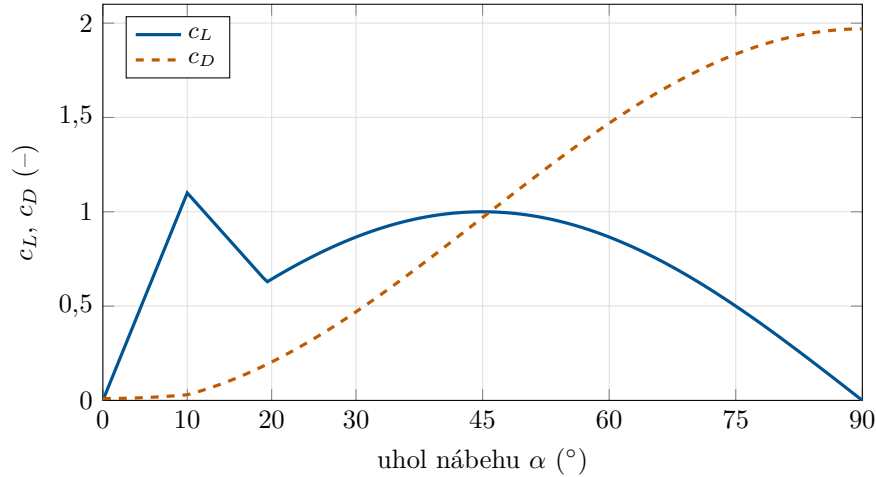


Obr. 11.3. Bezrozmerná tangenciálna sila (úmerná krútiacemu momentu) lopatky H-rotora počas otáčky a súčet pre dve a tri lopatky; $\lambda = 4$, $Nc/R = 0,15$, modelová charakteristika symetrického profilu (vlastný výpočet metódou jednej prúdovej trubice).

Pri výpočtoch v tejto kapitole používame ilustratívnu modelovú charakteristiku symetrického profilu: pre $|\alpha| \leq 10^\circ$ $c_L = 0,11 \alpha$ (v stupňoch) a $c_D = 0,01 + 0,0002 \alpha^2$; za stallom vztlak klesá a pri veľkých uhloch nábehu sa charakteristika blíži rovinnej doske ($c_L \approx c_D$ pri 45° , $c_L = 0$ pri 90° , porovnaj [3, čl. 3.4.4.3]), pozri obr. 11.4. Charakteristika nezodpovedá konkrétnemu profilu; pre záporné uhly nábehu je $c_L(-\alpha) = -c_L(\alpha)$ a $c_D(-\alpha) = c_D(\alpha)$.

Okrem tangenciálnej sily pôsobí na lopatku aj **normálová sila** v smere kolmom na tetivu, t. j. v radiálnom smere rotora. Jej súčiniteľ a súčiniteľ tangenciálnej sily sú [27, rov. (2), (3)]

$$C_N = c_L \cos \alpha + c_D \sin \alpha, \quad C_T = c_L \sin \alpha - c_D \cos \alpha. \quad (11.4)$$



Obr. 11.4. Ilustratívna modelová charakteristika symetrického profilu použitá vo výpočtoch H-rotora (nezodpovedá konkrétnemu profilu).

Pri malých uhloch nábehu je $C_N \approx c_L$, a teda normálová sila je oveľa väčšia ako tangenciálna. Keďže c_L mení počas otáčky znamienko, mení smer aj normálová sila: na náveternej strane pôsobí do rotora, na záveternej von z rotora (priebeh je na obr. 11.11b). Výsledná relatívna rýchlosť prichádza vždy z náveternej strany lopatky – na náveternej polovici otáčky z vonkajšej strany lopatky, na záveternej z vnútornej [27].

Príklad 11.2: Súčinitele síl lopatky

Lopátka s modelovým profilom z obr. 11.4 ($c_L = 0,11\alpha$, $c_D = 0,01 + 0,0002\alpha^2$, α v stupňoch) pracuje pri uhle nábehu 8° . Vypočítajte C_N a C_T .

Riešenie. $c_L = 0,88$, $c_D = 0,0228$. Podľa (11.4)

$$C_N = 0,88 \cos 8^\circ + 0,0228 \sin 8^\circ = 0,875, \quad C_T = 0,88 \sin 8^\circ - 0,0228 \cos 8^\circ = 0,0999.$$

Normálová sila je asi 8,8-krát väčšia ako tangenciálna. Odpor zmenšil C_T asi o 18 % (0,0226 z 0,1225), C_N ovplyvnil zanedbateľne.

11.4 Metóda jednej prúdovej trubice

Najjednoduchší model (de Vries, 1979) nahrádza rotor jednou prúdovou trubicou [3, čl. 3.14.2.1]. Podobne ako pri akčnom disku sa predpokladá, že rýchlosť vo vzdialenej úplave je $v_\infty(1 - 2a)$ a v rotore $v_\infty(1 - a)$. Hmotnostný prietok na jednotku výšky je $\rho 2Rv_\infty(1 - a)$, zmena rýchlosti $2av_\infty$ a sila na jednotku výšky v smere vetra [3, rov. (3.154)]

$$F_D = 4R\rho a(1 - a)v_\infty^2. \quad (11.5)$$

Táto sila sa musí rovnať priemernej sile na všetky lopatky počas otáčky podľa teórie prvku lopatky. Porovnaním dostaneme [3, rov. (3.156)]

$$a(1 - a) = \frac{1}{8} \frac{Nc}{R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{W}{v_\infty} \right)^2 c_L \cos(\alpha + \varphi) d\varphi, \quad (11.6)$$

ktorá sa rieši iteračne. Súčiniteľ výkonu je vzťahovaný na priemet rotora $2RH$ [3, rov. (3.163), (3.164)]:

$$c_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho 2RH v_\infty^3} = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{Nc}{R} \int_0^{2\pi} \left(\frac{W}{v_\infty} \right)^2 (c_L \sin \alpha - c_D \cos \alpha) d\varphi. \quad (11.7)$$

Parameter Nc/R vyjadruje plnosť rotora.

11.4.1 Približné riešenie

Pri veľkej rýchlobežnosti a malých uhloch nábehu (lineárna časť charakteristiky $c_L = c_{L\alpha}\alpha$, konštantný odpor c_{D0}) dostaneme [3, rov. (3.170), (3.173)]

$$a \approx \frac{1}{16} \frac{Nc}{R} c_{L\alpha} \lambda, \quad c_P \approx 4a(1-a)^2 - \frac{1}{2} \frac{Nc}{R} c_{D0} \lambda^3. \quad (11.8)$$

Bez odporu je maximum c_P pri $a = 1/3$ a rovná sa Betzovmu limitu $16/27$ – H-rotor má teda rovnaký teoretický limit ako turbína s vodorovnou osou; rovnako platí aj obmedzenie $a < 0,5$ [3, čl. 3.14.2.1]. Z (11.8) je vidieť, že indukčný faktor je úmerný súčinu plnosti a rýchlobežnosti; optimálne zaťaženie ($a = 1/3$) sa pri väčšej plnosti dosiahne pri menšej rýchlobežnosti. Straty odporom rastú s λ^3 .

Príklad 11.3: Približné riešenie pre H-rotor

Odhadnite indukčný faktor a súčiniteľ výkonu H-rotora s $Nc/R = 0,15$ pri $\lambda = 4$ podľa (11.8), ak $c_{L\alpha} = 0,11 \text{ deg}^{-1} = 6,30 \text{ rad}^{-1}$ a $c_{D0} = 0,01$. Porovnajte s numerickým riešením (11.6) a (11.7) s modelovou charakteristikou ($a = 0,224$, $c_P = 0,422$).

Riešenie.

$$a \approx \frac{1}{16} \cdot 0,15 \cdot 6,30 \cdot 4 = 0,236,$$

$$c_P \approx 4 \cdot 0,236 \cdot 0,764^2 - \frac{1}{2} \cdot 0,15 \cdot 0,01 \cdot 4^3 = 0,551 - 0,048 = 0,503.$$

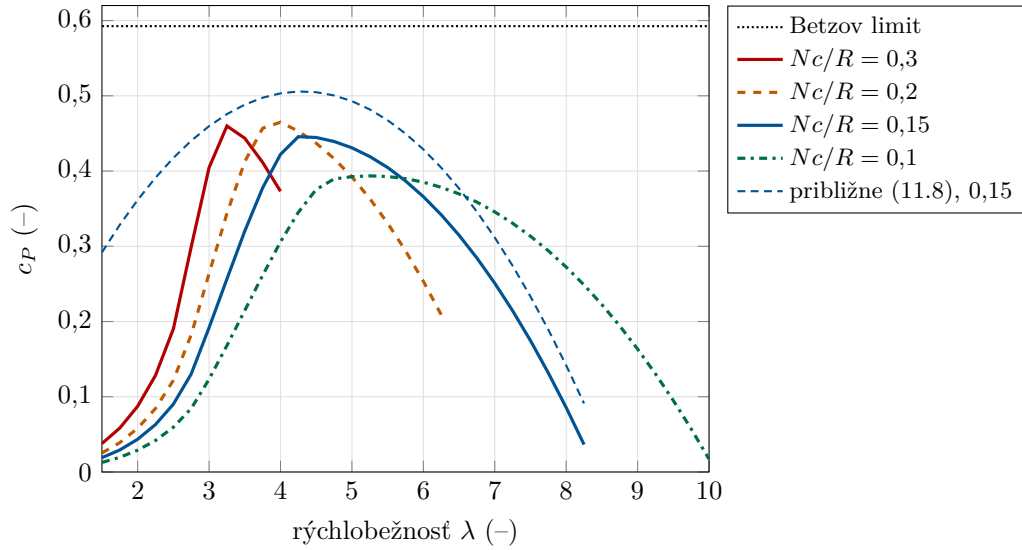
Indukčný faktor sa od numerického riešenia líši o 5 %, súčiniteľ výkonu je však o 19 % väčší: pri amplitúde uhla nábehu okolo 11° (čl. 11.2) sa lopatka dostáva do stallu a odpor je podstatne väčší ako c_{D0} . Približné vzťahy sú vhodné na rýchly odhad pri veľkej rýchlobežnosti.

Výsledky pre modelovú charakteristiku profilu sú na obr. 11.5. Väčšia plnosť posúva maximum c_P k menšej rýchlobežnosti (pre $Nc/R = 0,1; 0,15; 0,2; 0,3$ pri $\lambda = 5,25; 4,25; 4,0; 3,25$); podobne ako pri turbíne s vodorovnou osou (čl. 9.6). Pri malej rýchlobežnosti c_P prudko klesá, lebo lopatky pracujú v stalle. Približné riešenie (11.8) nadhodnocuje výkon, lebo nezahŕňa rast odporu s uhlom nábehu ani stall.

Vypočítané hodnoty $c_{P,\max}$ 0,39 až 0,47 treba chápať ako horný odhad: model neuvažuje konečné rozpätie lopatiek, odpor ramien a stožiara rotora ani dynamický stall a vplyv úplavy náveternej polovice rotora na zátveternú.

11.5 Metódy viacerých prúdových trubíc

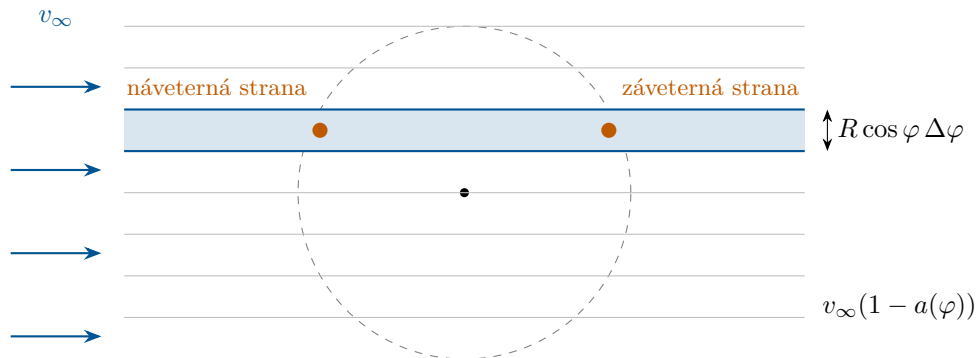
Metóda viacerých prúdových trubíc (angl. *multiple stream tube*) predpokladá, že indukčný faktor sa môže meniť v smere kolmom na vietor, ale v smere vetra je konštantný. Rotor sa rozdelí na prúdové trubice rovnobežné s vetrom; trubica šírky $R \cos \varphi \Delta\varphi$ je lopatkou



Obr. 11.5. Súčiniteľ výkonu H-rotora podľa metódy jednej prúdovej trubice pre rôznu plnosť; krivky končia tam, kde by bolo $a > 0,5$. Tenká čiarkovaná krivka je približné riešenie (11.8) pre $Nc/R = 0,15$ a $c_{D0} = 0,01$ (vlastný výpočet s modelovou charakteristikou profilu).

pretínaná dvakrát za otáčku – na náveternej a na záveternej strane (obr. 11.6) [3, čl. 3.14.2.2]. Porovnaním hybnostného vzťahu pre trubicu s teóriou prvku lopatky dostaneme pre každú trubicu [3, rov. (3.178)]

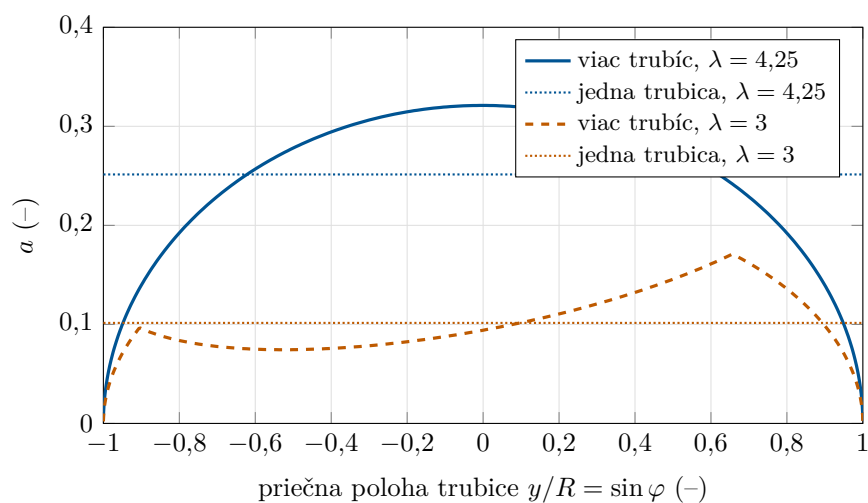
$$a(1-a) = \frac{1}{4\pi} \frac{Nc}{R} \left(\frac{W}{v_\infty} \right)^2 c_L \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\cos \varphi}. \quad (11.9)$$



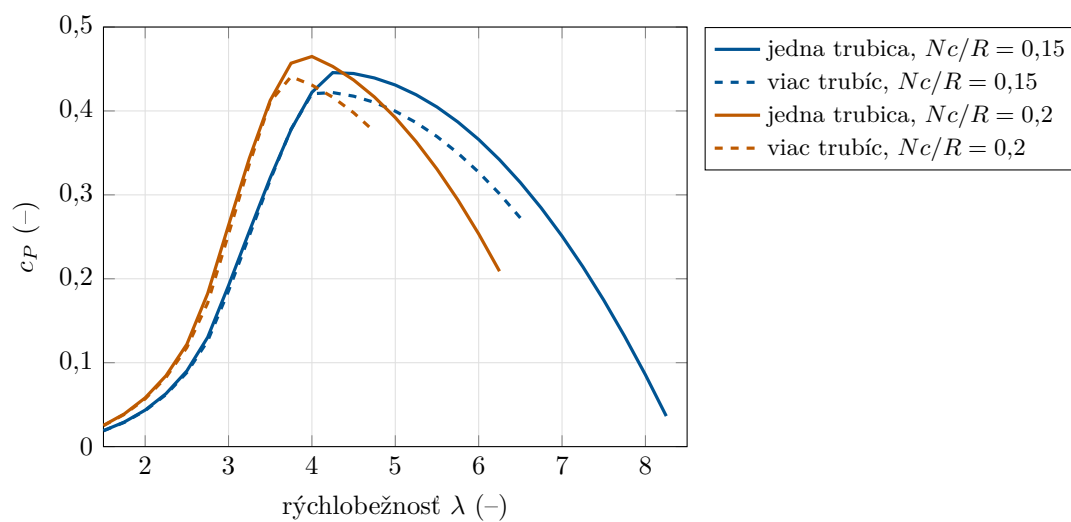
Obr. 11.6. Metóda viacerých prúdových trubíc: každá trubicu má vlastný indukčný faktor a lopatka ju pretína dvakrát za otáčku (schematicky, podľa [3, obr. 3.38]).

Rozšírením je **metóda dvojitého viacerých prúdových trubíc** (angl. *double multiple stream tube, DMST*), v ktorej indukčné faktory na náveternej a záveternej strane nemusia byť rovnaké. Na nej sú založené simulačné modely turbín so zvislou osou z Sandia National Laboratories [3, čl. 3.14.2.3] (čl. 11.6); metódu DMST s Prandtlovou korekciou strát na konci lopatky používajú aj novšie práce [27]. Rotor Darrieus sa analyzuje rovnakými metódami, lopatka sa však delí na prvky s rôznou vzdialenosťou od osi a rôznym sklonom [3, čl. 3.14.3].

Porovnanie metódy jednej trubice a viacerých trubíc je na obr. 11.8: metóda viacerých trubíc dáva menší $c_{P,max}$ (pre $Nc/R = 0,15$ hodnotu 0,422 oproti 0,446), lebo indukčný faktor je v strede rotora väčší ako na okrajoch (obr. 11.7); rotor teda odoberá energiu nerovnomerne.



Obr. 11.7. Rozloženie axiálneho indukčného faktora po šírke H-rotora ($Nc/R = 0,15$) podľa metódy viacerých trubíc a hodnota podľa metódy jednej trubice (vlastný výpočet).



Obr. 11.8. Súčiniteľ výkonu H-rotora podľa metódy jednej a viacerých prúdových trubíc (vlastný výpočet podľa (11.6), (11.7) a (11.9)).

Príklad 11.4: Malý H-rotor

Trojlopatkový H-rotor má polomer 5 m, výšku 10 m a tetivu 0,25 m. Vypočítajte plnosť Nc/R , otáčky pri optimálnej rýchlobežnosti $\lambda = 4,25$, výkon pri 8 m/s (s $c_P = 0,422$ podľa metódy viacerých trubíc) a Reynoldsovo číslo lopatky ($\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

Riešenie. $Nc/R = 3 \cdot 0,25/5 = 0,15$. $\Omega = \lambda v_\infty / R = 4,25 \cdot 8/5 = 6,8 \text{ rad/s}$, t. j. 65 min^{-1} . Priemet rotora $2RH = 100 \text{ m}^2$ a

$$P = c_P \frac{1}{2} \rho 2RH v_\infty^3 = 0,422 \cdot 0,5 \cdot 1,225 \cdot 100 \cdot 8^3 = 13,2 \text{ kW}.$$

Relatívna rýchlosť je približne $\Omega R = 34 \text{ m/s}$ a $Re = 34 \cdot 0,25/(1,5 \cdot 10^{-5}) \approx 5,7 \cdot 10^5$ – podstatne menej ako pri veľkých turbínach s vodorovnou osou; charakteristiky profilu treba použiť pre toto Reynoldsovo číslo (kap. 4).

11.6 Metóda dvojitéch viacerých prúdových trubíc

Metóda viacerých trubíc predpokladá, že lopatka spomaľuje vzduch v trubici na náveternej aj záveternej strane rovnako. V skutočnosti vzduch prichádza k záveternej polovici rotora už spomalený náveternou polovicou. Metóda DMST, ktorú vyvinul Paraschivoiu, preto nahrádza každú trubicu dvoma akčnými diskami za sebou: náveterným a záveterným [27]. Rýchlosť medzi nimi – **rovnovážna rýchlosť** V_e – zodpovedá rýchlosti vo vzdialenej úplave náveterného disku [27]:

$$V_e = v_\infty (1 - 2a_u), \quad (11.10)$$

kde a_u je indukčný faktor náveterného disku. Pre záveterný disk je V_e voľným prúdom; rýchlosť na záveternej strane je $V_e(1 - a_d)$ a miestna rýchlobežnosť $\Omega R/V_e$ je väčšia ako λ .

Rovnice pre jednotlivé disky dostaneme z (11.9) s tým rozdielom, že každý disk pretína lopatka len raz za otáčku, preto sa pravá strana zmenší na polovicu (odvodenie (11.9) predpokladá rovnakú silu pri oboch prechodoch [3, čl. 3.14.2.2]):

$$a_u(1 - a_u) = \frac{1}{8\pi} \frac{Nc}{R} \left(\frac{W}{v_\infty} \right)^2 c_L \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{|\cos \varphi|}, \quad a_d(1 - a_d) = \frac{1}{8\pi} \frac{Nc}{R} \left(\frac{W}{V_e} \right)^2 c_L \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{|\cos \varphi|}, \quad (11.11)$$

prvá pre náveterný azimut trubice, druhá pre záveterný azimut $180^\circ - \varphi$ s uhlom nábehu a relatívnou rýchlosťou počítanými z rýchlosti $V_e(1 - a_d)$. Postup výpočtu: najprv sa iteratívne určí a_u pre všetky trubice, z neho V_e a potom a_d [27]. Pri našom výpočte sme pre veľké zaťaženie ($a > 0,326$) nahradili ľavú stranu rovníc empirickým vzťahom (8.13) z kap. 8; pri optimálnej rýchlobežnosti sa to však neprejaví.

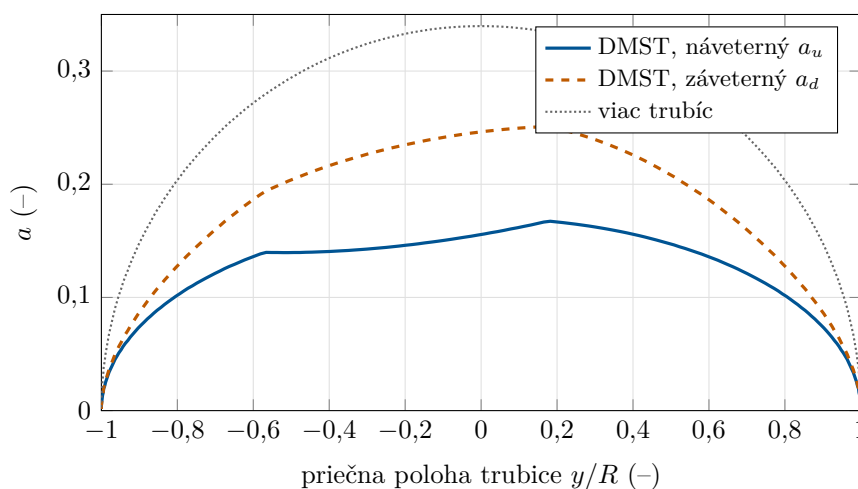
Príklad 11.5: Stredná trubica podľa metódy DMST

H-rotor s $Nc/R = 0,15$ a modelovým profilom pracuje pri $\lambda = 4,5$. Výpočet (vlastný) pre strednú trubicu ($\varphi = 0^\circ$ a 180°) dal $a_u = 0,1556$ a $a_d = 0,2463$. Určte rovnovážnu rýchlosť, rýchlosť na záveternej strane a v úplave a miestnu rýchlobežnosť záveternej polovice.

Riešenie. Podľa (11.10) $V_e/v_\infty = 1 - 2 \cdot 0,1556 = 0,689$. Rýchlosť na záveternej strane je $V_e(1 - a_d)/v_\infty = 0,689 \cdot (1 - 0,2463) = 0,519$ a v úplave $V_e(1 - 2a_d)/v_\infty = 0,35$. Záveterná polovica pracuje s miestnou rýchlobežnosťou $\lambda/(V_e/v_\infty) = 4,5/0,689 = 6,53$, teda pri menších uhloch nábehu: vlastný výpočet dáva na náveternej strane $\alpha = 10,6^\circ$,

na záveternej $\alpha = -6,6^\circ$. Hoci je $a_d > a_u$, záveterný disk odoberá energiu zo vzduchu, ktorý už má len asi 33 % ($0,689^3$) pôvodného toku energie.

Rozloženie indukčných faktorov po šírke rotora je na obr. 11.9. Náveterný faktor je asi polovičný oproti metóde viacerých trubíc, lebo ho vytvára len polovica prechodov lopatky; záveterný je väčší, pretože záveterná polovica pracuje pri väčšej miestnej rýchlobežnosti. Súčiniteľ výkonu podľa metódy DMST (obr. 11.10) má maximum 0,435 pri $\lambda \approx 4,7$, teda podobnú hodnotu ako metóda viacerých trubíc (0,422 pri $\lambda = 4,25$), ale pri väčšej rýchlobežnosti. Podstatný je rozdiel v rozdelení výkonu: pri $\lambda = 4,5$ vzniká na náveternej polovici 70 % výkonu a s rastúcou rýchlobežnosťou podiel záveternej polovice klesá, až je jej príspevok pri $\lambda \approx 6,6$ záporný. Priebeh uhla nábehu, tangenciálnej a normálovej sily lopatky počas otáčky (obr. 11.11) je preto nesymetrický – na záveternej strane sú uhly nábehu aj sily menšie. Podobnú nesymetriu uhla nábehu ukazujú aj výpočty metódou DMST v [27].

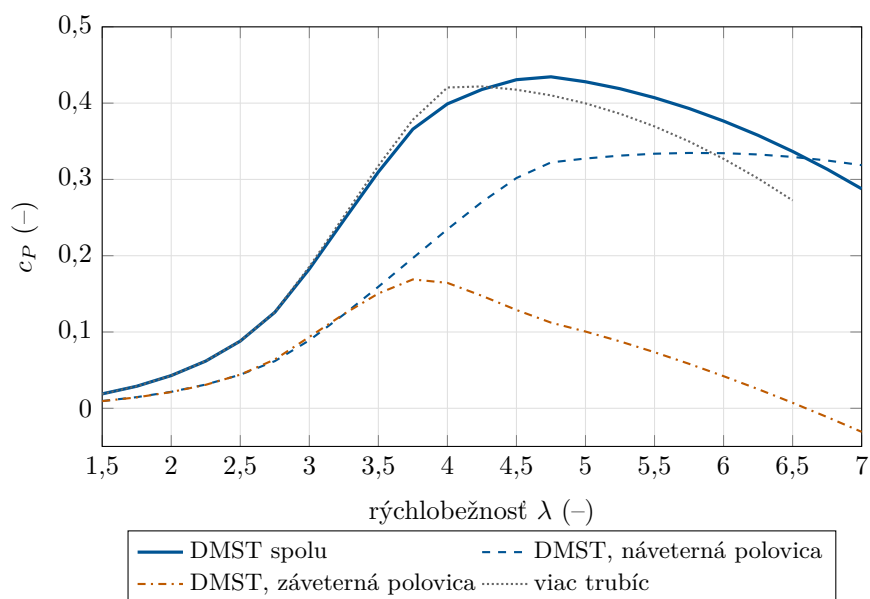


Obr. 11.9. Indukčné faktory náveterného a záveterného disku podľa metódy DMST a indukčný faktor podľa metódy viacerých trubíc; H-rotor s $Nc/R = 0,15$ pri $\lambda = 4,5$ (vlastný výpočet).

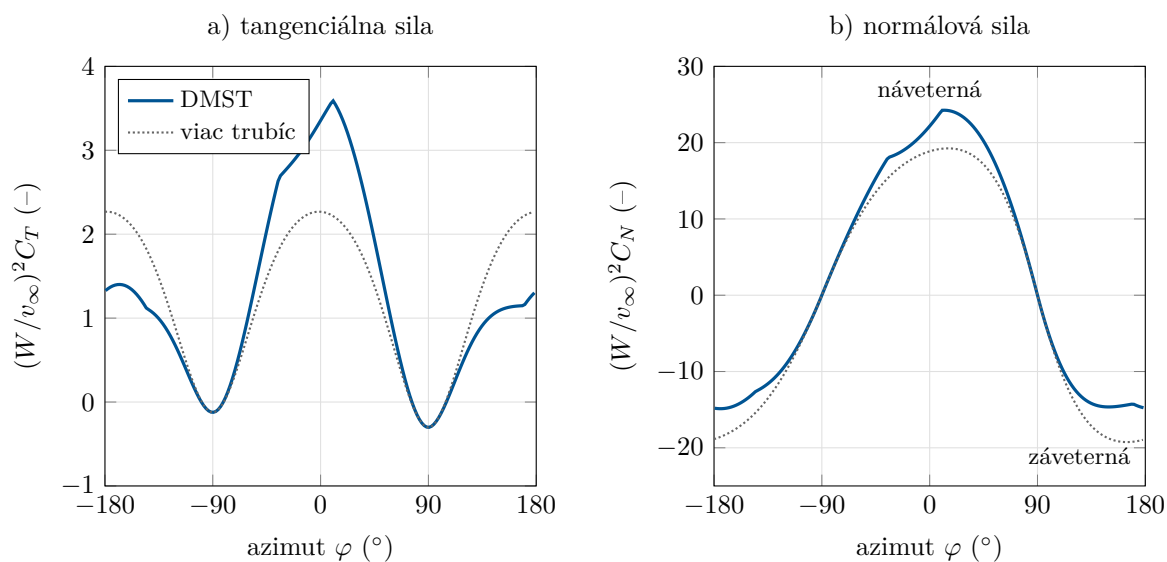
11.7 Rozbeh, dynamický stall a natáčanie lopatiek

Pri rozbehu je obvodová rýchlosť nulová, uhol nábehu je veľký a profil je v stalle. Tlakový odpor lopatky je taký veľký, že vztlak ho neprekoná a rotor sa sám nerozbehne, nehovoriac o zatažení generátorom [27]. Riešením sú napr. väčšia plnosť (zväčší rozbehový moment, ale zmenší $c_{P,max}$ a zúži prevádzkový rozsah), nesymetrické profily, hybridné rotory s odporovým rotorom Savonius v strede alebo cyklické natáčanie lopatiek počas otáčky [27]. Pri cyklickom natáčaní sa uhol nastavenia lopatky mení s azimutom tak, aby uhol nábehu zostal pod stallom; Zhao a kol. uvádzajú napr. zvýšenie najväčšieho c_P modelového rotora o 18,9 % pri optimálnej rýchlobežnosti (výpočet metódou DMST) [27].

Kedže sa uhol nábehu aj relatívna rýchlosť počas otáčky výrazne menia, je **dynamický stall** (čl. 8.5) prirodzenou vlastnosťou turbín so zvislou osou. Na sacej strane sa tvorí vír pri nábežnej hrane; dynamický stall spôsobuje kmitanie konštrukcie, hluk a zníženie účinnosti [28]. Podľa prác citovaných v [28] dynamický stall výrazne znižuje výkon pri rýchlobežnosti menšej ako 3, v ktorej turbíny so zvislou osou často pracujú. Podľa CFD simulácie H-rotora trvá dynamický stall v intervale azimutu približne 60° až 80° v závislosti od rýchlobežnosti [28]. Lopatka na záveternej strane navyše pracuje v úplave náveternej strany.



Obr. 11.10. Súčiniteľ výkonu H-rotora s $Nc/R = 0,15$ podľa metódy DMST a jeho rozdelenie na návětrnú a závětrnú polovicu otáčky; pre porovnanie metóda viacerých trubíc (vlastný výpočet).



Obr. 11.11. Bezrozmerná tangenciálna a normálová sila jednej lopatky počas otáčky (H-rotor, $Nc/R = 0,15$, $\lambda = 4,5$; vlastný výpočet). Návětrná polovica je v okolí $\varphi = 0^\circ$, závětrná v okolí $\pm 180^\circ$. Sila na jednotku dĺžky lopatky je $\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 c$ krát uvedená hodnota.

11.8 Profily pre turbíny so zvislou osou

Požiadavky na profil lopatky H-rotora sa líšia od požiadaviek pri turbíne s vodorovnou osou. Uhol nábehu sa počas otáčky mení medzi kladnými a zápornými hodnotami, ľahko vzniká dynamický stall a turbíny so zvislou osou pracujú spravidla pri malých Reynoldsových číslach [29]. Profil by preto mal mať dobré charakteristiky v širokom rozsahu kladných aj záporných uhlov nábehu a pri malom Re .

Pre turbíny so zvislou osou sa často používali symetrické profily NACA 00XX (napr. NACA 0012, 0015, 0018), ktoré zlepšujú súčiniteľ výkonu, ale neumožňujú spoľahlivý samočinný rozbeh; pri malých Reynoldsových číslach sa problém s rozbehom zhoršuje [29]. Porovnania viacerých profilov ukázali, že vhodne prehnuté profily môžu súčiniteľ výkonu zvýšiť alebo rozšíriť prevádzkový rozsah. Pri väčšej rýchlobežnosti sa však aerodynamické vlastnosti turbíny s rastúcou hrúbkou a prehnutím profilu zhoršujú, preto sa odporúča stredná hrúbka a stredné prehnutie [29]. Profilmi pre turbíny so zvislou osou sa rozsiahle zaoberali napr. Sandia National Laboratories a Natural Resources Canada; DTU navrhla veľmi hrubé profily (s hrúbkou 25 % a 26,2 %), pri ktorých sa okrem aerodynamiky zohľadnila aj tuhosť lopatky [29].

Príkladom je profil LUT navrhnutý optimalizáciou pre H-rotory [29]. Má hrúbku 20,77 % a prehnutie 1,11 % tetivy, pričom miesto najväčšieho prehnutia je blízko odtokovej hrany. Pri meraní v aerodynamickom tuneli dosiahol pri $Re = 3 \cdot 10^5$ najväčší súčiniteľ vztlatku 1,47 (pri 14°) a najväčší pomer vztlatku k odporu 64,4 (pri 10°), pri $Re = 5 \cdot 10^5$ hodnoty 1,5 a 79,8. Profil má široký rozsah uhlov nábehu s malým odporom ($-10^\circ < \alpha < 10^\circ$) a mierny priebeh stallu, čo sú pre pohyb lopatky H-rotora žiaduce vlastnosti [29].

Príklad 11.6: Reynoldsovo číslo počas otáčky

Pre H-rotor z čl. 11.5 ($R = 5$ m, $c = 0,25$ m, $\lambda = 4,25$, $v_\infty = 8$ m/s) odhadnite rozsah Reynoldsových čísel lopatky počas otáčky. Pre odhad zanedbajte spomalenie prúdu na okrajoch rotora.

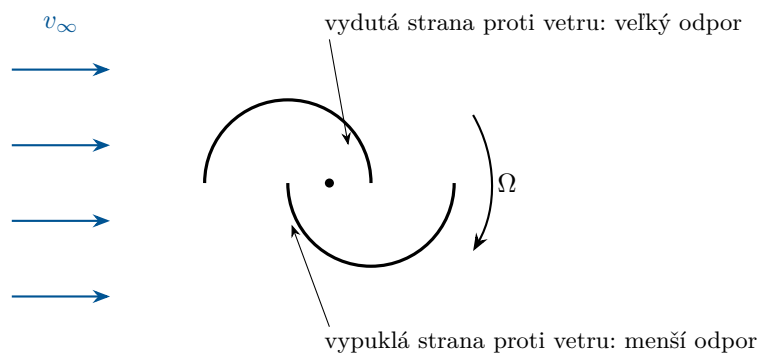
Riešenie. Podľa (11.1) s $a = 0$ je relatívna rýchlosť najväčšia pri $\varphi = 90^\circ$ a najmenšia pri $\varphi = -90^\circ$: $W/v_\infty = \lambda \pm 1$, t.j. W od $3,25 \cdot 8 = 26$ m/s po $5,25 \cdot 8 = 42$ m/s. Reynoldsovo číslo $Re = Wc/\nu$ sa mení od

$$\frac{26 \cdot 0,25}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 4,3 \cdot 10^5 \quad \text{po} \quad \frac{42 \cdot 0,25}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 7,0 \cdot 10^5.$$

Lopatka teda pracuje v oblasti, pre ktorú boli merané aj charakteristiky profilu LUT; s meniacim sa Re sa počas otáčky menia aj charakteristiky profilu.

11.9 Rotor Savonius

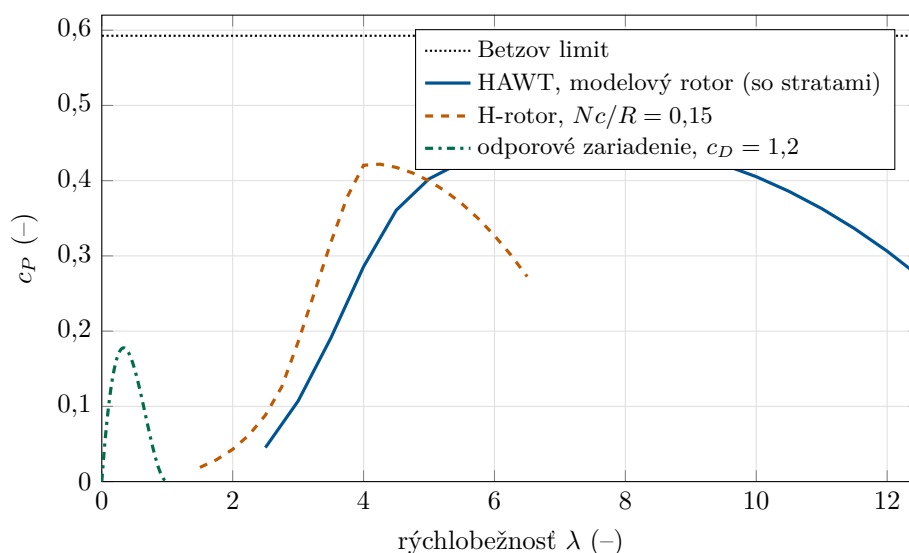
Rotor Savonius má pri pohľade zhora prierez v tvare písmena S (obr. 1.2a). Je to prevažne odporové zariadenie, hoci k výkonu môže prispievať aj vztlak. Výkon vzniká z rozdielu tlakov na lopatke, ktorá sa od vetra vzdaluje, a na lopatke, ktorá sa proti vetru pohybuje, t.j. z rozdielu súčiniteľov odporu vypuklej a vydutej strany. Rotory Savonius majú spravidla malú účinnosť, hoci namerané súčinitele výkonu dosiahli takmer 0,30 (Blackwell a kol., 1977); maximum c_P je vždy pri rýchlobežnosti menšej ako 1 [3, čl. 3.14.4]. Pre porovnanie: idealizované odporové zariadenie z čl. 1.3.2 dosahuje najviac $\frac{4}{27}c_D$ pri pomere rýchlostí $1/3$.



Obr. 11.12. Princíp rotora Savonius (pohľad zhora; schematicky, kvalitatívne podľa opisu v [3, čl. 3.14.4]). Krútiaci moment vzniká z rozdielu odporu lopatiek na oboch stranách osi.

11.10 Porovnanie s turbínou s vodorovnou osou

Na obr. 11.13 sú porovnané charakteristiky modelového trojlopatkového rotora s vodorovnou osou (kap. 8), H-rotora s plnosťou $Nc/R = 0,15$ (metóda viacerých trubíc) a idealizovaného odporového zariadenia s $c_D = 1,2$ (čl. 1.3.2). Pri porovnaní treba pamätať, že výsledky pre H-rotor sú horným odhadom (čl. 11.4), kým pri turbíne s vodorovnou osou sú zahrnuté straty na konci a pri koreni lopatky. H-rotor dosahuje maximum pri menšej rýchlobežnosti a jeho krivka je užšia; pri rýchlobežnosti okolo 2 až 3 je jeho výkon malý v dôsledku stallu.



Obr. 11.13. Porovnanie súčiniteľa výkonu modelového rotora s vodorovnou osou, H-rotora a idealizovaného odporového zariadenia (vlastný výpočet; pre odporové zariadenie je $\lambda = u/v$ podľa (1.3)).

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Turbíny so zvislou osou sú odporové (Savonius) alebo vztlakové (Darrieus, H-rotor). Nepotrebnú natáčanie do vetra, majú však premenlivé zaťaženie lopatiek, problém s rozbehom a rotor blízko zeme.
- Uhol nábehu lopatky H-rotora sa mení s azimutom, $\alpha \approx (1 - a) \cos \varphi / \lambda$; pri malej rýchlobežnosti lopatka prechádza stallom.
- Lopatka koná prácu na náveternej aj záveternej strane; krútiaci moment jednej lopatky sa počas otáčky silno mení.
- Metóda jednej prúdovej trubice: $a(1 - a)$ z rovnováhy sily v smere vetra, c_P vzťahovaný na priemet $2RH$; teoretický limit je Betzov $16/27$.
- Metóda viacerých trubíc a DMST zohľadňujú nerovnomerný indukčný faktor; DMST aj rozdiel medzi náveternou a záveternou stranou.
- Normálová sila ($C_N \approx c_L$) je oveľa väčšia ako tangenciálna a dvakrát za otáčku mení smer.
- Metóda DMST nahrádza trubicu dvoma diskami za sebou; záveterná polovica pracuje v spomalenom prúde $V_e = v_\infty(1 - 2a_u)$ a pri optimálnej rýchlobežnosti dáva menšiu časť výkonu.
- Dynamický stall je vlastnosťou turbín so zvislou osou a pri $\lambda < 3$ výrazne znižuje výkon.
- Profily pre turbíny so zvislou osou musia dobre pracovať pri kladných aj záporných uhloch nábehu a malom Re ; symetrické profily NACA 00XX sťažujú rozbeh, odporúča sa stredná hrúbka a prehnutie.

Kontrolné otázky

1. Aké typy turbín so zvislou osou poznáte? Čím sa líšia?
2. Aké sú výhody a nevýhody turbín so zvislou osou?
3. Ako sa mení uhol nábehu lopatky H-rotora počas otáčky?
4. Prečo lopatka H-rotora vytvára krútiaci moment na náveternej aj záveternej strane?
5. Prečo je tangenciálna sila pri $\varphi = \pm 90^\circ$ záporná?
6. Prečo sa vztlakové turbíny so zvislou osou ťažko rozbiehajú?
7. Opíšte metódu jednej prúdovej trubice. Na akú plochu sa vzťahuje súčiniteľ výkonu?
8. Aký je teoretický limit c_P H-rotora a prečo?
9. V čom sa líši metóda viacerých trubíc a metóda DMST?

10. Prečo je dynamický stall pre turbíny so zvislou osou dôležitejší ako pre turbíny s vodorovnou osou?
11. Čo je rovnovážna rýchlosť v metóde DMST? Prečo záveterná polovica rotora dáva menej výkonu?
12. Prečo je normálová sila na lopatku H-rotora oveľa väčšia ako tangenciálna a ako sa mení počas otáčky?
13. Aké vlastnosti by mal mať profil lopatky H-rotora?
14. Na akom princípe pracuje rotor Savonius a aký súčiniteľ výkonu dosahuje?

Úlohy

Ak nie je uvedené inak, uvažujte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

Úloha 11.1. Aká je amplitúda uhla nábehu lopatky H-rotora pri $\lambda = 2, 3$ a 6 , ak zanedbáme indukciu ($a = 0$)? Použite presný vzťah (11.2) pri $\varphi = 0$.

(Výsledok: $26,6^\circ$; $18,4^\circ$; $9,5^\circ$)

Úloha 11.2. Pri akej najmenej rýchlobežnosti je amplitúda uhla nábehu (pri $a = 0,2$ a $\varphi = 0$) menšia ako 10° ?

(Výsledok: $\lambda > 0,8 / \tan 10^\circ = 4,54$)

Úloha 11.3. Podľa približného vzťahu (11.8) určte, pri akej rýchlobežnosti dosiahne H-rotor s $Nc/R = 0,2$ a $c_{L\alpha} = 6,3 \text{ rad}^{-1}$ optimálne zaťaženie $a = 1/3$.

(Výsledok: $\lambda \approx 4,2$)

Úloha 11.4. Vypočítajte podľa (11.8) súčiniteľ výkonu pri $a = 1/3$, $Nc/R = 0,2$, $c_{D0} = 0,01$ a $\lambda = 4,2$.

(Výsledok: $c_P \approx 0,593 - 0,074 = 0,519$)

Úloha 11.5. Aký priemer by musel mať rotor s vodorovnou osou, aby mal rovnakú plochu ako priemet H-rotora z čl. 11.5? Aký by bol jeho výkon pri 8 m/s s $c_P = 0,45$?

(Výsledok: $D = 11,3 \text{ m}$; $P \approx 14,1 \text{ kW}$)

Úloha 11.6. H-rotor z čl. 11.5 pracuje s konštantnými otáčkami 65 min^{-1} . Aká je rýchlobežnosť pri 5 m/s a 12 m/s ? V akej oblasti charakteristiky (obr. 11.8) rotor pracuje?

(Výsledok: $6,8$ a $2,8$; pri 12 m/s v oblasti stallu)

Úloha 11.7. Idealizované odporové zariadenie má $c_D = 1,2$. Aký je jeho najväčší súčiniteľ výkonu? Porovnajte s nameranou hodnotou pre rotor Savonius.

(Výsledok: $0,178$; merané hodnoty pre Savonius až takmer $0,30$ – rotor nie je čisto odporové zariadenie)

Úloha 11.8. Lopatka H-rotora pracuje pri uhle nábehu -5° so súčiniteľmi $c_L = -0,55$ a $c_D = 0,015$. Vypočítajte C_N a C_T podľa (11.4). Na ktorej polovici otáčky sa lopatka nachádza?

(Výsledok: $C_N \approx -0,549$; $C_T \approx 0,0330$; na záveternej)

Úloha 11.9. V trubici H-rotora je náveterný indukčný faktor $a_u = 0,15$. Aká je rovnovážna rýchlosť pri $v_\infty = 10$ m/s a miestna rýchlobežnosť záveternej polovice pri $\lambda = 4,5$? Aký podiel pôvodného toku kinetickej energie má vzduch pred záveterným diskom?

(Výsledok: $V_e = 7$ m/s; 6,43; 0,343)

Úloha 11.10. Podľa obr. 11.10 určte, aký podiel výkonu H-rotora vzniká na záveternej polovici pri $\lambda = 3$ a pri $\lambda = 5$.

(Výsledok: približne polovica (0,094/0,183); asi 24 % (0,101/0,428))

Úloha 11.11. H-rotor s polomerom 2 m a tetivou 0,12 m pracuje pri $\lambda = 3$ a $v_\infty = 6$ m/s. V akom rozsahu sa počas otáčky mení Reynoldsovo číslo lopatky (indukciu zanedbajte, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ m²/s)?

(Výsledok: Re od $9,6 \cdot 10^4$ po $1,9 \cdot 10^5$)

Kapitola 12

Úplav, veterné parky a pokročilé metódy

Ciele kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

- opísať štruktúru úplavy za turbínou a mechanizmus jej obnovy,
- vypočítať rýchlosť v úplave podľa Jensenovho (Katičovho) modelu a skladať úplavy viacerých turbín,
- odhadnúť zvýšenie intenzity turbulencie v úplave,
- vysvetliť straty vo veternom parku a ich závislosť od rozostupov turbín,
- vymenovať pokročilé metódy výpočtu aerodynamiky turbín a posúdiť ich výhody a obmedzenia v porovnaní s metódou BEM.

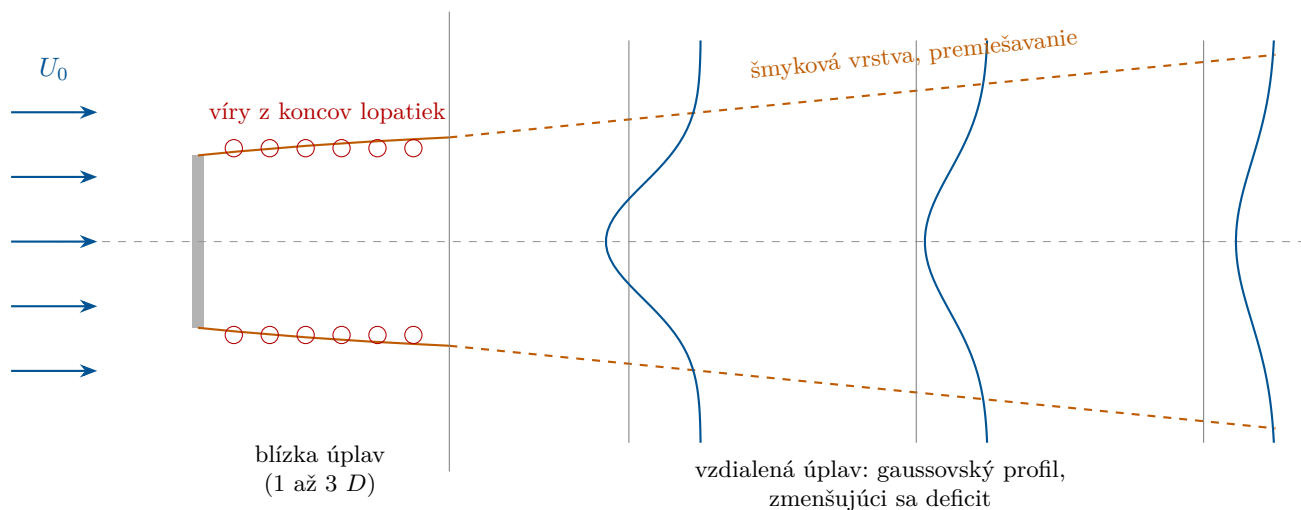
Turbíny sa zvyčajne stavajú v skupinách – veterných parkoch. Turbína za sebou zanecháva úplavu s menšou rýchlosťou a väčšou turbulenciou; turbína v úplave inej turbíny vyrába menej energie a je viac namáhaná [13, čl. 2.10]. V tejto kapitole opíšeme úplavu a jednoduché modely na výpočet strát v parku a na záver prehľad metód, ktoré dopĺňajú alebo nahrádzajú metódu BEM.

12.1 Úplav za turbínou

Hneď za turbínou možno úplav hrubo opísať ako oblasť zmenšenej rýchlosti s priemerom o niečo väčším ako rotor. Zmenšenie rýchlosti priamo súvisí so súčiniteľom ťahu, lebo ten určuje hybnosť odobratú prúdu [13, čl. 2.10] (kap. 5). Rozdiel rýchlosti medzi úplavou a okolitým prúdom vytvára šmykovú vrstvu, v ktorej vzniká turbulencia. Tá prenáša hybnosť z okolitého prúdu do úplavy; oblasť premiešavania sa šíri dovnútra k osi úplavy aj von, takže úplav sa rozširuje a jej rýchlostný deficit sa znižuje, až sa prúd ďaleko za turbínou obnoví. Rýchlosť obnovy závisí od intenzity okolitej turbulencie [13, čl. 2.10].

Okrem turbulencie vznikajúcej v šmykovej vrstve vytvára turbína aj „mechanickú“ turbulenciu – víry z koncov lopatiek a poruchy od lopatiek, gondoly a stožiara. Táto zložka má pomerne vysoké frekvencie a rýchlo zaniká [13, čl. 2.10]. Každá lopatka vytvára vírovú plochu, ktorú spolu so silnými vírmi z koncov lopatiek a vírmi pri náboji unáša stredné axiálne a ro-

tačné prúdenie; v **blízkej úplave** (angl. *near wake*), t.j. do vzdialenosti jedného až troch priemerov rotora, sa tieto víry premiešajú a rozptýlia a väčšina periodickosti prúdenia sa stratí [3, čl. 3.13.2]. Vo **vzdialenej úplave** (angl. *far wake*) je rozloženie rýchlosti osovo symetrické s gaussovským priečnym profilom a jeho vývoj dobre opisujú modely turbulentnej viskozity, napr. Ainslieho [13, čl. 2.10]. Víry z koncov lopatiek vytvárajú vo vzdialenej úplave prstenec so zvýšenou turbulentnosťou okolo menej turbulentného jadra [3, čl. 3.13.2] (obr. 12.1).



Obr. 12.1. Štruktúra úplavy za turbínou (schematicky; podľa opisu v [13, čl. 2.10] a [3, čl. 3.13.2]). Modrou priečne profily rýchlosti vo vzdialenej úplave.

12.2 Jensenov (Katičov) model úplavy

Na výpočet strát vo veterných parkoch sa používajú modely rôznej zložitosti [3, čl. 9.4.2.2]: modely drsnosti povrchu (park sa správa ako zmena drsnosti terénu), poloempirické modely úplavy jednotlivých turbín (Lissaman, Vermeulen, Katić), modely turbulentnej viskozity (Ainslie; Smith a Taylor) a úplné riešenie Navierových–Stokesových rovníc. Najjednoduchší a často používaný je poloempirický model Katića a kol. (1986), v literatúre známy aj ako Jensenov model [3, čl. 9.4.2.2]. Predpokladá úplav, ktorá sa lineárne rozširuje a má po priereze rovnomerný rýchlostný deficit, ktorý s vzdialenosťou klesá (obr. 12.2). Priemer úplavy vo vzdialenosti X za rotorom je

$$D_X = D + 2kX, \quad (12.1)$$

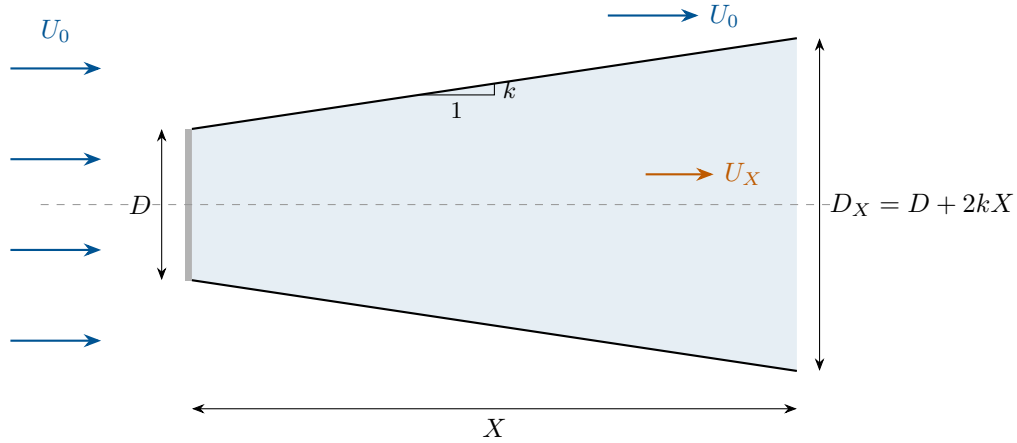
kde k je **konštanta rozširovania úplavy** (angl. *wake decay constant*). Počiatočný deficit rýchlosti sa určí z hybnostnej teórie (kap. 5) zo súčiniteľa ťahu [3, rov. (9.5)]

$$a = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - c_T}) \quad (12.2)$$

a zo zachovania hybnosti vyplýva deficit vo vzdialenosti X [3, rov. (9.6)]

$$1 - \frac{U_X}{U_0} = \frac{1 - \sqrt{1 - c_T}}{(1 + 2kX/D)^2} \quad (12.3)$$

Konštanta k je jediná empirická konštanta modelu; závisí od okolitej turbulentie, turbulentie vyvolanej turbínou a stability atmosféry. Katić uvádza, že pre prvú z dvoch turbín za sebou vyhovovala hodnota $k = 0,075$, pre druhú, ktorá bola v turbulentnejšom prúde, bolo potrebné



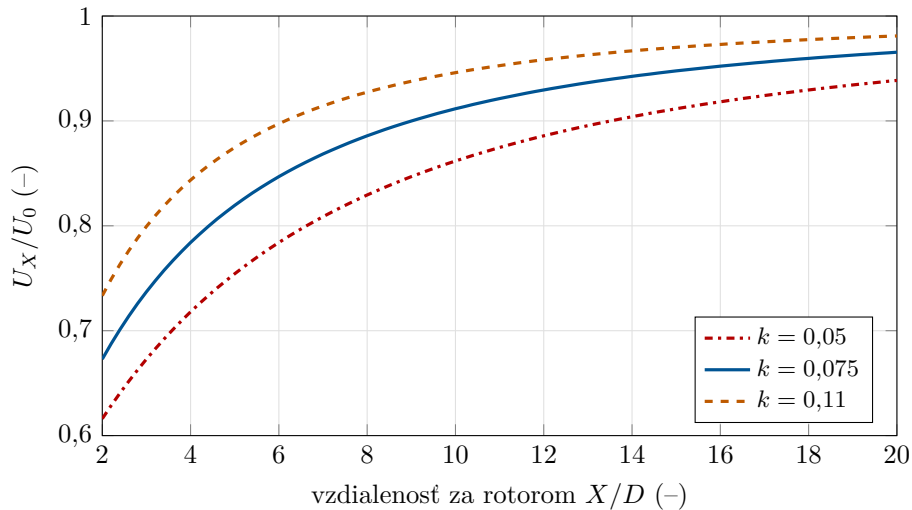
Obr. 12.2. Jensenov (Katičov) model úplavy: lineárne sa rozširujúca úplav s rovnomerným rýchlostným deficitom (schematicky, podľa [3, obr. 9.9]).

$k = 0,11$. Výsledky pre celý park s vetrom z rôznych smerov nie sú na malé zmeny k citlivé: malá konštanta dáva veľký deficit v úzkej oblasti, veľká menší deficit v širšej oblasti [3, čl. 9.4.2.2] (obr. 12.3).

Ak sa úplavy viacerých turbín prekrývajú, model predpokladá, že deficit kinetickej energie sa sčíta; pre dve úplavy [3, rov. (9.7)]

$$\left(1 - \frac{U_X}{U_0}\right)^2 = \left(1 - \frac{U_{X,1}}{U_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{U_{X,2}}{U_0}\right)^2. \quad (12.4)$$

Niektoré modely namiesto toho predpokladajú lineárne sčítanie rýchlostných deficitov [3, čl. 9.4.2.2].



Obr. 12.3. Pomerná rýchlosť v úplave podľa Jensenovho modelu (12.3) pre $c_T = 0,8$ (vlastný výpočet).

Príklad 12.1: Turbína v úplave

Dve rovnaké turbíny s priemerom 126 m stoja za sebou v smere vetra vo vzdialenosti 7D. Prvá pracuje so súčiniteľom ťahu $c_T = 0,8$. Vypočítajte rýchlosť vetra pred druhou

turbínou a pomer výkonov pre $k = 0,075$ a $k = 0,11$, ak obe turbíny pracujú pod menovitou rýchlosťou s rovnakým c_P .

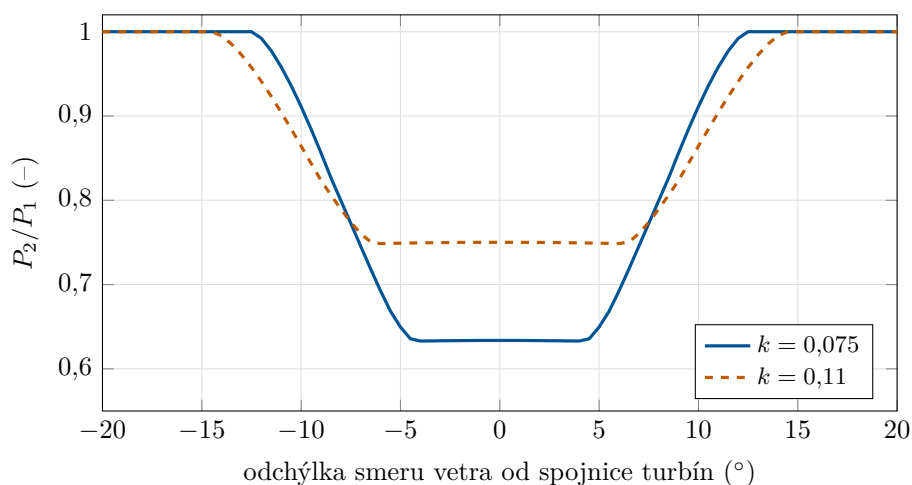
Riešenie. Z (12.2): $a = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{0,2}) = 0,276$; počiatočný deficit $2a = 1 - \sqrt{0,2} = 0,553$. Pre $k = 0,075$:

$$1 - \frac{U_X}{U_0} = \frac{0,553}{(1 + 2 \cdot 0,075 \cdot 7)^2} = \frac{0,553}{2,05^2} = 0,132, \quad \frac{U_X}{U_0} = 0,868.$$

Pomer výkonov je $(U_X/U_0)^3 = 0,655$ – druhá turbína vyrába len asi dve tretiny výkonu prvej. Pre $k = 0,11$: $U_X/U_0 = 0,914$, pomer výkonov 0,764. Priemer úplavy je pri $k = 0,075$ $D_X = 126 + 2 \cdot 0,075 \cdot 882 = 258$ m, t. j. asi $2D$.

12.2.1 Vplyv smeru vetra

Ak vietor nefúka presne v smere spojnice turbín, zadná turbína je v úplave len čiastočne alebo vôbec. Pri výpočte s Jensenovým modelom sa v takom prípade deficit často násobí podielom plochy rotora, ktorý pokrýva úplava; toto zjednodušenie používame vo vlastných výpočtoch v tejto kapitole. Pre dve turbíny vo vzdialenosti $7D$ je výsledok na obr. 12.4: pri $k = 0,075$ je zadná turbína ovplyvnená v rozsahu smerov približne $\pm 11^\circ$ a pri presnom súlade smerov vyrába 63 % výkonu prednej. Pretože smer vetra sa mení, rozhodujú o ročných stratách rozostupy turbín spolu s veternou ružicou lokality [3, čl. 9.4.2.1].



Obr. 12.4. Pomer výkonu zadnej a prednej turbíny vo vzdialenosti $7D$ v závislosti od smeru vetra pri 8 m/s (modelová turbína z kap. 9; vlastný výpočet Jensenovým modelom s podielom prekrytia plochy rotora).

12.3 Turbulencia v úplave

Turbíny v úplave iných turbín pracujú vo zvýšenej turbulentii, ktorá zvyšuje únavové namáhanie a skracuje ich životnosť; zvýšená turbulencia tiež znižuje výrobu, lebo riadiaci systém pri nárazoch vetra častejšie turbínu odstavuje [3, čl. 9.4.2.3]. Teoretické modely turbulencie v úplave sú menej rozvinuté ako modely strednej rýchlosti. Quarton a Ainslie (1989) a neskôr Hassan (1992) odvodili empirický vzťah pre **prídavnú intenzitu turbulencie** I_+ vo vzdialenosti x

za turbínou [13, čl. 2.10]:

$$I_+ = 5,7 c_T^{0,7} I_0^{0,68} \left(\frac{x}{x_n} \right)^{-0,96}, \quad I_+ = \sqrt{I_{\text{wake}}^2 - I_0^2}, \quad (12.5)$$

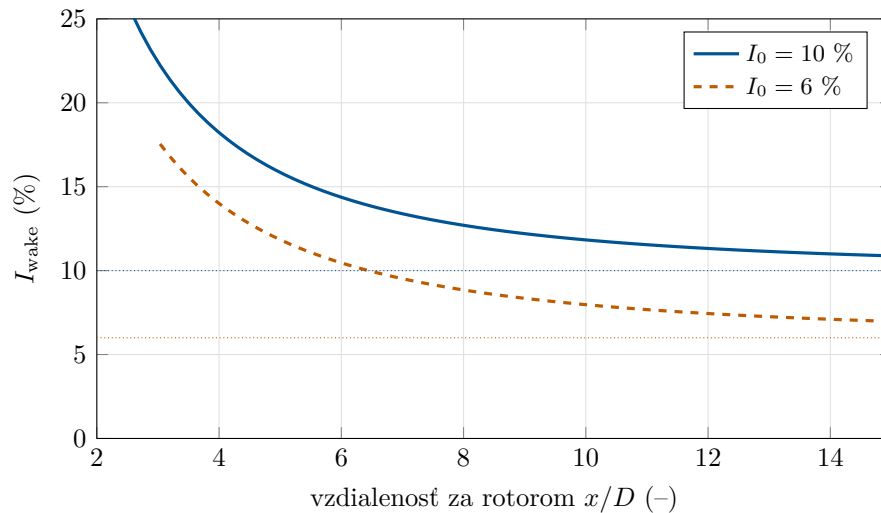
kde I_0 je okolitá intenzita turbulencie, I_0 aj I_+ sú v percentách a I_{wake} je celková intenzita turbulencie v úplave. Dĺžka blízkej úplavy x_n sa počíta podľa Vermeulena z polomeru rotora, súčiniteľa ťahu, okolitej turbulencie, počtu lopatiek a rýchlobežnosti [13, čl. 2.10]:

$$x_n = \frac{n r_0}{dr/dx}, \quad r_0 = R \sqrt{\frac{m+1}{2}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{1-c_T}}, \quad (12.6)$$

$$n = \frac{\sqrt{0,214 + 0,144m} (1 - \sqrt{0,134 + 0,124m})}{(1 - \sqrt{0,214 + 0,144m}) \sqrt{0,134 + 0,124m}},$$

$$\frac{dr}{dx} = \sqrt{(2,5I_0 + 0,005)^2 + \left(\frac{(1-m)\sqrt{1,49+m}}{9,76(1+m)} \right)^2 + (0,012 N \lambda)^2},$$

kde tri členy rýchlosti rozširovania úplavy vyjadrujú vplyv okolitej turbulencie (I_0 tu ako podiel), turbulencie zo šmyku a mechanickej turbulencie [13, čl. 2.10].



Obr. 12.5. Celková intenzita turbulencie v úplave podľa (12.5) a (12.6) pre $c_T = 0,8$, $N = 3$, $\lambda = 7,5$ a $R = 63$ m; krivky začínajú na konci blízkej úplavy, bodkovane okolitá turbulencia (vlastný výpočet).

Príklad 12.2: Turbulencia v úplave

Pre turbínu z čl. 12.2 ($c_T = 0,8$, $R = 63$ m, $N = 3$, $\lambda = 7,5$) a okolitú intenzitu turbulencie 10 % vypočítajte dĺžku blízkej úplavy a intenzitu turbulencie vo vzdialenosti $5D$.

Riešenie. $m = 1/\sqrt{0,2} = 2,236$, $r_0 = 63\sqrt{1,618} = 80,1$ m, $n = 1,529$. Členy rýchlosti rozširovania: $2,5 \cdot 0,1 + 0,005 = 0,255$; $-0,076$; $0,012 \cdot 3 \cdot 7,5 = 0,27$; spolu $dr/dx = 0,379$. Dĺžka blízkej úplavy $x_n = 1,529 \cdot 80,1 / 0,379 = 323$ m = $2,57D$.

Pri $x = 5D$ je $x/x_n = 1,95$ a

$$I_+ = 5,7 \cdot 0,8^{0,7} \cdot 10^{0,68} \cdot 1,95^{-0,96} = 5,7 \cdot 0,855 \cdot 4,79 \cdot 0,527 = 12,3 \%,$$

$I_{\text{wake}} = \sqrt{10^2 + 12,3^2} = 15,9 \%$. Turbulencia v úplave je takmer o 60 % väčšia ako okolitá.

Hlboko vo vnútri parku sa úplavy mnohých turbín skladajú. Frandsen a Thøgersen navrhli model, ktorý považuje turbíny za dodatočnú drsnosť povrchu; na vzťah pre intenzitu turbulencie vo veternom parku, ktorý by bol dostatočne overený pre výpočet zatažení, sa však zatiaľ nedospelo k zhode [13, čl. 2.10]. Pri takmer jednosmernom vetre a malých rozostupoch v rade sa niekedy pri vetre pozdĺž radu každá druhá turbína odstaví, aby sa obmedzilo únavové namáhanie (**riadenie podľa smeru vetra**, *direction sector management*) [3, čl. 9.4.2.4].

12.4 Straty vo veternom parku

Park nevyrobí toľko energie ako rovnaký počet osamotených turbín; rozdiel sa nazýva **straty v parku** (angl. *array losses*). Závisia najmä od rozostupov turbín v smere vetra a naprieč, od prevádzkových charakteristík turbín, od počtu turbín a veľkosti parku, od intenzity turbulencie a od rozdelenia smerov vetra (veternej ružice) [3, čl. 9.4.2.1]. **Účinnosť parku** je [3, rov. (9.4)]

$$\eta_{\text{park}} = \frac{\text{ročná výroba parku}}{\text{ročná výroba osamotenej turbíny} \cdot \text{počet turbín}}. \quad (12.7)$$

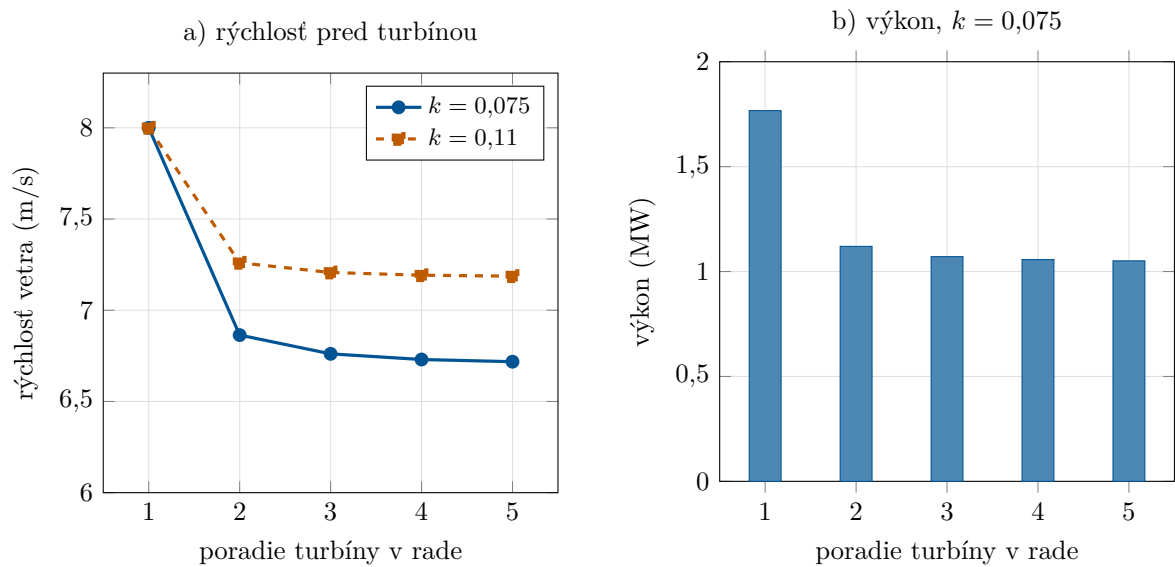
Väčšia turbulencia urýchľuje výmenu hybnosti medzi úplavou a okolím a straty znižuje. Typická intenzita turbulencie je 10 až 15 %, nad morom len okolo 5 %, v členitom teréne až 50 %. Pri rozostupoch 8 až 10 priemerov rotora v prevládajúcom smere vetra a 5 priemerov naprieč sú straty v parku typicky menšie ako 10 % (Lissaman a kol., 1982) [3, čl. 9.4.2.1].

Výkonová krivka parku má iný tvar ako krivka jednej turbíny: pri rastúcej rýchlosti vetra vyrába najprv len prvý rad, menovitý výkon dosiahnu turbíny v úplave až pri vyššej rýchlosti vetra [3, čl. 9.4.2.5]. Ilustrujeme to na rade piatich modelových turbín z kap. 9 s rozostupom $7D$ pri vetre pozdĺž radu – to je pre straty najnepriaznivejší prípad. Súčiniteľ ťahu každej turbíny sa určí z jej charakteristiky pri rýchlosti, ktorá na ňu prúdi, a úplavy sa skladajú podľa (12.4) (obr. 12.6 and 12.7). Pri 8 m/s klesne rýchlosť pred druhou turbínou na $6,86 \text{ m/s}$ a výkon na 63 % výkonu prvej; ďalšie turbíny sú už v podobnej úplave. Nad približne 14 m/s pracujú všetky turbíny s menovitým výkonom, lebo pri natočených lopatkách je súčiniteľ ťahu malý. Pri Rayleighovom rozdelení so strednou rýchlosťou $8,5 \text{ m/s}$ a vetre stále pozdĺž radu vychádza účinnosť radu 83 % ($k = 0,075$), resp. 89 % ($k = 0,11$); pri rozostupe $5D$ 76 % a pri $10D$ 89 % (pre $k = 0,075$). Skutočný park s vetrom z rôznych smerov má straty menšie.

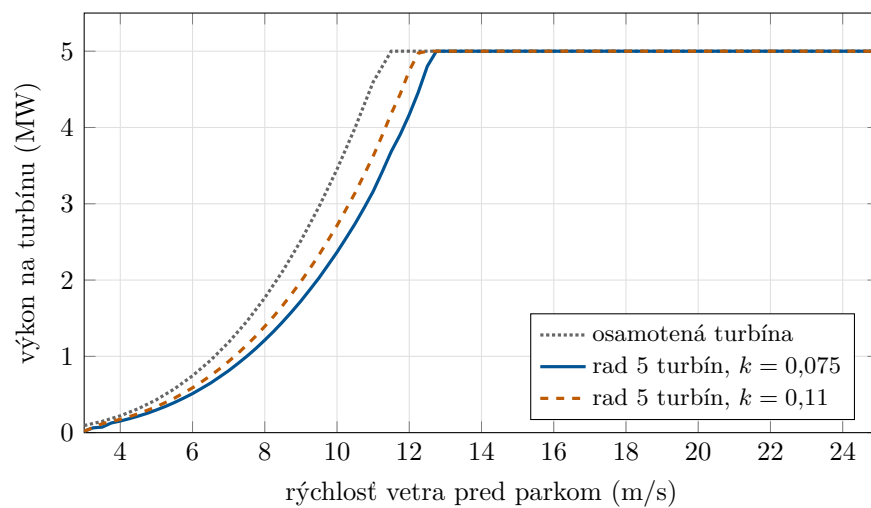
12.4.1 Rozostupy turbín

Na ročné straty v parku má okrem rozostupov v smere vetra veľký vplyv aj rozostup naprieč a rozdelenie smerov vetra. Manwell a kol. ukazujú výsledky Lissamana a kol. pre hypotetický park 6×6 turbín s rozostupom 10 priemerov v smere vetra: straty rastú so znižujúcim sa priečnym rozostupom a s klesajúcou intenzitou turbulencie a sú oveľa väčšie, ak fúka vietor len rovnoobežne s radmi turbín, ako keď je rozdelený rovnomerne do všetkých smerov [3, obr. 9.6].

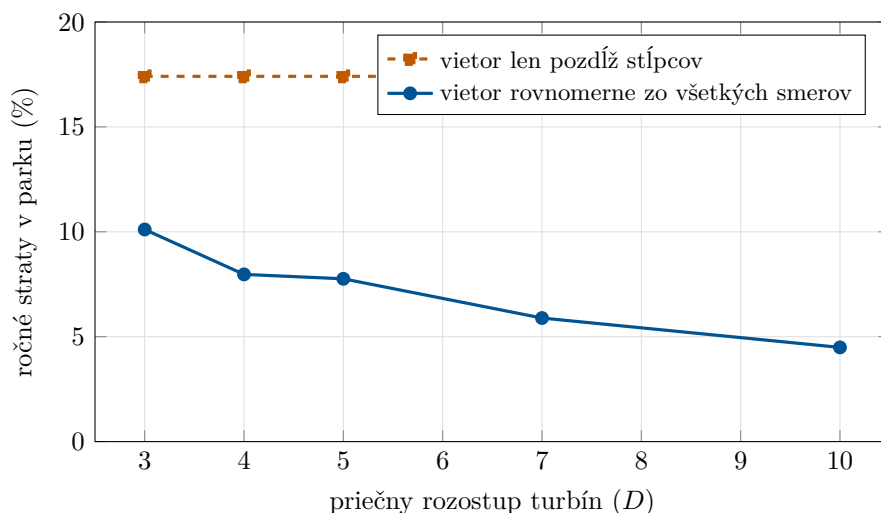
Podobný vlastný výpočet pre park 5×5 modelových turbín s rozostupom $7D$ v smere vetra je na obr. 12.8. Pri vetre rovnomerne zo všetkých smerov (36 smerov po 10° , Rayleighovo rozdelenie so strednou rýchlosťou $8,5 \text{ m/s}$) klesnú straty zo 10 % pri priečnom rozostupe $3D$ na 4,5 % pri $10D$. Ak by vietor fúkal stále pozdĺž stĺpcov turbín, straty by boli 17 % bez ohľadu na priečny rozostup.



Obr. 12.6. Rad piatich modelových turbín s rozstupom $7D$ pri vetre 8 m/s pozdĺž radu (vlastný výpočet podľa (12.3) a (12.4)).



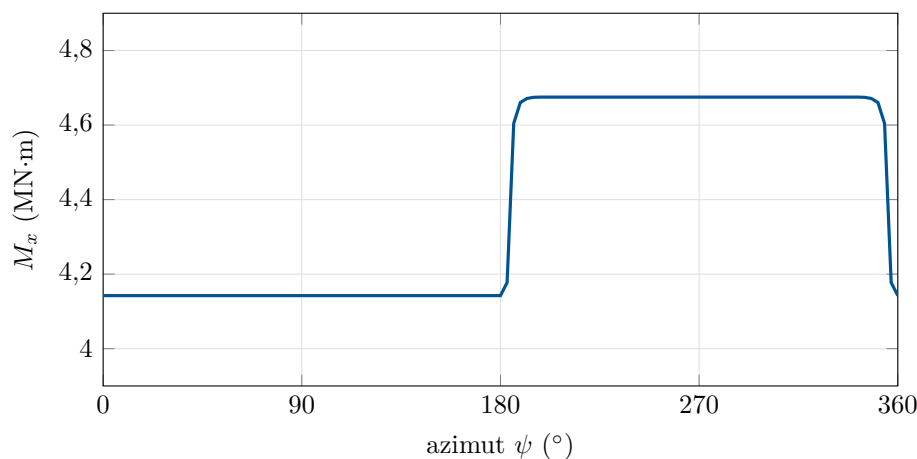
Obr. 12.7. Priemerný výkon turbíny v rade piatich turbín s rozstupom $7D$ pri vetre pozdĺž radu v porovnaní s osamotenou turbínou (vlastný výpočet; porovnaj [3, obr. 9.11]).



Obr. 12.8. Ročné straty v parku 5×5 modelových turbín s rozstupom $7D$ v smere vetra v závislosti od pričného rozostupu ($k = 0,075$, Rayleighovo rozdelenie, $\bar{v} = 8,5$ m/s; vlastný výpočet Jensenovým modelom; porovnaj [3, obr. 9.6]).

12.4.2 Čiastočná úplav a zaťaženie

Turbína, ktorá je v úplave len čiastočne, je vystavená vodorovnému strihu vetra a jej zaťaženie sa analyzuje podobne ako pri strihu vetra [13, čl. 5.7.2] (čl. 10.3). Príklad je na obr. 12.9: modelová turbína stojí $7D$ za inou turbínou, posunutá o $1D$ naprieč, takže polovica jej rotora je v úplave s rýchlostným deficitom 14 % (Jensenov model, 8 m/s). Ohybový moment z roviny rotora v koreni lopatky kolíše pri každej otáčke medzi 4,14 MN m až 4,68 MN m – podobne ako pri strihu vetra (obr. 10.6).



Obr. 12.9. Ohybový moment z roviny rotora v koreni lopatky modelovej turbíny, ktorej polovica rotora je v úplave inej turbíny ($7D$ za ňou, pričný posun $1D$, 8 m/s, $k = 0,075$; vlastný výpočet s indukčnými faktormi pre rovnomerný prúd). Lopatka je v úplave pri azimute 0° až 180° .

12.4.3 Vyhľadanie výkonu

Turbulentné fluktuácie rýchlosti spôsobujú kolísanie výkonu každej turbíny. Ak by všetky turbíny parku boli v rovnakom vetre, smerodajná odchýlka výkonu parku by bola N -násobkom

smerodajnej odchýlky jednej turbíny. Ak majú turbíny rovnakú strednú rýchlosť, ale nekorelovanú turbulenciu, stredný výkon parku je N -násobok, smerodajná odchýlka však len [3, rov. (9.8)]

$$\sigma_{P,N} = \frac{N\sigma_{P,1}}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}\sigma_{P,1}. \quad (12.8)$$

Pomerné kolísanie výkonu parku je teda $\sqrt{N}$ -krát menšie ako pri jednej turbíne (**vyhladenie výkonu**, *power smoothing*). Napríklad pre 25 turbín so stredným výkonom 2 MW a smerodajnou odchýlkou 0,3 MW je stredný výkon parku 50 MW; pri úplne korelovanom vetre by smerodajná odchýlka bola 7,5 MW (15 %), pri nekorelovanom len $\sqrt{25} \cdot 0,3 = 1,5$ MW (3 %). V skutočnosti je vietor na rôznych turbínach čiastočne korelovaný – korelácia klesá so vzdialenosťou a s frekvenciou fluktuácií [3, čl. 9.4.2.6].

12.5 Pokročilé metódy výpočtu

Metóda BEM je rýchla a po korekciách (kap. 8) dostatočne presná pre väčšinu inžinierskych úloh. Jej nevýhodami sú chyby pri veľkých indukovaných rýchlostiach a pri šikmom nabiehaní vetra a neschopnosť predpovedať oneskorenie stallu v dôsledku rotácie [3, čl. 3.13.4]. Prehľad pokročilejších metód je v tab. 12.1.

- **Vírové metódy** (angl. *vortex wake methods*) počítajú indukované rýchlosti z rozloženia vírivosti v úplave. Sú výpočtovo náročnejšie, majú však výhody pri šikmom nabiehaní a trojrozmernom obtekaní [3, čl. 3.13.4]. Príkladom je zjednodušený model voľnej vírovej úplavy s vírovými plochami v blízkej úplave a vírovými prstencami vo vzdialenej úplave [30, 31].
- **Teória mreže** (angl. *cascade theory*) z návrhu turbostrojev berie do úvahy vzájomné ovplyvňovanie lopatiek; pre rotory s veľkou plnosťou a malou rýchlobežnosťou dáva lepšie výsledky ako BEM [3, čl. 3.13.4].
- **Metóda akčného disku a akčnej čiary** v CFD: rotor sa nahradí objemovými silami vypočítanými z charakteristík profilov – rozloženými po disku (*actuator disc*) alebo pozdĺž čiar predstavujúcich lopatky (*actuator line*). Prúdenie okolo turbíny a v úplave sa rieši Reynoldsovými (RANS) rovnicami alebo simuláciou veľkých vírov (LES). Tieto metódy sa používajú najmä na úplavy a prúdenie vo veterných parkoch, aj v zložitom teréne [31, 32].
- **CFD s rozlíšenou lopatkou** rieši obtekanie skutočného tvaru lopatky vrátane medznej vrstvy. Je výpočtovo najnáročnejšia a používa sa najmä vo výskume [3, čl. 3.13.4], [31].

12.5.1 Overovanie modelov

Overenie výpočtových modelov je ťažké: pri meraní na skutočných turbínach vietor zmeraný pred rotorom sa kým dorazí k rotoru zmení, takže vstupy, merania a výsledky možno porovnávať len štatisticky [3, čl. 3.13.5]. Preto sa uskutočnili merania vo veľkom aerodynamickom tuneli NASA Ames (pracovný priestor 25 m × 36 m, rýchlosť až 50 m/s) na turbíne s rotorom s priemerom 10 m. Devätnásť riešiteľov z celého sveta dostalo namerané vstupné údaje a charakteristiky profilov a predpovedalo výkon, zaťaženie a rozloženie tlaku pre 20 prevádzkových stavov. Výsledky prekvapili: už pri 7 m/s, keď žiadna časť lopatky nie je v stalle,

Tabuľka 12.1. Prehľad metód výpočtu aerodynamiky veternej turbíny (zostavené podľa [3, čl. 3.13.4, 9.4.2.2] a [31]).

metóda	princíp	typické použitie
BEM s korekciami	hybnostná teória pre prstence + 2D charakteristiky profilov	návrh lopatiek, výkon, aeroelastické výpočty zaťaženia
vírové metódy	indukované rýchlosti z vírivosti v úplave	šikmé nabíehanie, nestacionárne stavy
akčný disk / akčná čiara + RANS/LES	objemové sily v riešení Navierových–Stokesových rovníc	úplavy, veterné parky
CFD s rozlíšenou lopatkou	priame riešenie obtekania lopatky	výskum, overovanie jednoduchších modelov
modely úplavy (Jensen, Ainslie)	poloempirické alebo zjednodušené rovnice pre úplav	výpočet výroby a strát parku

sa predpovede krútiaceho momentu z aeroelastických programov pohybovali od 25 % do 175 % nameranej hodnoty, najmä v dôsledku rozdielneho spôsobu použitia dvojrozmerných charakteristík profilov [3, čl. 3.13.5].

Novšie porovnanie troch metód pre turbínu triedy niekoľkých megawattov v turbulentnom prúde (CFD s rozlíšenou lopatkou, akčná čiara, BEM) ukázalo, že stredné sily v strednej časti lopatky sú veľmi podobné, pri koreni a konci lopatky sa však líšia. Smerodajné odchýlky síl sú pri BEM takmer všade oveľa väčšie. Únavové zaťaženie od krútiaceho momentu sa medzi oboma metódami CFD líšilo len o 0,4 %, BEM sa odlišovala až o 16 %; pri ťahu sa BEM líšila o 29 % a akčná čiara o 7 % od výpočtu s rozlíšenou lopatkou [33].

Zhrnutie

Zhrnutie kapitoly

- Úplav má zmenšenú rýchlosť a zväčšenú turbulenciu; v blízkej úplave (1 až 3 D) sa rozpadajú víry z koncov lopatiek, vo vzdialenej úplave má deficit gaussianský profil a postupne zaniká.
- Jensenov model: $1 - U_X/U_0 = (1 - \sqrt{1 - c_T})/(1 + 2kX/D)^2$, $k \approx 0,075$ až $0,11$; deficity energie viacerých úplav sa sčítajú.
- Prídavná turbulencia v úplave klesá so vzdialenosťou; pri $5D$ môže byť celková intenzita o polovicu väčšia ako okolitá.
- Straty v parku závisia od rozstupov, turbulencie a veternej ružice; pri rozstupoch 8 až 10 D a 5 D sú typicky pod 10 %.
- Pokročilé metódy (vírové, akčný disk/čiara, CFD) dopĺňajú BEM najmä pri úplavách, parkoch a zložitom prúdení; overovanie modelov ukázalo veľký vplyv charakteristík profilov.

Kontrolné otázky

1. Opíšte mechanizmus obnovy rýchlosti v úplave. Čo ho urýchľuje?
2. Čím sa líši blízka a vzdialená úplav?
3. Aké predpoklady používa Jensenov model úplavy?
4. Ako súvisí počiatočný deficit rýchlosti so súčiniteľom ťahu?
5. Ako sa skladajú úplavy viacerých turbín v Jensenovom modeli?
6. Od čoho závisia straty vo veternom parku?
7. Prečo je výkonová krivka parku odlišná od krivky jednej turbíny?
8. Čo je vyhladenie výkonu parku?
9. Aké sú hlavné nevýhody metódy BEM a ktoré metódy ich odstraňujú?
10. Čo ukázalo porovnanie výpočtových programov s meraním v tuneli NASA Ames?

Úlohy

Úloha 12.1. Aký je počiatočný deficit rýchlosti $2a$ podľa (12.2) pre $c_T = 0,5$ a $c_T = 0,89$?

(Výsledok: 0,293 a 0,668)

Úloha 12.2. Vypočítajte pomernú rýchlosť v úplave vo vzdialenosti $5D$ a $10D$ pre $c_T = 0,8$ a $k = 0,075$.

(Výsledok: 0,819 a 0,912)

Úloha 12.3. Turbína stojí vo vzdialenosti $7D$ za jednou turbínou a $14D$ za druhou (všetky v jednom rade, $c_T = 0,8$, $k = 0,075$, deficit počítaný voči U_0). Vypočítajte výsledný deficit podľa (12.4).

(Výsledok: 0,132 a 0,058, výsledný deficit 0,144, $U/U_0 = 0,856$)

Úloha 12.4. Park má 20 turbín, osamotená turbína by vyrobila 15 GWh za rok a park vyrába 276 GWh. Aká je účinnosť parku a straty?

(Výsledok: 92 %; straty 8 %)

Úloha 12.5. O koľko sa zmenší pomerné kolísanie výkonu parku s 25 turbínami oproti jednej turbíne, ak je turbulencia na turbínach nekorelovaná?

(Výsledok: 5-krát)

Úloha 12.6. Vypočítajte dĺžku blízkej úplavy podľa (12.6) pre turbínu z čl. 12.3 pri okolitej turbulencii 6 %.

(Výsledok: $x_n \approx 3,0D$)

Úloha 12.7. Pri akom priečnom rozostupe (v priemeroch rotora) už zadná turbína vo vzdialenosti $7D$ nie je v úplave podľa Jensenovho modelu s $k = 0,075$? (Úplav a rotor sa neprekrývajú, ak je vzdialenosť osí väčšia ako súčet polomerov.)

(Výsledok: viac ako $0,5 + 0,5 + 0,075 \cdot 7 = 1,525D$)

Úloha 12.8. Aký je uhol medzi smerom vetra a spojnicou dvoch turbín vo vzdialenosti $7D$, pri ktorom zadná turbína práve vyjde z úplavy ($k = 0,075$)?

(Výsledok: $\arctan(1,525/7) \approx 12^\circ$ (porovnaj obr. 12.4))

Príloha A

Ukážkový výpočet metódou BEM

V tejto prílohe je úplný ručne kontrolovateľný výpočet výkonu modelového rotora z kap. 7 metódou BEM so stratami na konci a pri koreni lopatky a s empirickou korekciou pre silne zaťažovaný prvok (kap. 8). Lopatka je rozdelená len na 10 prvkov, aby bol postup prehľadný; výsledky sú vlastný výpočet.

Zadanie

Trojlopatkový rotor s polomerom $R = 63$ m a geometriou lopatky podľa tab. 7.3 (lopatka od $\mu_k = 0,15$) pracuje pri rýchlosti vetra $v_\infty = 10$ m/s a rýchlobežnosti $\lambda = 7$, $\rho = 1,225$ kg/m³. Charakteristika profilu je modelová: pre $\alpha \leq 12^\circ$ je $c_L = 0,11(\alpha + 4)$ a $c_D = 0,008 + 0,0003\alpha^2$ (α v stupňoch). Určte súčiniteľ výkonu a ťahu rotora.

Postup

1. Uhlová rýchlosť $\Omega = \lambda v_\infty / R = 7 \cdot 10 / 63 = 1,1111$ rad/s.
2. Lopatku od $r_k = 0,15R = 9,45$ m po R rozdelíme na 10 rovnakých prvkov so šírkou $\Delta r = (63 - 9,45) / 10 = 5,355$ m. Výpočet robíme v strede každého prvku.
3. Tetivu c a uhol nastavenia β v strede prvku určíme lineárnou interpoláciou z tab. 7.3.
4. Pre každý prvok iteratívne vyriešime rovnice BEM (obr. 8.12): ϕ z (6.16), $F = F_t F_k$ z (8.3) a (8.5), $\alpha = \phi - \beta$, c_L , c_D , C_x , C_y , $c_{T,r}$ z (8.15); nové a z (8.9) alebo pri $c_{T,r} > F \cdot 4a_T(1 - a_T)$ z (8.16); nové a' z (8.9); relaxácia; opakujeme, kým sa a a a' nemenia.
5. Z výsledných hodnôt vypočítame $W = v_\infty(1 - a) / \sin \phi$ a ťah a krútiaci moment na jednotku dĺžky všetkých lopatiek (7.5).
6. Ťah a krútiaci moment rotora dostaneme súčtom príspevkov prvkov $\Delta T = (dT/dr) \Delta r$, $\Delta Q = (dQ/dr) \Delta r$ (obdĺžniková metóda so stredom intervalu).

Výsledky pre jednotlivé prvky

Geometria prvkov, výsledné uhly a súčinitele profilu sú v tab. A.1, faktor strát, indukčné faktory a sily v tab. A.2.

Tabuľka A.1. Geometria prvkov a výsledné uhly a súčinitele profilu.

μ	r (m)	c (m)	β (°)	ϕ (°)	α (°)	c_L	c_D
0,1925	12,13	4,50	21,51	27,64	6,13	1,114	0,0193
0,2775	17,48	4,50	14,38	20,96	6,58	1,164	0,0210
0,3625	22,84	4,50	9,98	16,00	6,02	1,103	0,0189
0,4475	28,19	4,50	7,15	12,51	5,35	1,029	0,0166
0,5325	33,55	4,33	5,21	10,10	4,89	0,978	0,0152
0,6175	38,90	3,88	3,80	8,62	4,82	0,970	0,0150
0,7025	44,26	3,41	2,72	7,59	4,87	0,976	0,0151
0,7875	49,61	3,05	1,91	6,74	4,83	0,971	0,0150
0,8725	54,97	2,76	1,25	5,89	4,64	0,950	0,0145
0,9575	60,32	2,51	0,68	4,48	3,80	0,858	0,0123

Tabuľka A.2. Faktor strát, indukčné faktory, sily na jednotku dĺžky (všetky tri lopatky) a príspevky prvkov k ťahu a krútiacemu momentu.

μ	F	a	a'	dT/dr (kN/m)	dQ/dr (kN·m/m)	ΔT (kN)	ΔQ (kN·m)
0,1925	0,674	0,233	0,0868	2,25	13,7	12,1	73,3
0,2775	0,907	0,225	0,0419	4,25	26,9	22,8	144,3
0,3625	0,974	0,253	0,0267	6,47	39,6	34,6	212,3
0,4475	0,994	0,292	0,0191	8,91	51,5	47,7	275,8
0,5325	0,998	0,326	0,0142	11,33	61,7	60,7	330,3
0,6175	0,998	0,338	0,0106	13,39	70,7	71,7	378,7
0,7025	0,995	0,339	0,0081	15,20	79,1	81,4	423,5
0,7875	0,980	0,344	0,0064	16,92	86,1	90,6	460,9
0,8725	0,925	0,367	0,0053	18,31	88,3	98,0	472,8
0,9575	0,719	0,472	0,0049	18,06	69,7	96,7	373,3
súčet						616,3	3145,2

Kontrola jedného prvku

Pre prvok na $\mu = 0,7025$ ($r = 44,26$ m, $c = 3,412$ m, $\beta = 2,724^\circ$) overíme výsledné hodnoty $a = 0,3391$ a $a' = 0,00811$.

$$\tan \phi = \frac{10 \cdot 0,6609}{1,1111 \cdot 44,26 \cdot 1,00811} = 0,1333, \quad \phi = 7,594^\circ, \quad \sin \phi = 0,1322.$$

Faktor strát: $f_t = 1,5 \cdot 0,2975 / (0,7025 \cdot 0,1322) = 4,81$, $F_t = (2/\pi) \arccos(e^{-4,81}) = 0,995$; pri koreni je $F_k \approx 1$, takže $F = 0,995$. Uhol nábehu $\alpha = 7,594 - 2,724 = 4,870^\circ$, $c_L = 0,976$, $c_D = 0,0151$, $C_x = 0,969$, $C_y = 0,114$, $\sigma_r = 3 \cdot 3,412 / (2\pi \cdot 44,26) = 0,0368$.

Miestny súčiniteľ ťahu $c_{T,r} = 0,0368 \cdot 0,6609^2 \cdot 0,969 / 0,1322^2 = 0,892$ je väčší ako $F \cdot 4a_T(1 - a_T) = 0,874$, preto platí empirický vzťah (8.16):

$$a = 1 - \frac{1,816 - 0,892/0,995}{4(\sqrt{1,816} - 1)} = 1 - \frac{0,919}{1,390} = 0,339. \quad \checkmark$$

Tangenciálna rovnica: $a'/(1 + a') = 0,0368 \cdot 0,114/(4 \cdot 0,995 \cdot 0,1322 \cdot 0,9912) = 0,00805$,
 $a' = 0,0081$. ✓

Relatívna rýchlosť $W = 6,609/0,1322 = 50,0 \text{ m/s}$ a

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2}\rho W^2 N c C_x = 0,6125 \cdot 50,0^2 \cdot 3 \cdot 3,412 \cdot 0,969 = 15,2 \text{ kN/m},$$

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{1}{2}\rho W^2 N c C_y r = 79,1 \text{ kN m/m}.$$

Výsledok

Súčtom príspevkov (tab. A.2) dostaneme $T = 616 \text{ kN}$ a $Q = 3145 \text{ kN m}$. Výkon rotora $P = Q\Omega = 3145 \cdot 1,1111 = 3495 \text{ kW}$ a

$$c_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2 v_\infty^3} = \frac{3,495 \cdot 10^6}{0,5 \cdot 1,225 \cdot \pi \cdot 63^2 \cdot 10^3} = 0,458, \quad c_T = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2 v_\infty^2} = 0,807.$$

Výpočet s 200 prvkami dáva $c_P = 0,451$ a $c_T = 0,801$ (obr. 8.9); pri 10 prvkoch je chyba c_P asi 1,5 %, hlavne preto, že pri konci lopatky sa faktor strát a indukčný faktor rýchlo menia a hrubé delenie ich nezachytí presne.

Z tabuliek je dobre vidieť typické vlastnosti rotora: vo vnútornej časti lopatky s obmedzenou tetivou je a menšie ako $1/3$ a uhol nábehu väčší ako návrhový, v strednej časti je $a \approx 1/3$ a $\alpha \approx 5^\circ$ podľa návrhu a pri konci lopatky faktor strát klesá, lokálny indukčný faktor rastie a sila na jednotku dĺžky klesá. Najväčší príspevok ku krútiacemu momentu dávajú prvky na 70 až 90 % polomeru.

Literatúra

- [1] Martin O. L. Hansen. *Aerodynamics of Wind Turbines*. Routledge, London, 3. vyd., 2015. ISBN 978-1-138-77507-7. doi: 10.4324/9781315769981.
- [2] Tony Burton, Nick Jenkins, Ervin Bossanyi, David Sharpe a Michael Graham. *Wind Energy Handbook*. John Wiley & Sons, Chichester, 3. vyd., 2021. ISBN 978-1-119-45109-9. doi: 10.1002/9781119451143.
- [3] James F. Manwell, Jon G. McGowan a Anthony L. Rogers. *Wind Energy Explained: Theory, Design and Application*. John Wiley & Sons, Chichester, 2. vyd., 2009. ISBN 978-0-470-01500-1.
- [4] Paul Gipe a Erik Möllerström. An overview of the history of wind turbine development: Part I – The early wind turbines until the 1960s. *Wind Engineering*, 46(6):1973–2004, 2022. doi: 10.1177/0309524X221117825.
- [5] Paul Gipe a Erik Möllerström. An overview of the history of wind turbine development: Part II – The 1970s onward. *Wind Engineering*, 47(1), 2023. doi: 10.1177/0309524X221122594.
- [6] Jason Jonkman, Sandy Butterfield, Walter Musial a George Scott. Definition of a 5-MW Reference Wind Turbine for Offshore System Development. Technická správa NREL/TP-500-38060, National Renewable Energy Laboratory, Golden, CO, 2009.
- [7] Evan Gaertner a kol. IEA Wind TCP Task 37: Definition of the IEA 15-Megawatt Offshore Reference Wind Turbine. Technická správa NREL/TP-5000-75698, National Renewable Energy Laboratory, Golden, CO, 2020.
- [8] Global Wind Energy Council. Global Wind Report 2026. Technická správa, Global Wind Energy Council, 2026. URL <https://www.gwec.net/reports/globalwindreport>. Zverejnené 20. 4. 2026.
- [9] ISO. ISO 2533:1975 Standard Atmosphere. International Organization for Standardization, Ženeva, 1975.
- [10] Stefan Emeis. *Wind Energy Meteorology: Atmospheric Physics for Wind Power Generation*. Springer, Cham, 2. vyd., 2018. doi: 10.1007/978-3-319-72859-9.
- [11] Roland B. Stull. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988. ISBN 90-277-2768-6. doi: 10.1007/978-94-009-3027-8.
- [12] Isaac Van der Hoven. Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from 0.0007 to 900 cycles per hour. *Journal of Meteorology*, 14(2):160–164, 1957. doi: 10.1175/1520-0469(1957)014<0160:PSOHWS>2.0.CO;2.
- [13] Tony Burton, David Sharpe, Nick Jenkins a Ervin Bossanyi. *Wind Energy Handbook*. John Wiley & Sons, Chichester, 2001. ISBN 0-471-48997-2.
- [14] IEC. IEC 61400-1:2019 Wind energy generation systems – Part 1: Design requirements. International Electrotechnical Commission, Ženeva, 4. vyd., 2019.
- [15] Ib Troen a Erik Lundtang Petersen. *European Wind Atlas*. Risø National Laboratory,

- Roskilde, 1989. ISBN 87-550-1482-8.
- [16] C. G. Justus, W. R. Hargraves, A. Mikhail a D. Graber. Methods for estimating wind speed frequency distributions. *Journal of Applied Meteorology*, 17(3):350–353, 1978. doi: 10.1175/1520-0450(1978)017<0350:MFEWSF>2.0.CO;2.
 - [17] John D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill Education, New York, 6. vyd., 2017. ISBN 978-1-259-12991-9.
 - [18] Hermann Schlichting a Klaus Gersten. *Boundary-Layer Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, 9. vyd., 2017. ISBN 978-3-662-52917-1. doi: 10.1007/978-3-662-52919-5.
 - [19] E. L. Houghton a P. W. Carpenter. *Aerodynamics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5. vyd., 2003. ISBN 0-7506-5111-3.
 - [20] Ira H. Abbott a Albert E. von Doenhoff. *Theory of Wing Sections: Including a Summary of Airfoil Data*. Dover Publications, New York, 1959. ISBN 0-486-60586-8.
 - [21] Eastman N. Jacobs, Kenneth E. Ward a Robert M. Pinkerton. The characteristics of 78 related airfoil sections from tests in the variable-density wind tunnel. NACA Report 460, National Advisory Committee for Aeronautics, 1933.
 - [22] Joseph Katz a Allen Plotkin. *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. vyd., 2001. ISBN 0-521-66552-3.
 - [23] J. L. Tangler a D. M. Somers. NREL airfoil families for HAWTs. Technická správa NREL/TP-442-7109, National Renewable Energy Laboratory, Golden, CO, 1995.
 - [24] W. A. Timmer a R. P. J. O. M. van Rooij. Summary of the Delft University wind turbine dedicated airfoils. *Journal of Solar Energy Engineering*, 125(4):488–496, 2003.
 - [25] Albert Betz. Das Maximum der theoretisch möglichen Ausnützung des Windes durch Windmotoren. *Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen*, 26:307–309, 1920.
 - [26] G. A. M. van Kuik. The Lanchester–Betz–Joukowski limit. *Wind Energy*, 10(3):289–291, 2007. doi: 10.1002/we.218.
 - [27] Zhenzhou Zhao, Ruixin Wang, Wenzhong Shen, Tongguang Wang, Bofeng Xu, Yuan Zheng a Siyue Qian. Variable pitch approach for performance improving of straight-bladed VAWT at rated tip speed ratio. *Applied Sciences*, 8(6):957, 2018. doi: 10.3390/app8060957.
 - [28] Lu Ma, Xiaodong Wang, Jian Zhu a Shun Kang. Dynamic stall of a vertical-axis wind turbine and its control using plasma actuation. *Energies*, 12(19):3738, 2019. doi: 10.3390/en12193738.
 - [29] Shoutu Li, Ye Li, Congxin Yang, Xuyao Zhang, Qing Wang, Deshun Li, Wei Zhong a Tongguang Wang. Design and testing of a LUT airfoil for straight-bladed vertical axis wind turbines. *Applied Sciences*, 8(11):2266, 2018. doi: 10.3390/app8112266.
 - [30] Bofeng Xu, Tongguang Wang, Yue Yuan, Zhenzhou Zhao a Haoming Liu. A simplified free vortex wake model of wind turbines for axial steady conditions. *Applied Sciences*, 8(6):866, 2018. doi: 10.3390/app8060866.
 - [31] Wen Zhong Shen. Special issue on wind turbine aerodynamics. *Applied Sciences*, 9(9):1725, 2019. doi: 10.3390/app9091725.
 - [32] Hugo Olivares-Espinosa, Simon-Philippe Breton, Karl Nilsson, Christian Masson, Louis Dufresne a Stefan Ivanell. Assessment of turbulence modelling in the wake of an actuator disk with a decaying turbulence inflow. *Applied Sciences*, 8(9):1530, 2018. doi: 10.3390/app8091530.
 - [33] Sebastian Ehrich, Carl Michael Schwarz, Hamid Rahimi, Bernhard Stoevesandt a Joachim Peinke. Comparison of the blade element momentum theory with computa-

tional fluid dynamics for wind turbine simulations in turbulent inflow. *Applied Sciences*, 8(12):2513, 2018. doi: 10.3390/app8122513.